

Δίνεται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} \ln x^2 & , x \in (-\infty, 0) \\ \frac{\sin x - 1}{x} & , x \in (0, 2\pi) \end{cases}$

και $\varphi(x) = x \ln x + \sin x - 1, x \in (0, 2\pi)$.

A. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει ακριβώς μια λύση, που βρίσκεται στο $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

B. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Γ. Να δείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο στο $(0, 2\pi)$.

Δ. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x - \varphi(x)) dx$.