

# Κεφάλαιο 1 - Όριο - Συνέχεια

## Ορισμός

Έστω  $A$  ένα μη κενό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ . Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A$ ;

Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με πεδίο ορισμού το  $A$  μια διαδικασία (κανόνα)  $f$ , με την οποία κάθε στοιχείο  $x \in A$  αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό  $y$ . Το  $y$  ονομάζεται **τιμή της  $f$  στο  $x$**  και συμβολίζεται με  $f(x)$ .

Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

- Το γράμμα  $x$ , που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του  $A$  λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα  $y$ , που παριστάνει την τιμή της  $f$  στο  $x$ , λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.
- Το πεδίο ορισμού  $A$  της συνάρτησης  $f$  συνήθως το συμβολίζουμε με  $D_f$ .
- Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της  $f$  σε όλα τα  $x \in A$ , λέγεται **σύνολο τιμών** της  $f$  και συμβολίζεται με  $f(A)$ . Είναι δηλαδή:

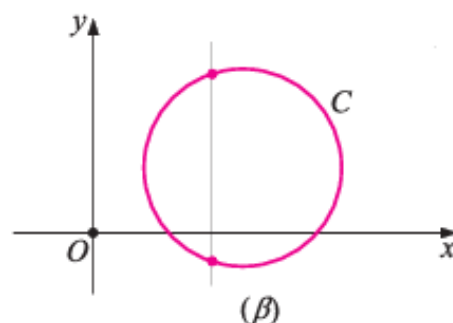
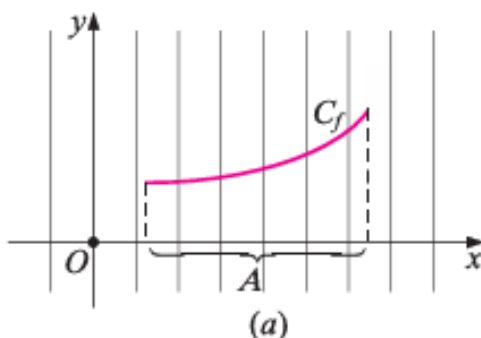
$$f(A) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}.$$

## Ορισμός

Τι ονομάζουμε **γραφική παράσταση** μιας συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού ένα σύνολο  $A$ ;

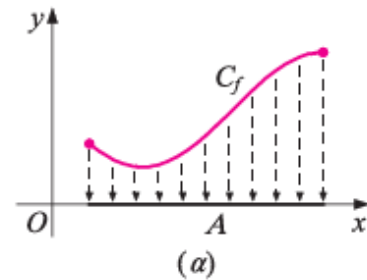
Το σύνολο των σημείων  $M(x, y)$  για τα οποία ισχύει  $y = f(x)$ , δηλαδή το σύνολο των σημείων  $M(x, f(x))$ ,  $x \in A$ , λέγεται **γραφική παράσταση** μιας συνάρτησης  $f$  και συμβολίζεται συνήθως με  $C_f$ .

- Επειδή κάθε  $x \in A$  αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο  $y \in \mathbb{R}$ , δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της  $f$  το πολύ ένα κοινό σημείο (Σχήμα α). Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης (Σχήμα β).

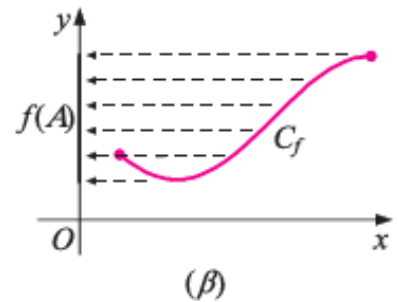


Όταν δίνεται η γραφική παράσταση  $C_f$  μιας συνάρτησης  $f$ , τότε:

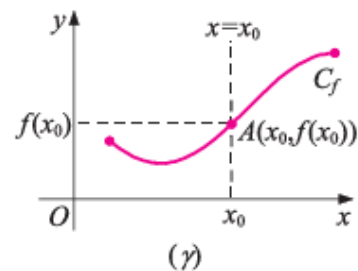
α) Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το σύνολο  $A$  των τετμημένων των σημείων της  $C_f$ .



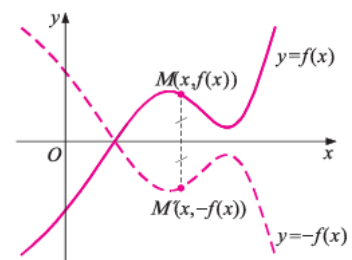
β) Το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το σύνολο  $f(A)$  των τεταγμένων των σημείων της  $C_f$ .



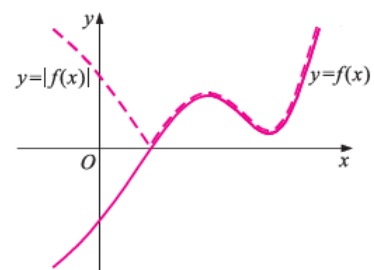
γ) Η τιμή της  $f$  στο  $x_0 \in A$  είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας  $x = x_0$  και της  $C_f$ .



δ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $-f$  είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα  $x'x$ , της γραφικής παράστασης της  $f$ , γιατί αποτελείται από τα σημεία  $M'(x, -f(x))$  που είναι συμμετρικά των  $M(x, f(x))$ , ως προς τον άξονα  $x'x$ .

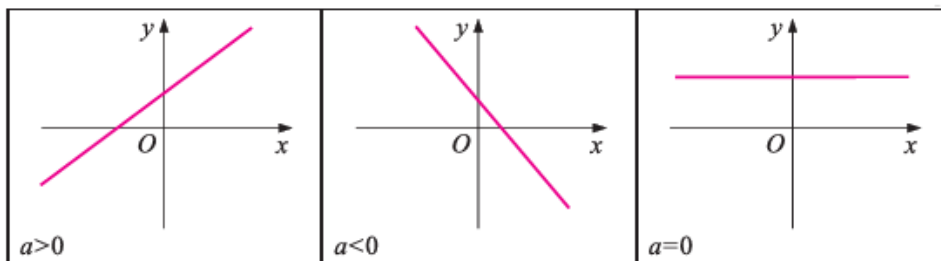


ε) Η γραφική παράσταση της  $|f|$  αποτελείται από τα τμήματα της  $C_f$  που βρίσκονται πάνω από τον άξονα  $x'x$  ή πάνω σε αυτόν και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα  $x'x$ , των τμημάτων της  $C_f$  που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.

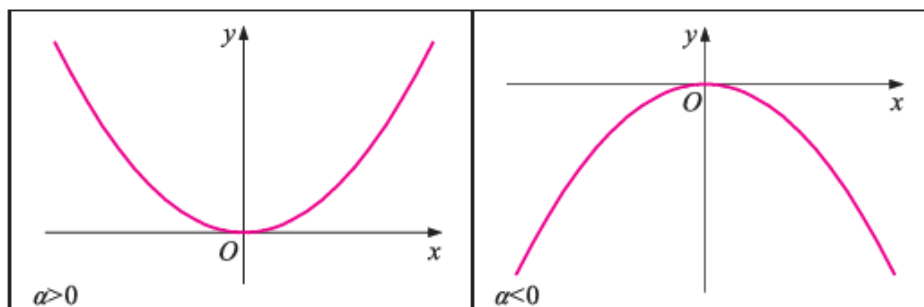


3. Οι γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων:

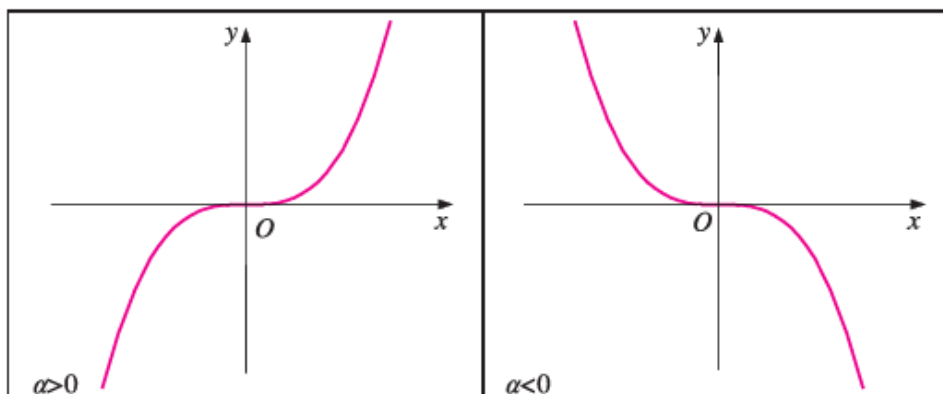
- Η πολυωνυμική συνάρτηση  $f(x) = \alpha x + \beta$ .



- Η πολυωνυμική συνάρτηση  $f(x) = \alpha x^2$ ,  $\alpha \neq 0$ .

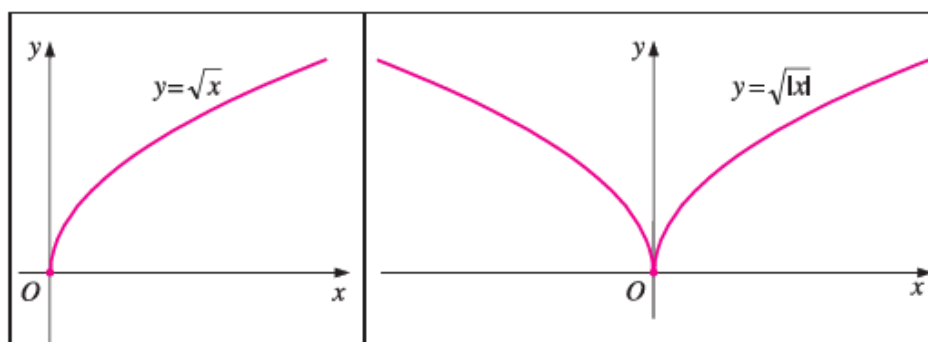


- Η πολυωνυμική συνάρτηση  $f(x) = \alpha x^3$ ,  $\alpha \neq 0$ .

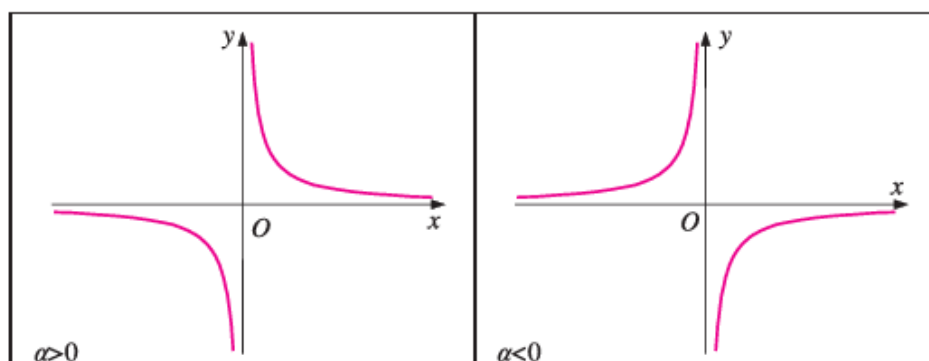


- Οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = \sqrt{|x|}$ .

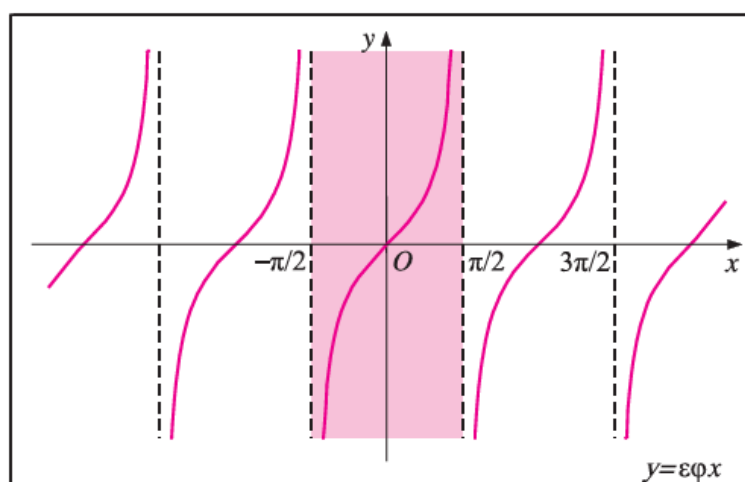
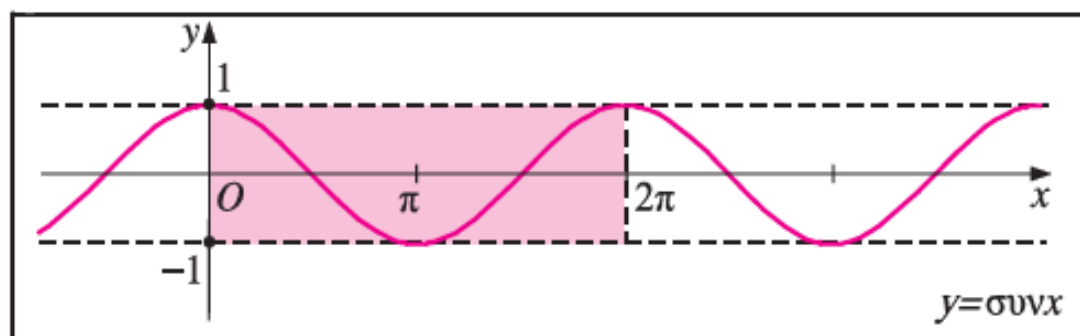
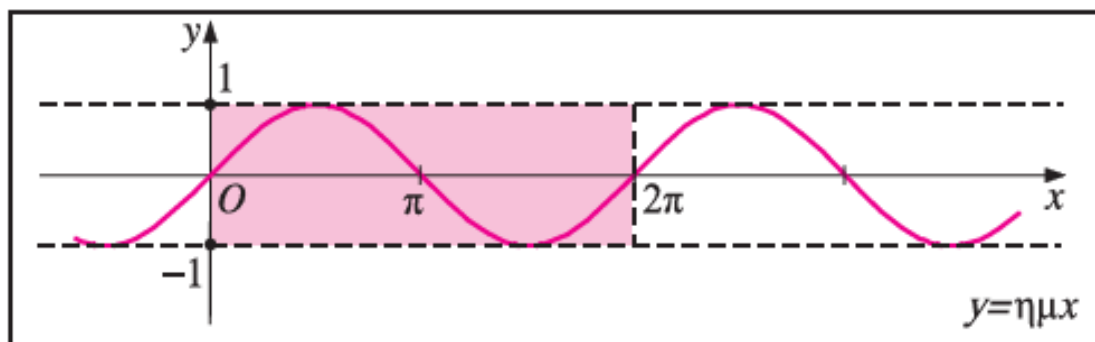
Επειδή  $g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$ , η γραφική παράσταση της  $y = \sqrt{|x|}$  αποτελείται από δύο κλάδους. Ο ένας είναι η γραφική παράσταση της  $y = \sqrt{x}$  και ο άλλος η συμμετρική της ως προς τον άξονα  $y/y$ .



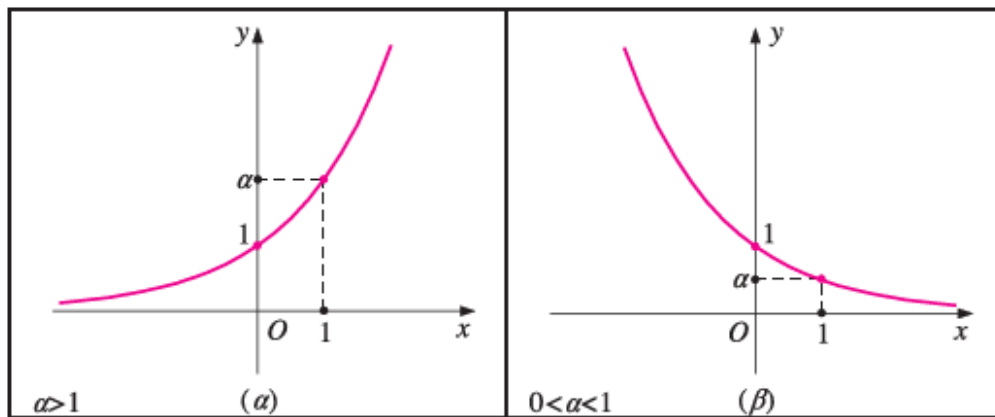
- Η ρητή συνάρτηση  $f(x) = \frac{\alpha}{x}$ ,  $\alpha \neq 0$ .



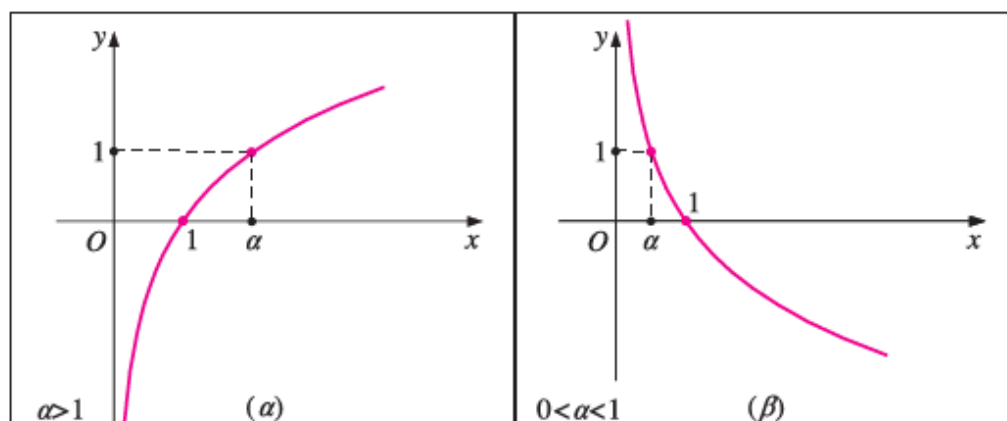
- Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις:  $f(x) = \eta\mu x$ ,  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ ,  $f(x) = \epsilon\phi x$ .



- Η εκθετική συνάρτηση  $f(x) = \alpha^x$ ,  $0 < \alpha \neq 1$ .



- Η λογαριθμική συνάρτηση  $f(x) = \log_\alpha x$ ,  $0 < \alpha \neq 1$ .



## Ορισμός

Πότε δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται ίσες;

Δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται **ίσες**, όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού  $A$  και
- για κάθε  $x \in A$  ισχύει  $f(x) = g(x)$ .

- Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι ίσες γράφουμε  $f = g$ .
- Έστω  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  και  $\Gamma$  ένα υποσύνολο των  $A$  και  $B$ . Αν για κάθε  $x \in \Gamma$  ισχύει  $f(x) = g(x)$ , τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι **ίσες στο σύνολο**  $\Gamma$ .

## Ορισμός

Πράξεις με συναρτήσεις.

Ορίζουμε ως **άθροισμα**  $f + g$ , **διαφορά**  $f - g$ , **γινόμενο**  $fg$  και **πηλίκο**  $\frac{f}{g}$  δύο συναρτήσεων  $f, g$  τις συναρτήσεις:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  με  $D_{f+g} = D_f \cap D_g$
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$  με  $D_{f-g} = D_f \cap D_g$
- $(fg)(x) = f(x)g(x)$  με  $D_{fg} = D_f \cap D_g$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  με  $D_{\frac{f}{g}} = \{x \mid x \in D_f \cap D_g \text{ και } g(x) \neq 0\}$ .

## Ορισμός

Τι ονομάζουμε **σύνθεση της  $f$  με τη  $g$** ;

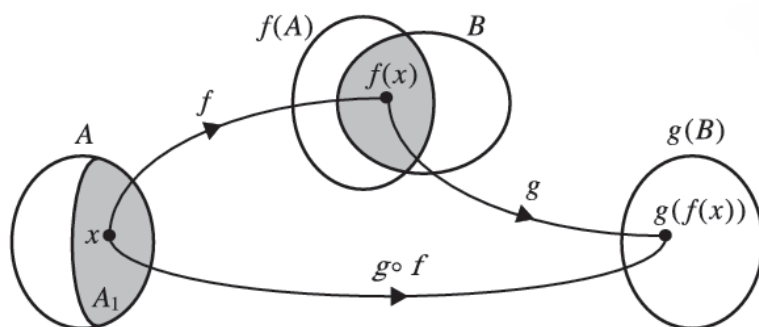
Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού  $A, B$  αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της  $f$  με τη  $g$** , και συμβολίζουμε με  $g \circ f$ , τη συνάρτηση με τύπο:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Το πεδίο ορισμού της  $g \circ f$  αποτελείται από όλα τα στοιχεία  $x$  του πεδίου ορισμού της  $f$  για τα οποία το  $f(x)$  ανήκει στο πεδίο ορισμού της  $g$ . Δηλαδή είναι το σύνολο:

$$D_{g \circ f} = \{x \in A \mid f(x) \in B\}.$$

Είναι φανερό ότι η  $g \circ f$  ορίζεται αν  $D_{g \circ f} \neq \emptyset$ , δηλαδή αν  $f(A) \cap B \neq \emptyset$ .



- Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι  $g \circ f$  και  $f \circ g$ , τότε αυτές **δεν είναι υποχρεωτικά ίσες**.
- Αν  $f, g$  και  $h$  είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η  $h \circ (g \circ f)$ , τότε ορίζεται και η  $(h \circ g) \circ f$  και ισχύει:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε **σύνθεση των  $f, g$  και  $h$**  και τη συμβολίζουμε με  $h \circ g \circ f$ .

## Ορισμός

Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της;

Μία συνάρτηση  $f$  λέγεται:

- **γνησίως αύξουσα** σ' ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

- **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η  $f$  είναι **γνησίως μονότονη** στο  $\Delta$ . Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι ένα διάστημα  $\Delta$  και η  $f$  είναι γνησίως μονότονη σ' αυτό, τότε θα λέμε, απλώς, ότι η  $f$  είναι γνησίως μονότονη.

## Ορισμός

Πότε μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού ένα σύνολο  $A$  παρουσιάζει μέγιστο και πότε ελάχιστο στο  $x_0 \in A$ ;

Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  **(ολικό) μέγιστο**, το  $f(x_0)$ , όταν:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{για κάθε } x \in A.$$

- Παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  **(ολικό) ελάχιστο**, το  $f(x_0)$ , όταν:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{για κάθε } x \in A.$$

Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης  $f$  λέγονται **ολικά ακρότατα** της  $f$ .

## Ορισμός

9. Πότε μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού ένα σύνολο  $A$  λέγεται συνάρτηση 1 – 1;

Μία συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση 1 – 1, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 \neq x_2, \quad \text{τότε } f(x_1) \neq f(x_2).$$

Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι:

Μία συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνάρτηση 1 – 1, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } f(x_1) = f(x_2), \quad \text{τότε } x_1 = x_2.$$

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι μία συνάρτηση  $f$  είναι 1 – 1, αν και μόνο αν:

- Για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της, η εξίσωση  $f(x) = y$  έχει ακριβώς μία λύση ως προς  $x$ .
- Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της  $f$  το πολύ ένα κοινό σημείο.

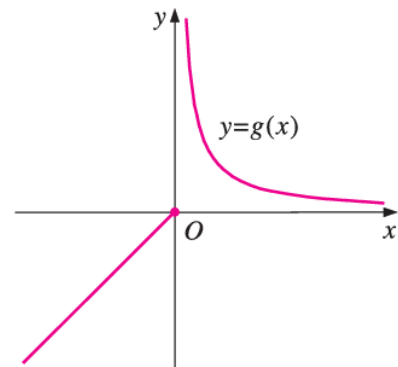
Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι και συνάρτηση  $1-1$ .

Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης γενικά **δεν** ισχύει.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

είναι συνάρτηση  $1-1$ , όμως δεν είναι γνησίως μονότονη.



## Ορισμός

Πότε μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού ένα σύνολο  $A$  αντιστρέφεται και πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της  $f$ ;

Μία συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  αντιστρέφεται αν και μόνο αν είναι  $1-1$ . Αντίστροφη λέγεται η συνάρτηση που

- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών  $f(A)$  της  $f$
- έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού  $A$  της  $f$
- ισχύει η ισοδυναμία:  $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$ .

Ισχύουν τα εξής:

- $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$ .
- $f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A)$ .

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $xOy$  και  $x'Oy'$ .

## Απόδειξη

Έστω  $M(\alpha, \beta)$  ένα σημείο της  $C$ . Τότε:

$$f(\alpha) = \beta \iff f^{-1}(\beta) = \alpha$$

δηλαδή το σημείο  $M'(\beta, \alpha)$  θα ανήκει στη  $C'$ . Όμως, τα σημεία  $M(\alpha, \beta)$  ανδ  $M'(\beta, \alpha)$  είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία  $y = x$ , άρα οι  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία αυτή.

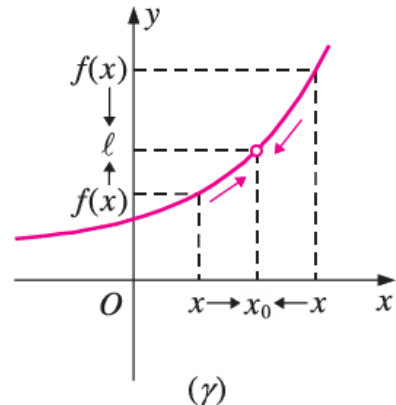
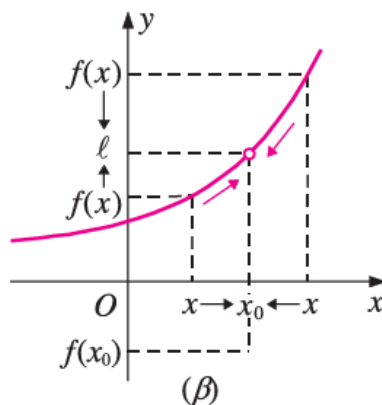
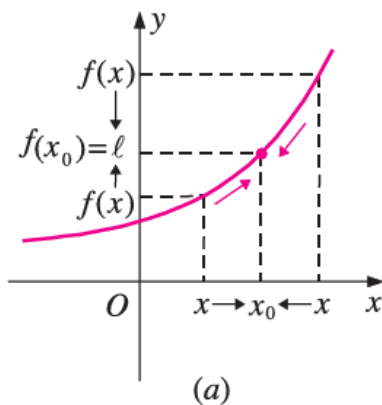
Από το παραπάνω συνεπάγεται ότι, αν  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  μία  $1-1$  συνάρτηση, τότε:

$$f(x) = x \iff f^{-1}(x) = x, \quad \mu\epsilon x \in A \cap f(A).$$

## Ορισμός

Όριο συνάρτησης στο  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

- Για να αναζητήσουμε το όριο της  $f$  στο  $x_0$ , πρέπει η  $f$  να ορίζεται όσο θέλουμε «κοντά στο  $x_0$ », δηλαδή η  $f$  να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$  ή  $(\alpha, x_0)$  ή  $(x_0, \beta)$ .
- Το  $x_0$  μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Σχήματα α, β) ή να μην ανήκει σε αυτό (Σχήμα γ).
- Η τιμή της  $f$  στο  $x_0$ , όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριο της στο  $x_0$  (Σχήμα α) ή διαφορετική από αυτό (Σχήμα β).



- Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$$

Τους αριθμούς  $\ell_1 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  και  $\ell_2 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  τους λέμε **πλευρικά όρια** της  $f$  στο  $x_0$  και συγκεκριμένα το  $\ell_1$  **αριστερό όριο** της  $f$  στο  $x_0$ , ενώ το  $\ell_2$  **δεξιό όριο** της  $f$  στο  $x_0$ .

- Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα της μορφής  $(\alpha, x_0)$ , αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής  $(x_0, \beta)$ , τότε ορίζουμε:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ .
- Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα της μορφής  $(x_0, \beta)$ , αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής  $(\alpha, x_0)$ , τότε ορίζουμε:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ .
- Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$(\alpha) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$$

$$(\beta) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell$$

- Όρια ταυτοτικής και σταθερής συνάρτησης:

$$(\alpha) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

$$(\beta) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} c = c$$

## Θεώρημα

Ιδιότητες των ορίων στο  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$
- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$
- Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $x_0$  και ισχύει  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

- Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $x_0$  και ισχύει  $f(x) < g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , τότε κατ' ανάγκη θα είναι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

- Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  στο  $x_0$ , τότε:

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , για κάθε σταθερά  $k \in \mathbb{R}$
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
4.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$ , εφόσον  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$
5.  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$
6.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$ , εφόσον  $f(x) \geq 0$  κοντά στο  $x_0$

Ως συνέπεια των παραπάνω, ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^\nu = \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ , και ειδικότερα:  $\lim_{x \rightarrow x_0} x^\nu = x_0^\nu$ .

**Έστω το πολυώνυμο:**  $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$  **και**  $x_0 \in \mathbb{R}$ . **Τότε:**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

## Απόδειξη

Είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_\nu x^\nu) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{\nu-1} x^{\nu-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 \\ &= \alpha_\nu \lim_{x \rightarrow x_0} x^\nu + \alpha_{\nu-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{\nu-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 \\ &= \alpha_\nu x_0^\nu + \alpha_{\nu-1} x_0^{\nu-1} + \dots + \alpha_0 = P(x_0). \end{aligned}$$

Έστω η ρητή συνάρτηση:  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , όπου  $P(x), Q(x)$  πολυώνυμα του  $x$  και  $x_0 \in \mathbb{R}$  με  $Q(x_0) \neq 0$ . Τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

### Απόδειξη

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

### Θεώρημα

Το Κριτήριο Παρεμβολής.

Έστω οι συναρτήσεις  $f, g, h$ . Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$  και
- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$ ,

τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

Χρήσιμη ανισότητα:

$$|\eta\mu x| \leq |x|, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και η ισότητα ισχύει μόνο για  $x = 0$ .

### Ιδιότητες

Τριγωνομετρικά όρια.

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0.$

### Μεθοδολογία

Όριο σύνθετης συνάρτησης.

Για να υπολογίσουμε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$ , της σύνθετης συνάρτησης  $f \circ g$  στο σημείο  $x_0 \in \mathbb{R}$ , εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε  $u = g(x)$ .
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το  $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  και
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το  $\ell = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$ .

Αποδεικνύεται ότι, αν  $g(x) \neq u_0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με  $\ell$ , δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u).$$

## Ιδιότητες

Ιδιότητες των μη πεπερασμένων ορίων στο  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:

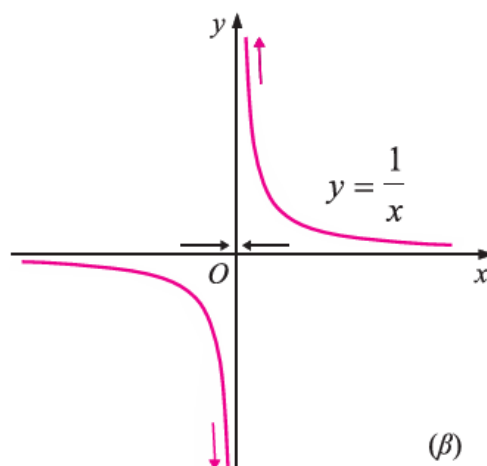
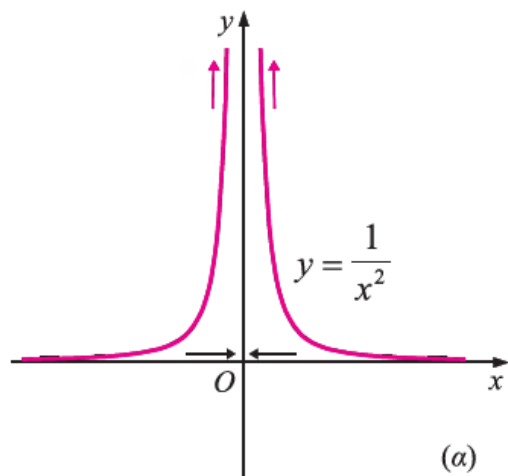
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty &\iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty &\iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty\end{aligned}$$

- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , ενώ αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ .
- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty$ , ενώ αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$ .
- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ .
- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ , ενώ αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ .
- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$ .
- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$ .

Σύμφωνα με τις ιδιότητες αυτές, έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$  και γενικά  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = +\infty$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$  (Σχήμα α)
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$  και γενικά  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$  (Σχήμα β)
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$  και γενικά  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$  (Σχήμα β)

Επομένως, δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της  $f(x) = \frac{1}{x^{2\nu+1}}$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ .



### Θεώρημα

#### ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (όριο αθροίσματος)

|                               |                    |                    |           |           |           |           |
|-------------------------------|--------------------|--------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$   |                    |                    |           |           |           |           |
| το όριο της $f$ είναι:        | $a \in \mathbb{R}$ | $a \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| και το όριο της $g$ είναι:    | $+\infty$          | $-\infty$          | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| τότε το όριο της $f+g$ είναι: | $+\infty$          | $-\infty$          | $+\infty$ | $-\infty$ | ;         | ;         |

### Θεώρημα

#### ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο γινομένου)

|                                     |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
|-------------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$ ,       |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
| το όριο της $f$ είναι:              | $a > 0$   | $a < 0$   | $a > 0$   | $a < 0$   | 0         | 0         | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| και το όριο της $g$ είναι:          | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| τότε το όριο της $f \cdot g$ είναι: | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ;         | ;         | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

Απροσδιόριστες μορφές:

$$(+\infty) + (-\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad (+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty), \quad \frac{0}{0} \quad \text{και} \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

## Όρια συνάρτησης στο άπειρο.

Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$  ή στο  $-\infty$ , πρέπει η  $f$  να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής  $(\alpha, +\infty)$  ή  $(-\infty, \beta)$  αντίστοιχα.

Για τα όρια στο άπειρο ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο  $x_0$  εφόσον οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή.

### Βασικά όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\nu = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\nu = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0, \quad \nu \in \mathbb{N}^*$

- Για την πολυωνυμική συνάρτηση  $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ , με  $\alpha_\nu \neq 0$  ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha_\nu x^\nu) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha_\nu x^\nu)$$

- Για τη ρητή συνάρτηση  $f(x) = \frac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa + \beta_{\kappa-1} x^{\kappa-1} + \dots + \beta_0}$ , με  $\alpha_\nu \neq 0, \beta_\kappa \neq 0$  ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa} \right) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa} \right)$$

## Ιδιότητες

### Όρια εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης.

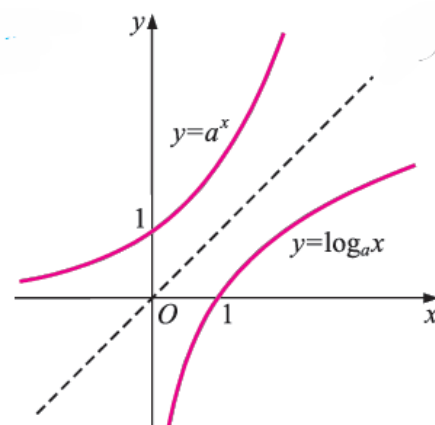
Αν  $a > 1$ , τότε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$$



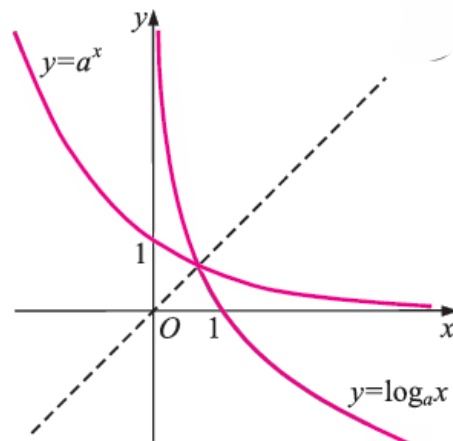
Αν  $0 < \alpha < 1$ , τότε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{\alpha} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\alpha} x = -\infty$$



## Ορισμός

Πότε μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

Έστω μια συνάρτηση  $f$  και  $x_0$  ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η  $f$  είναι **συνεχής στο  $x_0$** , όταν:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, μία συνάρτηση  $f$  **δεν είναι συνεχής** σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, όταν δεν υπάρχει το όριό της στο  $x_0$ , ή υπάρχει το όριό της στο  $x_0$ , αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της,  $f(x_0)$ , στο σημείο  $x_0$ .

Μία συνάρτηση  $f$  που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, απλά, **συνεχής συνάρτηση**.

- Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση  $P$  είναι συνεχής, αφού για κάθε  $x_0 \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0).$$

- Κάθε ρητή συνάρτηση  $\frac{P}{Q}$  είναι συνεχής, αφού για κάθε  $x_0$  του πεδίου ορισμού της ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

- Οι συναρτήσεις  $f(x) = \eta\mu x$  και  $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$  είναι συνεχείς, αφού για κάθε  $x_0 \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0.$$

- Οι συναρτήσεις  $f(x) = \alpha^x$  και  $g(x) = \log_{\alpha} x$ ,  $0 < \alpha \neq 1$ , είναι συνεχείς.

## Θεώρημα

Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι συνεχείς στο  $x_0$ , τότε είναι συνεχείς στο  $x_0$  και οι συναρτήσεις:

$$f + g, \quad c \cdot f, \quad \text{όπου } c \in \mathbb{R}, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g}, \quad |f| \quad \text{και} \quad \sqrt[n]{f}$$

Οι συναρτήσεις  $f(x) = \varepsilon\phi x$  και  $g(x) = \sigma\phi x$  είναι συνεχείς ως πηλίκα συνεχών συναρτήσεων.

## Θεώρημα

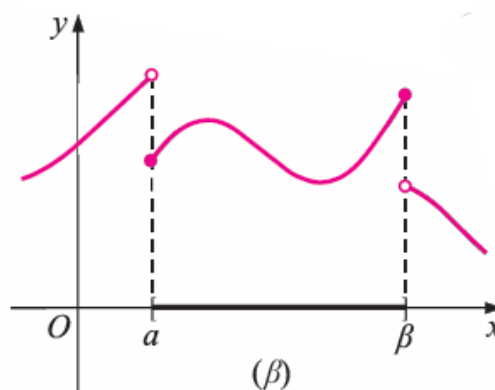
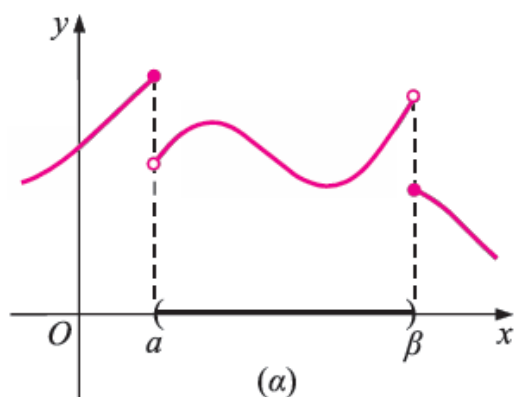
Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $f(x_0)$ , τότε η σύνθεσή τους  $g \circ f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

## Ορισμός

Πότε μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$  και πότε σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ ;

- Μια συνάρτηση  $f$  θα λέμε ότι είναι **συνεχής σ' ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$** , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του  $(\alpha, \beta)$ .
- Μια συνάρτηση  $f$  θα λέμε ότι είναι **συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$** , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του  $(\alpha, \beta)$  και επιπλέον:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$$



## Θεώρημα

Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Bolzano.

Έστω μια συνάρτηση  $f$ , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν:

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ ,

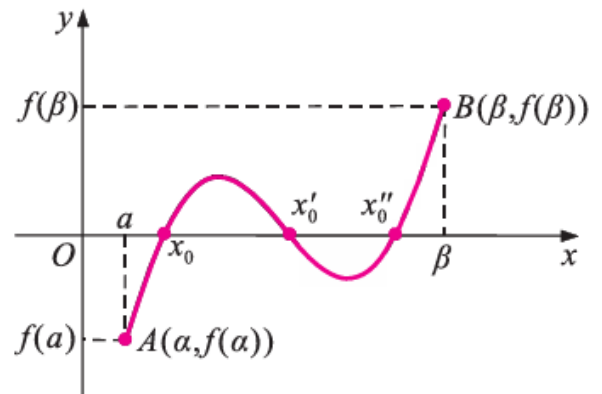
τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0) = 0$$

Δηλαδή, υπάρχει μία, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$ .

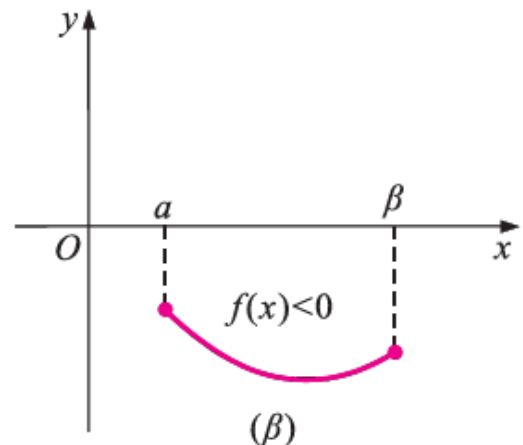
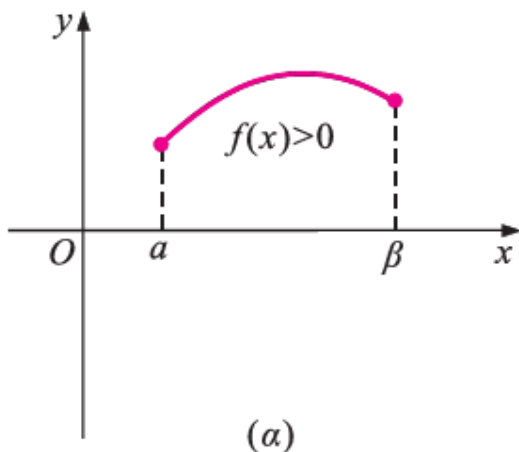
### Γεωμετρική ερμηνεία:

Επειδή  $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ , τα σημεία της  $C_f$ ,  $A(\alpha, f(\alpha))$  και  $B(\beta, f(\beta))$  βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα  $x'x$ . Και λόγω της συνέχειας της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , η γραφική της παράσταση θα τέμνει τον  $x'x$  σε ένα τουλάχιστον σημείο.

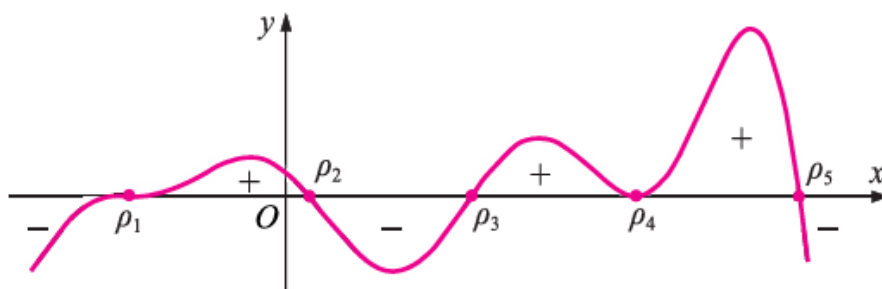


### Συνέπειες του Θεωρήματος Bolzano.

Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή είναι ή θετική για κάθε  $x \in \Delta$  (σχήμα α) ή αρνητική για κάθε  $x \in \Delta$  (σχήμα β), δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα  $\Delta$ .



Μια συνεχής συνάρτηση  $f$  διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της  $f$  χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.



Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

### Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση  $f$ , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν:

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$ ,

τότε για κάθε αριθμό  $\kappa$  μεταξύ των  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0) = \kappa$$

### Απόδειξη

Έστω  $f(\alpha) < f(\beta)$ . Τότε  $f(\alpha) < \kappa < f(\beta)$ . Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - \kappa$ ,  $x \in [\alpha, \beta]$  και παρατηρούμε ότι:

- η  $g$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και
- $g(\alpha) \cdot g(\beta) < 0$ , αφού  $g(\alpha) = f(\alpha) - \kappa < 0$  και  $g(\beta) = f(\beta) - \kappa > 0$ .

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε  $g(x_0) = f(x_0) - \kappa = 0$ , οπότε  $f(x_0) = \kappa$ .

- Αν μία συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , τότε δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.
- Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

### Θεώρημα

Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής.

Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , τότε παίρνει στο  $[\alpha, \beta]$  μια μέγιστη τιμή  $M$  και μια ελάχιστη τιμή  $m$ .

Δηλαδή υπάρχουν  $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$  τέτοια, ώστε, αν  $m = f(x_1)$  και  $M = f(x_2)$ , να ισχύει:

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \text{για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

- Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το **σύνολο τιμών** μιας συνεχούς συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το  $[\alpha, \beta]$  είναι το κλειστό διάστημα  $[m, M]$ , όπου  $m$  η ελάχιστη και  $M$  η μέγιστη τιμή της.
- Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα  $(A, B)$ , όπου:

$$A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \quad \text{και} \quad B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$$

- Αν, όμως η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο  $(\alpha, \beta)$ , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα  $(B, A)$ .

## Κεφάλαιο 2 - Διαφορικός Λογισμός

### Ορισμός

Πώς ορίζεται η εφαπτομένη της  $C_f$  σε σημείο της  $A(x_0, f(x_0))$ ;

Έστω  $f$  μια συνάρτηση και  $A(x_0, f(x_0))$  ένα σημείο της  $C_f$ . Αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι ένας πραγματικός αριθμός  $\lambda$ , τότε ορίζουμε ως **εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $A$** , την ευθεία  $\varepsilon$  που διέρχεται από το  $A$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$ .

### Ορισμός

Πότε μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

Μία συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$**  του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της  $f$  στο  $x_0$**  και συμβολίζεται με  $f'(x_0)$ . Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Παράγωγος της  $f$  στο  $x_0$ :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{df(x_0)}{dx} = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$$

- Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , αν και μόνο αν υπάρχουν στο  $\mathbb{R}$  τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι ίσα.

- Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή  $t_0$ , είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης  $x = S(t)$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ . Δηλαδή, είναι  $u(t_0) = S'(t_0)$ .

- Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης  $\varepsilon$  της  $C_f$  μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης  $f$ , στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  είναι η παράγωγος της  $f$  στο  $x_0$ . Δηλαδή είναι  $\lambda = f'(x_0)$ , οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης  $\varepsilon$  είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Την κλίση  $f'(x_0)$  της εφαπτομένης  $\varepsilon$  στο  $A(x_0, f(x_0))$  θα τη λέμε και **κλίση της  $C_f$  στο  $A$  ή κλίση της  $f$  στο  $x_0$** .

### Θεώρημα

Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

### Απόδειξη

Για  $x \neq x_0$  έχουμε:  $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$ , οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

αφού η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ . Επομένως,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , δηλαδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

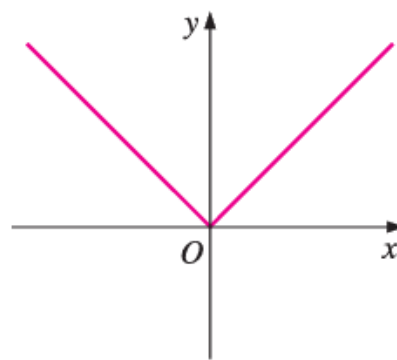
Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης γενικά **δεν** ισχύει.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση  $f(x) = |x|$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ , αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

ενώ

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$



- Αν, όμως, μία συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .
- Μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A$  είναι παραγωγίσιμη στο  $A$ , ή απλά, παραγωγίσιμη, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο  $x_0 \in A$ .

### Ορισμός

Πότε μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$  και πότε σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ ;

- Μια συνάρτηση  $f$  θα λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα ανοικτό διάστημα**  $(\alpha, \beta)$ , όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του  $(\alpha, \beta)$ .
- Μια συνάρτηση  $f$  θα λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα κλειστό διάστημα**  $[\alpha, \beta]$ , όταν είναι παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  και επιπλέον ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}.$$

## Ορισμός

Ποια συνάρτηση ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της  $f$**  ή απλά **παράγωγος της  $f$** ;

Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  και  $A_1$  το σύνολο των σημείων του  $A$  στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε  $x \in A_1$  στο  $f'(x)$ , ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$\begin{aligned} f' : A_1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της  $f$**  ή απλά **παράγωγος της  $f$** . Η πρώτη παράγωγος της  $f$  συμβολίζεται και με  $\frac{df}{dx}$ .

- Αν υποθέσουμε ότι το  $A_1$  είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τότε η παράγωγος της  $f'$ , αν υπάρχει, λέγεται **δεύτερη παράγωγος της  $f$**  και συμβολίζεται με  $f''$ .
- Επαγωγικά, ορίζεται η  **$\nu$ -οστή παράγωγος της  $f$** , με  $\nu \geq 3$ , και συμβολίζεται με  $f^{(\nu)}$ . Δηλαδή:

$$f^{(\nu)} = [f^{(\nu-1)}]', \quad \nu \geq 3.$$

Έστω η σταθερή συνάρτηση  $f(x) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με  $f'(x) = 0$ .

## Απόδειξη

Αν  $x_0$  είναι ένα σημείο του  $\mathbb{R}$ , τότε για  $x \neq x_0$  ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0,$$

δηλαδή  $(c)' = 0$ .

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με  $f'(x) = 1$ .

### Απόδειξη

Αν  $x_0$  είναι ένα σημείο του  $\mathbb{R}$ , τότε για  $x \neq x_0$  ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1,$$

δηλαδή  $(x)' = 1$ .

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με  $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$ .

### Απόδειξη

Αν  $x_0$  είναι ένα σημείο του  $\mathbb{R}$ , τότε για  $x \neq x_0$  ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^\nu - x_0^\nu}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \dots + x_0^{\nu-1})}{x - x_0} = x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \dots + x_0^{\nu-1}.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \dots + x_0^{\nu-1}) = x_0^{\nu-1} + x_0^{\nu-1} + \dots + x_0^{\nu-1} = \nu x_0^{\nu-1},$$

δηλαδή  $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$ .

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$ , με  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

### Απόδειξη

Αν  $x_0$  είναι ένα σημείο του  $(0, +\infty)$ , τότε για  $x \neq x_0$  ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

- Η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.
- Η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$ .

- Η συνάρτηση  $f(x) = \sin x$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = \cos x$ .
- Η συνάρτηση  $f(x) = e^x$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = e^x$ .
- Η συνάρτηση  $f(x) = \ln x$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με  $f'(x) = \frac{1}{x}$ .

Συνοψίζοντας:

$$(\sin x)' = \cos x \quad \bullet \quad (\cos x)' = -\sin x \quad \bullet \quad (e^x)' = e^x \quad \bullet \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

### Θεώρημα

Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f + g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ .

### Απόδειξη

Για  $x \neq x_0$ , ισχύει:

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0),$$

δηλαδή:  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ .

- Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε για κάθε  $x \in \Delta$  ισχύει:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

- Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Δηλαδή, αν  $f_1, f_2, \dots, f_k$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\Delta$ , τότε:

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_k)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_k'(x).$$

### Θεώρημα

Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , τότε η συνάρτηση  $f \cdot g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:  $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ .

- Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε για κάθε  $x \in \Delta$  ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

- Το παραπάνω θεώρημα επεκτείνεται και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Έτσι, για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις ισχύει:

$$\begin{aligned} (f(x)g(x)h(x))' &= [(f(x)g(x)) \cdot h(x)]' \\ &= (f(x)g(x))' \cdot h(x) + (f(x)g(x)) \cdot h'(x) \\ &= [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)] \cdot h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x). \end{aligned}$$

- Ισχύει:  $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$ .

### Θεώρημα

Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$  και  $g(x_0) \neq 0$ , τότε και η συνάρτηση  $\frac{f}{g}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$ .

Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και για κάθε  $x \in \Delta$  ισχύει  $g(x) \neq 0$ , τότε για κάθε  $x \in \Delta$  έχουμε:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^{-\nu}$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$ , με  $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$ .

### Απόδειξη

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  έχουμε:

$$(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)' = \frac{(1)'x^{\nu} - 1 \cdot (x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}.$$

Επομένως, ισχύει η σχέση:  $(x^k)' = kx^{k-1}$  για κάθε  $k \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$ .

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \varepsilon\varphi x$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ , με  $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ .

### Απόδειξη

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}_1$  έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

- Η συνάρτηση  $f(x) = \sigma\varphi x$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}_2 = \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$ , με  $f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$ .

### Θεώρημα

Αν η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $g(x_0)$ , τότε η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:  $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ .

Γενικά, αν μία συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $g(\Delta)$ , τότε η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\Delta$  και ισχύει:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Δηλαδή, αν  $u = g(x)$ , τότε:  $(f(u))' = f'(u) \cdot u'$ .

Με το συμβολισμό του Leibniz, αν  $y = f(u)$  και  $u = g(x)$ , έχουμε τον τύπο:  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ , που είναι γνωστός ως **κανόνας της αλυσίδας**.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$ , με  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ .

### Απόδειξη

Για  $x \in (0, +\infty)$  είναι  $f(x) = x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ . Επομένως:

$$f'(x) = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} (\alpha \ln x)' = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \alpha^x$ ,  $\alpha > 0$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με  $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$ .

### Απόδειξη

Για  $x \in \mathbb{R}$  είναι  $f(x) = \alpha^x = e^{\ln \alpha^x} = e^{x \ln \alpha}$ . Επομένως:

$$f'(x) = (e^{x \ln \alpha})' = e^{x \ln \alpha} \cdot (x \ln \alpha)' = \alpha^x \ln \alpha.$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \ln |x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$ , με  $f'(x) = \frac{1}{x}$ .

### Απόδειξη

- Αν  $x > 0$ , τότε  $\ln |x| = \ln x$ , οπότε

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- Αν  $x < 0$ , τότε  $\ln |x| = \ln(-x)$ , οπότε

$$f'(x) = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

Ανακεφαλαιώνοντας, αν η συνάρτηση  $u = f(x)$  είναι παραγωγίσιμη, τότε έχουμε:

|                                                                         |                                                          |                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$                            | $(e^u)' = e^u \cdot u'$                                  | $(\alpha^u)' = \alpha^u \ln \alpha \cdot u'$      |
| $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$                            | $(\eta \mu u)' = \sigma \upsilon \nu u \cdot u'$         | $(\sigma \upsilon \nu u)' = -\eta \mu u \cdot u'$ |
| $(\varepsilon \varphi u)' = \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2 u} \cdot u'$ | $(\sigma \varphi u)' = -\frac{1}{\eta \mu^2 u} \cdot u'$ | $(\ln  u )' = \frac{1}{u} \cdot u'$               |

## Ορισμός

Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του  $y$  ως προς  $x$  στο σημείο  $x_0$ ;

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη  $x, y$  συνδέονται με τη σχέση  $y = f(x)$ , όταν η  $f$  είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του  $y$  ως προς  $x$  στο σημείο  $x_0$**  την παράγωγο  $f'(x_0)$ .

- Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης  $S$  ενός κινητού ως προς το χρόνο  $t$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ , είναι η στιγμιαία ταχύτητά του  $v$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ . Δηλαδή:

$$v(t_0) = S'(t_0).$$

- Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας  $v$  ως προς το χρόνο  $t$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ , είναι η επιτάχυνση  $a$  του κινητού τη χρονική στιγμή  $t_0$ . Δηλαδή:

$$a(t_0) = v'(t_0) = S''(t_0).$$

- Στην οικονομία, το κόστος παραγωγής  $K$ , η είσπραξη  $E$  και το κέρδος  $P$  εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας  $x$  του παραγόμενου προϊόντος. Έτσι, η παράγωγος  $K'(x_0)$  παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους  $K$  ως προς την ποσότητα  $x$ , όταν  $x = x_0$  και λέγεται **οριακό κόστος στο  $x_0$** . Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες **οριακή είσπραξη στο  $x_0$**  και **οριακό κέρδος στο  $x_0$** .

## Θεώρημα

Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle.

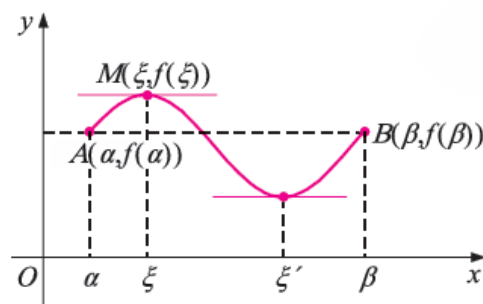
Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$  και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε:  $f'(\xi) = 0$ .

### Γεωμετρική ερμηνεία:

Αν μία συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $M(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .



## Θεώρημα

Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.).

Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι:

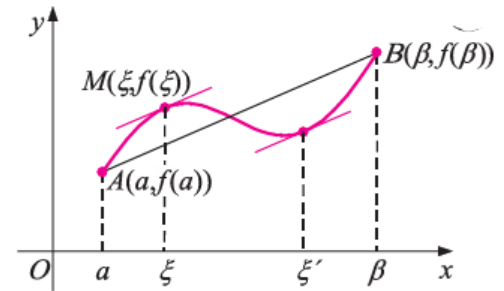
- συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

### Γεωμετρική ερμηνεία:

Αν μία συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ., τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $M(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη της ευθείας  $AB$ , όπου  $A(\alpha, f(\alpha))$  και  $B(\beta, f(\beta))$ .



### Θεώρημα (Συνέπειες Θ.Μ.Τ.)

Έστω μία συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $\Delta$  και  $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

### Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  ισχύει  $f(x_1) = f(x_2)$ . Πράγματι:

- Αν  $x_1 = x_2$ , τότε προφανώς  $f(x_1) = f(x_2)$ .
- Αν  $x_1 < x_2$ , τότε στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  η  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής. Επομένως, υπάρχει  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Επειδή το  $\xi$  είναι εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , ισχύει  $f'(\xi) = 0$ , οπότε, λόγω της (1), είναι  $f(x_1) = f(x_2)$ .

- Αν  $x_1 > x_2$ , τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι  $f(x_1) = f(x_2)$ .

Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι  $f(x_1) = f(x_2)$ . Άρα η  $f$  είναι σταθερή στο  $\Delta$ .

### Πόρισμα

Έστω δύο συναρτήσεις  $f, g$  ορισμένες σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν οι  $f, g$  είναι συνεχείς στο διάστημα  $\Delta$  και  $f'(x) = g'(x)$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε υπάρχει σταθερά  $c$  τέτοια, ώστε για κάθε  $x \in \Delta$  να ισχύει:  $f(x) = g(x) + c$ .

## Απόδειξη

Η συνάρτηση  $f - g$  είναι συνεχής στο διάστημα  $\Delta$  και για κάθε εσωτερικό σημείο  $x \in \Delta$  ισχύει:

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση  $f - g$  είναι σταθερή στο  $\Delta$ . Άρα, υπάρχει σταθερά  $c$  τέτοια, ώστε για κάθε  $x \in \Delta$  να ισχύει:

$$f(x) - g(x) = c, \quad \text{οπότε } f(x) = g(x) + c.$$

- Το παραπάνω θεώρημα καθώς και το πόρισμά του ισχύουν σε διάστημα και **όχι σε ένωση διαστημάτων**. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι, αν και  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , εντούτοις η  $f$  δεν είναι σταθερή στο  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .

- Αν  $f'(x) = f(x)$  για κάθε  $x$  σ' ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε υπάρχει σταθερά  $c$  τέτοια, ώστε:  $f(x) = ce^x$  για κάθε  $x \in \Delta$ .

## Θεώρημα (Μονοτονία Συνάρτησης)

Έστω μία συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

- Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .
- Αν  $f'(x) < 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το  $\Delta$ .

## Απόδειξη

Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι  $f'(x) > 0$ .

Έστω  $x_1, x_2 \in \Delta$ , με  $x_1 < x_2$ . Θα δείξουμε ότι  $f(x_1) < f(x_2)$ . Πράγματι, στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  η  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

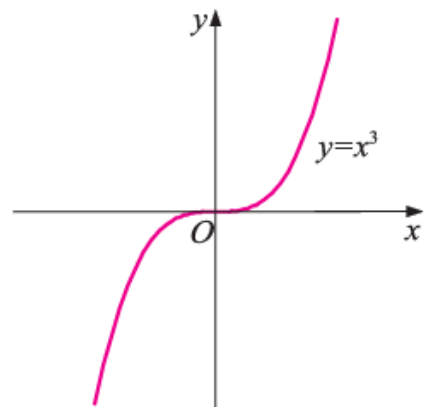
οπότε έχουμε:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή  $f'(\xi) > 0$  και  $x_2 - x_1 > 0$  έχουμε  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ , οπότε  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει**. Δηλαδή, αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ , η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

Για παράδειγμα η συνάρτηση  $f(x) = x^3$ , αν και είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , εντούτοις έχει παράγωγο  $f'(x) = 3x^2$  η οποία δεν είναι θετική σε όλο το  $\mathbb{R}$ , αφού  $f'(0) = 0$ . Ισχύει όμως  $f'(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .



## Ορισμός

Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$ . Πότε θα λέμε:

- ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  **τοπικό μέγιστο**;
- ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  **τοπικό μέγιστο**;

Μια συνάρτηση  $f$ , με πεδίο ορισμού  $A$ , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει  $\delta > 0$ , τέτοιο, ώστε:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Το  $x_0$  λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το  $f(x_0)$  τοπικό μέγιστο της  $f$ .

Αν η ανισότητα  $f(x) \leq f(x_0)$  ισχύει για κάθε  $x \in A$ , τότε η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  **ολικό μέγιστο** ή απλά μέγιστο, το  $f(x_0)$ .

Μια συνάρτηση  $f$ , με πεδίο ορισμού  $A$ , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει  $\delta > 0$ , τέτοιο, ώστε:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Το  $x_0$  λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το  $f(x_0)$  τοπικό ελάχιστο της  $f$ .

Αν η ανισότητα  $f(x) \geq f(x_0)$  ισχύει για κάθε  $x \in A$ , τότε η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  **ολικό ελάχιστο** ή απλά ελάχιστο, το  $f(x_0)$ .

- Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της  $f$  λέγονται **τοπικά ακρότατα** ή, απλά, ακρότατα αυτής, ενώ τα σημεία στα οποία η  $f$  παρουσιάζει τοπικά ακρότατα λέγονται **θέσεις τοπικών ακροτάτων**. Το μέγιστο και το ελάχιστο της  $f$  λέγονται ολικά ακρότατα αυτής.
- Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.
- Αν μία συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα. Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Επίσης, το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης.

Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα Fermat.

### Θεώρημα

Έστω μία συνάρτηση  $f$  ορισμένη σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

### Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0$  τοπικό μέγιστο. Επειδή το  $x_0$  είναι εσωτερικό σημείο του  $\Delta$  και η  $f$  παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο, ώστε:

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$$

και

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \text{για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \quad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , ισχύει:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Επομένως,

- Αν  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ , τότε, λόγω της (1), θα είναι  $f(x) - f(x_0) \leq 0$ , οπότε  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ , άρα:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

- Αν  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , τότε, λόγω της (1), θα είναι  $f(x) - f(x_0) \leq 0$ , οπότε  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ , άρα:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε  $f'(x_0) = 0$ .

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

**Γεωμετρική Ερμηνεία:** Αν μία συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σ' ένα εσωτερικό σημείο  $x_0$  ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της και επιπλέον είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε στο  $A(x_0, f(x_0))$  η εφαπτομένη της  $C_f$  είναι οριζόντια.

Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης  $f$  σ' ένα διάστημα  $\Delta$  είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του  $\Delta$  στα οποία η παράγωγος της  $f$  μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του  $\Delta$  στα οποία η  $f$  δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του  $\Delta$  (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Τα εσωτερικά σημεία του  $\Delta$  στα οποία η  $f$  δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της  $f$  στο διάστημα  $\Delta$ .

### Θεώρημα (Κριτήριο τοπικών ακροτάτων)

Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής.

1. Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$ .
2. Αν  $f'(x) < 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  ανδ  $f'(x) > 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  είναι τοπικό ελάχιστο της  $f$ .
3. Αν η  $f'(x)$  διατηρεί πρόσημο στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο και η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$ .

### Απόδειξη

1. Επειδή  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, x_0)$  και η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(\alpha, x_0]$ . Έτσι έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \text{για κάθε } x \in (\alpha, x_0]. \quad (1)$$

Επειδή  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (x_0, \beta)$  και η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[x_0, \beta)$ . Έτσι έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \text{για κάθε } x \in [x_0, \beta). \quad (2)$$

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \text{για κάθε } x \in (\alpha, \beta)$$

που σημαίνει ότι το  $f(x_0)$  είναι μέγιστο της  $f$  στο  $(\alpha, \beta)$  και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

3. Έστω ότι  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ . Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  θα είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα  $(\alpha, x_0]$  και  $[x_0, \beta)$ . Επομένως,

$$\text{για } x_1 < x_0 < x_2 \text{ ισχύει } f(x_1) < f(x_0) < f(x_2).$$

Άρα το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο της  $f$ .

Θα δείξουμε τώρα, ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(\alpha, \beta)$ . Πράγματι, έστω  $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ , με  $x_1 < x_2$ .

- Αν  $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$ , επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(\alpha, x_0]$ , θα ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$ .
- Αν  $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$ , επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[x_0, \beta)$ , θα ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$ .
- Τέλος, αν  $x_1 < x_0 < x_2$ , τότε όπως είδαμε  $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ .

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$ , οπότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(\alpha, \beta)$ .

Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , για την εύρεση του ολικού μεγίστου και ελαχίστου εργαζόμαστε ως εξής:

1. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της  $f$ .
2. Υπολογίζουμε τις τιμές της  $f$  στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.
3. Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της  $f$ .

### Χρήσιμες σχέσεις:

- $e^x \geq x + 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , με την ισότητα να ισχύει μόνο για  $x = 0$ .
- $\ln x \leq x - 1$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ , με την ισότητα να ισχύει μόνο για  $x = 1$ .

### Ορισμός

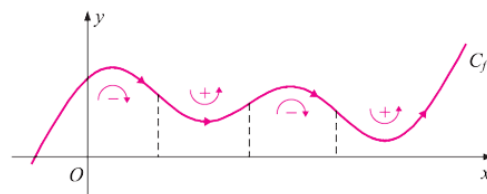
Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή και πότε κοίλη σ' ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της:

Έστω μία συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι **κυρτή** στο  $\Delta$ , αν η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του  $\Delta$ .
- Η συνάρτηση  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι **κοίλη** στο  $\Delta$ , αν η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

Εποπτικά, μία συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σε ένα διάστημα  $\Delta$ , όταν ένα κινητό, που κινείται πάνω στη  $C_f$ , για να διαγράψει τόξο που αντιστοιχίζει στο διάστημα  $\Delta$  πρέπει να στραφεί κατά τη θετική (αντιστοίχως αρνητική) φορά.

Αν μία συνάρτηση είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η εφαπτομένη της  $C_f$  σε κάθε σημείο του  $\Delta$  βρίσκεται «κάτω» (αντιστοίχως «πάνω») από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.



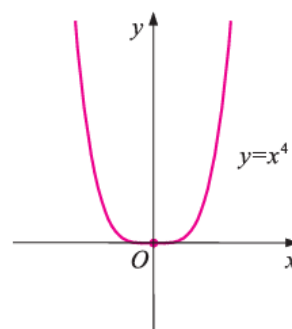
### Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

- Αν  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ .
- Αν  $f''(x) < 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι κοίλη στο  $\Delta$ .

Το αντίστροφο του θεωρήματος **δεν** ισχύει.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση  $f(x) = x^4$ , επειδή η  $f'(x) = 4x^3$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ . Εντούτοις, η  $f''(x) = 12x^2$  δεν είναι θετική σε όλο το  $\mathbb{R}$ , αφού  $f''(0) = 0$ .



### Ορισμός

Τι ονομάζουμε σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$ ;

Έστω μία συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$  με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ . Αν:

- η  $f$  είναι κυρτή στο  $(\alpha, x_0)$  και κοίλη στο  $(x_0, \beta)$ , ή αντιστρόφως, και
- η  $C_f$  έχει εφαπτομένη στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$ ,

τότε το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  ονομάζεται **σημείο καμψής** της γραφικής παράστασης της  $f$ .

Όταν το  $A(x_0, f(x_0))$  είναι σημείο καμψής της  $C_f$ , τότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0$  καμπή και το  $x_0$  λέγεται θέση σημείου καμψής. **Στα σημεία καμψής η εφαπτομένη της  $C_f$  «διαπερνά» την καμπύλη.**

### Θεώρημα

**Αν το  $A(x_0, f(x_0))$  είναι σημείο καμψής της  $C_f$  και η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε  $f''(x_0) = 0$ .**

Οι πιθανές θέσεις σημείων καμψής μιας συνάρτησης  $f$  σ' ένα διάστημα  $\Delta$  είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του  $\Delta$  στα οποία η  $f''$  μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του  $\Delta$  στα οποία δεν υπάρχει η  $f''$ .

Έστω μία συνάρτηση  $f$  ορισμένη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$  και  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ . Αν η  $f''$  αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του  $x_0$  και ορίζεται εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $A(x_0, f(x_0))$ , τότε το  $A(x_0, f(x_0))$  είναι σημείο καμψής.

### Ορισμός

**Πότε η ευθεία  $x = x_0$  λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ ;**

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  είναι  $+\infty$  ή  $-\infty$ , τότε η ευθεία  $x = x_0$  λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

### Ορισμός

**Πότε η ευθεία  $y = \ell$  λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$  (αντίστοιχα στο  $-\infty$ );**

Αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  (αντιστοίχως  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ ), τότε η ευθεία  $y = \ell$  λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$  (αντιστοίχως στο  $-\infty$ ).

### Ορισμός

**Πότε η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$  (ή στο  $-\infty$ ).**

Η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ , αντιστοίχως στο  $-\infty$ , αν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$$

Η ασύμπτωτη  $y = \lambda x + \beta$  είναι οριζόντια αν  $\lambda = 0$ , ενώ αν  $\lambda \neq 0$  λέγεται **πλάγια ασύμπτωτη**.

### Θεώρημα

Η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ , αντιστοίχως στο  $-\infty$ , αν και μόνο αν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$$

- Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.
- Οι ρητές συναρτήσεις  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , με βαθμό του αριθμητή  $P(x)$  μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

**Ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$  αναζητούμε:**

1. Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού στα οποία η  $f$  δεν ορίζεται.
2. Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η  $f$  δεν είναι συνεχής.
3. Στα  $+\infty$ ,  $-\infty$ , εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής  $(\alpha, +\infty)$ , αντιστοίχως  $(-\infty, \beta)$ .

### Θεώρημα

**Κανόνες de l' Hospital:**

- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  και υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ ,  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  και υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Το θεώρημα ισχύει και για τις μορφές  $\frac{+\infty}{-\infty}$ ,  $\frac{-\infty}{+\infty}$ ,  $\frac{-\infty}{-\infty}$ .
- Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για τα πλευρικά όρια και μπορούμε, αν χρειάζεται, να τα εφαρμόσουμε περισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

## Κεφάλαιο 3 - Ολοκληρωτικός Λογισμός

### Ορισμός

Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$ ;

Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$  ονομάζεται κάθε συνάρτηση  $F$  που είναι παραγωγίσιμη στο  $\Delta$  και ισχύει:

$$F'(x) = f(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

### Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής  $G(x) = F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\Delta$  και
- κάθε άλλη παράγουσα  $G$  της  $f$  στο  $\Delta$  παίρνει τη μορφή  $G(x) = F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

### Απόδειξη

- Κάθε συνάρτηση της μορφής  $G(x) = F(x) + c$ , όπου  $c \in \mathbb{R}$ , είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , αφού:

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

- Έστω  $G$  είναι μια άλλη παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ . Τότε για κάθε  $x \in \Delta$  ισχύουν  $F'(x) = f(x)$  και  $G'(x) = f(x)$ , οπότε:

$$G'(x) = F'(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα των συνεπειών του Θ.Μ.Τ., υπάρχει σταθερά  $c$  τέτοια, ώστε:

$$G(x) = F(x) + c, \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

- Αν οι συναρτήσεις  $F$  και  $G$  είναι παράγουσες των  $f$  και  $g$  αντιστοίχως και ο  $\lambda$  είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε:

1. Η συνάρτηση  $F + G$  είναι μία παράγουσα της συνάρτησης  $f + g$  και
2. Η συνάρτηση  $\lambda F$  είναι μία παράγουσα της συνάρτησης  $\lambda f$ .

## Πίνακας των παραγουσών βασικών συναρτήσεων

| Συνάρτηση                   | Παράγουσες                                                         |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| $f(x) = 0$                  | $G(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}$                                 |
| $f(x) = 1$                  | $G(x) = x + c, \quad c \in \mathbb{R}$                             |
| $f(x) = \frac{1}{x}$        | $G(x) = \ln  x  + c, \quad c \in \mathbb{R}$                       |
| $f(x) = x^\alpha$           | $G(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$ |
| $f(x) = \sin x$             | $G(x) = -\cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}$                       |
| $f(x) = \cos x$             | $G(x) = \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}$                        |
| $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ | $G(x) = -\cot x + c, \quad c \in \mathbb{R}$                       |
| $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $G(x) = \tan x + c, \quad c \in \mathbb{R}$                        |
| $f(x) = e^x$                | $G(x) = e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}$                           |
| $f(x) = a^x$                | $G(x) = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad c \in \mathbb{R}$             |

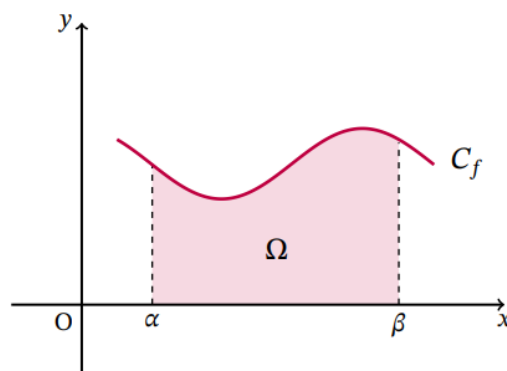
Οι τύποι του παραπάνω πίνακα ισχύουν σε κάθε διάστημα που οι παραστάσεις του  $x$  που εμφανίζονται έχουν νόημα.

**Εμβαδό χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$ .**

Έστω συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , με  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ .

Αν  $\Omega$  είναι το χωρίο μεταξύ της  $C_f$ , του άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$ , τότε, για να ορίσουμε το εμβαδό του  $\Omega$ , εργαζόμαστε ως εξής:

- Χωρίζουμε το διάστημα  $[\alpha, \beta]$  σε  $\nu$  ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους  $\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{\nu}$ , με τα σημεία  $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_\nu = \beta$ .



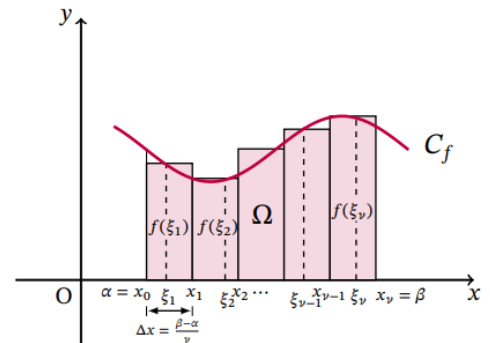
- Σε κάθε υποδιάστημα  $[x_{\kappa-1}, x_{\kappa}]$  επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο  $\xi_{\kappa}$  και σχηματίζουμε τα γινόμενα  $f(\xi_{\kappa}) \cdot \Delta x$ , που παριστάνουν τα εμβαδά των αντίστοιχων ορθογωνίων.
- Σχηματίζουμε το άθροισμα των εμβαδών αυτών (άθροισμα Riemann):

$$S_{\nu} = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_{\nu})\Delta x = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_{\kappa})\Delta x$$

- Αποδεικνύεται ότι το όριο του αθροίσματος αυτού καθώς το  $\nu \rightarrow +\infty$  υπάρχει στο  $\mathbb{R}$  και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων  $\xi_{\kappa}$ . Το όριο αυτό ονομάζεται **εμβαδό του χωρίου  $\Omega$**  και συμβολίζεται με  $E(\Omega)$ , δηλαδή:

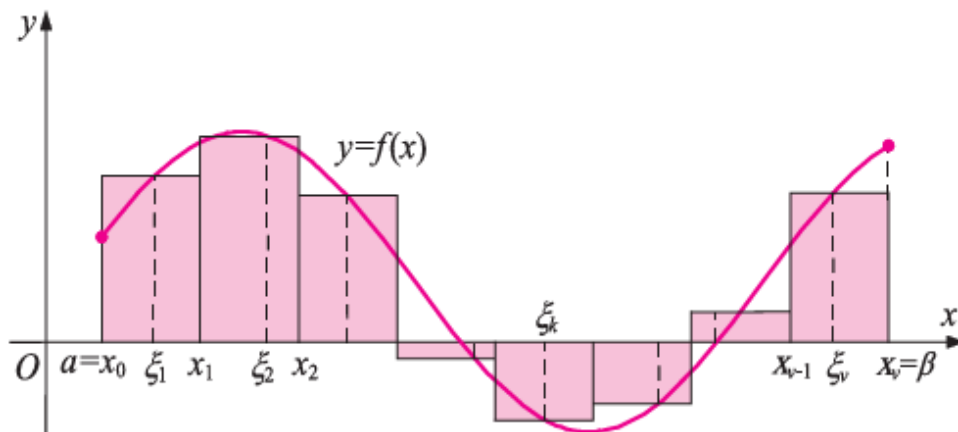
$$E(\Omega) = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_{\kappa})\Delta x$$

Είναι φανερό ότι  $E(\Omega) \geq 0$ .



### Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος.

Έστω συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Με τα σημεία  $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{\nu} = \beta$  χωρίζουμε το διάστημα  $[\alpha, \beta]$  σε  $\nu$  ισομήκη υποδιαστήματα μήκους  $\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{\nu}$ .



Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα  $\xi_{\kappa} \in [x_{\kappa-1}, x_{\kappa}]$ , για κάθε  $\kappa \in \{1, 2, \dots, \nu\}$ , και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_{\nu} = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_{\kappa})\Delta x + \cdots + f(\xi_{\nu})\Delta x$$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής:

$$S_{\nu} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_{\kappa})\Delta x \quad (\text{άθροισμα Riemann})$$

Αποδεικνύεται ότι, το  $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \left( \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_{\kappa})\Delta x \right)$  υπάρχει στο  $\mathbb{R}$  και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων  $\xi_{\kappa}$ .

Το παραπάνω όριο ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης  $f$  από το  $\alpha$  στο  $\beta$ , συμβολίζεται με  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  και διαβάζεται 'ολοκλήρωμα της  $f$  από το  $\alpha$  στο  $\beta$ '. Δηλαδή:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \left( \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_{\kappa}) \Delta x \right)$$

- Οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  ονομάζονται **όρια** της ολοκλήρωσης.
- Στην έκφραση  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  το γράμμα  $x$  είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα. Έτσι, για παράδειγμα, οι εκφράσεις  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ ,  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$  συμβολίζουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα και είναι πραγματικός αριθμός.

Επεκτείνοντας τον παραπάνω ορισμό και για τις περιπτώσεις που είναι  $\alpha > \beta$  ή  $\alpha = \beta$ , έχουμε τα εξής:

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$
- $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$

Αν  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε το ολοκλήρωμα  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  δίνει το εμβαδόν  $E(\Omega)$  του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'$  και τις ευθείες  $x = \alpha$  και  $x = \beta$ . Δηλαδή,

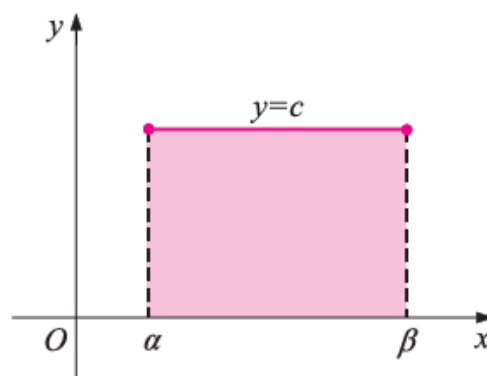
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = E(\Omega).$$

Επομένως,

$$\text{Αν } f(x) \geq 0, \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0.$$

- **Ισχύει ότι:**  $\int_{\alpha}^{\beta} c dx = c(\beta - \alpha)$ , για οποιοδήποτε  $c \in \mathbb{R}$ .

- Αν  $c > 0$ , τότε το  $\int_{\alpha}^{\beta} c dx$  εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση  $\beta - \alpha$  και ύψος  $c$ .



**Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.**

### Θεώρημα

Έστω  $f, g$  συνεχείς συναρτήσεις στο  $[\alpha, \beta]$  και  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Τότε ισχύουν

- $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) + g(x)] dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$

και γενικά

- $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$

### Θεώρημα

Αν η  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ , τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

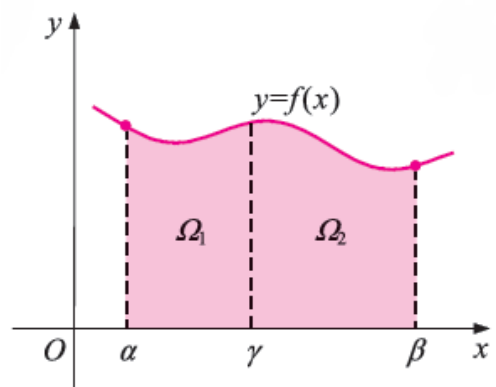
Αν  $f(x) \geq 0$  και  $\alpha < \gamma < \beta$ , η παραπάνω ιδιότητα δηλώνει ότι:

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$$

αφού

$$E(\Omega_1) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx, \quad E(\Omega_2) = \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

και  $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ .



### Θεώρημα

Έστω  $f$  συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$  και η συνάρτηση  $f$  δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0.$$

Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

### Θεώρημα

Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

## Απόδειξη

Γνωρίζουμε πως η συνάρτηση  $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ . Επειδή και η  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , θα υπάρχει  $c \in \mathbb{R}$  τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c \quad (1)$$

Από την (1), για  $x = \alpha$ , έχουμε  $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t) dt + c = c$ , οπότε  $c = G(\alpha)$ .

Επομένως,

$$G(x) = F(x) + G(\alpha),$$

οπότε, για  $x = \beta$ , έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt + G(\alpha)$$

και άρα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Συμβολίζουμε τη διαφορά  $G(\beta) - G(\alpha)$  και ως  $[G(x)]_{\alpha}^{\beta}$ , οπότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = [G(x)]_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha)$$

## Μέθοδοι ολοκλήρωσης

- Ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x) dx,$$

όπου  $f', g'$  συνεχείς συναρτήσεις στο  $[\alpha, \beta]$ .

- Ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u) du,$$

όπου  $f, g'$  συνεχείς συναρτήσεις,  $u = g(x)$ ,  $du = g'(x)dx$  και  $u_1 = g(\alpha)$ ,  $u_2 = g(\beta)$ .

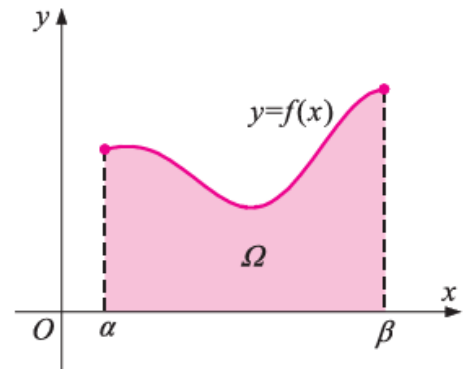
### Εμβαδόν επίπεδου χωρίου.

Έστω συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , με

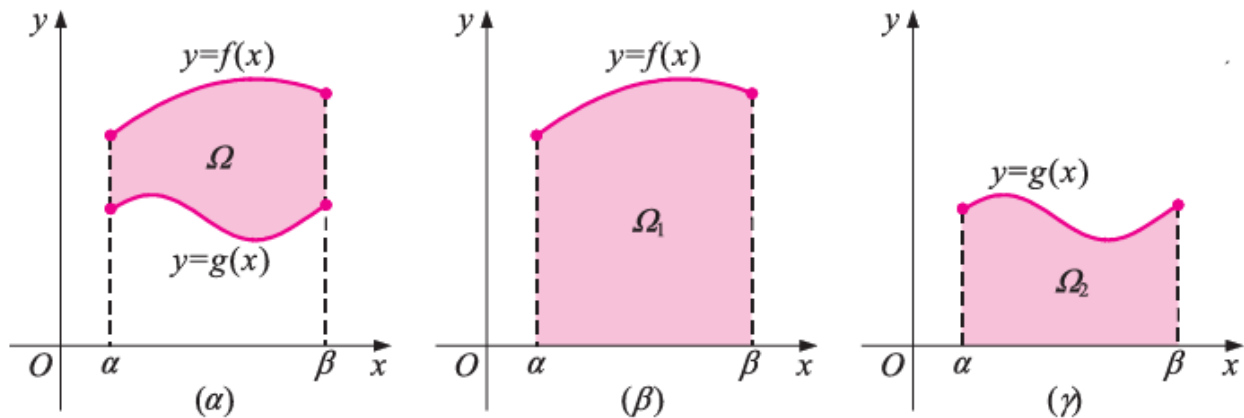
$$f(x) \geq 0 \quad \text{για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

Το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που ορίζεται από τη  $C_f$ , τον άξονα  $x$  και τις ευθείες  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$ , είναι:

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$



Έστω δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$ , συνεχείς στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , με  $f(x) \geq g(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$  και  $\Omega$  το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των  $f, g$  και τις ευθείες  $x = \alpha$  και  $x = \beta$ .



Παρατηρούμε ότι:

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$$

Επομένως,

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$$

Γενικεύοντας το παραπάνω, αν  $f$  και  $g$  συνεχείς στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , με  $f(x) \geq g(x)$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$  και  $\Omega$  το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των  $f, g$  και τις ευθείες  $x = \alpha$  και  $x = \beta$ , τότε θα υπάρχει αριθμός  $c \in \mathbb{R}$  τέτοιος, ώστε  $f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ . Επομένως,

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} [(f(x) + c) - (g(x) + c)] dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx.$$

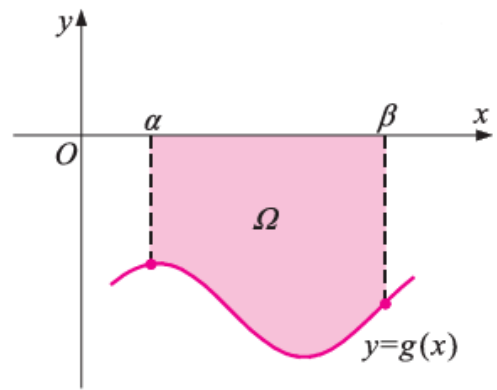
Άρα,

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$$

Με τη βοήθεια του προηγούμενου τύπου μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τον άξονα  $x'x$ , τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $g$ , με  $g(x) \leq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$  και τις ευθείες  $x = \alpha$  και  $x = \beta$ .

Πράγματι, επειδή ο άξονας  $x'x$  είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = 0$ , έχουμε

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [-g(x)] dx = - \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx. \end{aligned}$$



Επομένως, αν για μια συνάρτηση  $g$  ισχύει  $g(x) \leq 0$  για κάθε  $[\alpha, \beta]$ , τότε:

$$E(\Omega) = - \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

Όταν η διαφορά  $f(x) - g(x)$  δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των  $f, g$  και τις ευθείες  $x = \alpha$  και  $x = \beta$  είναι:

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx$$

- Σύμφωνα με τα παραπάνω, το  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα  $x'x$  μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα  $x'x$ .

# Συμπληρωματικές Προτάσεις

Οι παρακάτω προτάσεις **δεν** αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο, ωστόσο οι μαθητές μπορούν να τις χρησιμοποιούν στην επίλυση ασκήσεων, δίχως να χρειάζεται να τις αποδείξουν.

- Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  ισχύει η συνεπαγωγή:

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2.$$

- Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  ισχύει η συνεπαγωγή:

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2.$$

- Αν είναι  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$$

- Αν είναι  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$  τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

Αν μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\sigma_1, \sigma_2)$  έχει την ιδιότητα:

$$\lim_{x \rightarrow \sigma_1} f(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \sigma_2} f(x) = +\infty$$

(ή το αντίστροφο), τότε το σύνολο τιμών της είναι το  $\mathbb{R}$ .

Έστω  $f$  και  $g$  δύο συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ .

- Αν  $f(x) \geq g(x)$ , για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx.$$

- Αν, επιπλέον, οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  δεν είναι ίσες στο  $[\alpha, \beta]$  (δηλαδή, αν υπάρχει  $\xi \in [\alpha, \beta]$ , με  $f(\xi) \neq g(\xi)$ ), τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx.$$

- Αν  $f'(x) = f(x)$  για κάθε  $x$  σ' ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε υπάρχει σταθερά  $c$  τέτοια, ώστε:

$$f(x) = c e^x \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

- Ισχύει ότι:

$$e^x \geq x + 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για  $x = 0$ .

- Επιπλέον, είναι:

$$\ln x \leq x - 1 \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty),$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για  $x = 1$ .