

$$\Delta\acute{\iota}\nu\epsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\epsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f(x)=\begin{cases} e^{x^2-\alpha} & , x\leq 0 \\ \frac{\alpha}{e}\ln(x+e) & , x>0 \end{cases}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\kappa$, $\kappa>\frac{1}{e}$, έχει ακριβώς δύο ετερόσημες ρίζες.

δ) Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του λ να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\rightarrow-\infty}\frac{\ln f(x)+x}{(f(0)-\lambda)x^2+x-1}.$$

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(0,\rho_1)$, όπου ρ_1 η θετική ρίζα της $f(x)=\kappa$, τέτοιο,

$$\acute{\omega}\sigma\tau\epsilon\ \nu\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\epsilon\iota\ f(\xi)=\frac{4f(\frac{\rho_1}{4})+3f(\frac{\rho_1}{3})+2f(\frac{\rho_1}{2})}{9}.$$