ΝΤΟΥΛΑΣ Κ.
9/5/2025

ΘΕΜΑ Α

Α1.Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως ,τότε να δώσετε τον ορισμό της σύνθεσης της f με την g ,δηλαδή να γράψετε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της.

(3 μονάδες)

Α2. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο διάστημα Δ και για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο του Δ ισχύει $f'(x) = 0$ Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

(8 μονάδες)

Α3. Να διατυπώσετε το **θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.**

(4 μονάδες)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

(10 μονάδες)

α) Οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 + 1}$ και $g(x) = x$ είναι ίσες.

β) Αν $\alpha > 1$ ισχύει η ισότητα $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_\alpha x = 0$.

γ) Η συνάρτηση $f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύουν:
Είναι συνεχής στο (α, β) και επιπλέον $f(\alpha)f(\beta) < 0$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = 0$.

δ) Τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης δεν είναι πάντα θέσεις ακρότατων.

ε) Ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για το ορισμένο ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$,όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha}, \alpha \in R^*, x \neq -\alpha$.

Β1. Να βρείτε την τιμή του α, για την οποία η κλίση της f στο $x_0 = 0$ ισούται με $\dfrac{1}{2}$.

(5 μονάδες)

Υποθέτουμε ότι $f(x) = \dfrac{2x + 2}{x + 2}, x \neq -2$.

Β2. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f για $x = -3$ **(3 μονάδες)** και στη συνέχεια την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο της $B(-3, f(-3))$.

(6 μονάδες)

Β3. Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της f ,εφόσον υπάρχει.

(8 μονάδες)

Β4. Ένα κινητό $M(x, y), x \geq -1$ ξεκινά από το σημείο $M_1(-1, 0)$ και κινείται κατά μήκος της C_f ,ώστε $x'(t) > 0$.Να βρείτε σε ποιο σημείο ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ.

(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται πολυωνυμική συνάρτηση f για την οποία ισχύουν

(α) $f''(x) = 2$ για κάθε $x \in R$.

(β) $x = 1$ κρίσιμο σημείο της f.

(γ) Η εφαπτόμενη της C_f στο $x_1 = -1$ διέρχεται από το σημείο $\Sigma(0, -1)$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 - 2x$, $x \in R$ και να εξετάσετε αν η f είναι αντιστρέψιμη.

(7 μονάδες)

Δίνεται επιπλέον συνεχής στο R συνάρτηση g, με $g(\sqrt{2}) = 3$, ώστε η σύνθεση της g με την f να ισούται με $x^2 + 1$, για κάθε $x \in R$.

Γ2. Να δείξετε ότι $g(x) = 1 + \sqrt{x^2 + 2}$, $x \in R$.

(7 μονάδες)

Γ3. Να βρείτε το όριο $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[(\sigma\upsilon\nu x + g(x)) \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right]$.

(5 μονάδες)

Γ4. Αν G είναι αρχική συνάρτηση της g στο R, να λύσετε την ανίσωση

$G(x^2 - 3) - G(2x) > 2(x^2 - 3) - 4x$.

(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3^x + x^2 - 3x - 1$, $x \in R$.

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή και να λύσετε την ανίσωση

$9^x \ln 3 < 3(\ln 27 + 4 - 4x)$.

(5 μονάδες)

Δ2. Να βρείτε ακέραιο α ώστε να υπάρχει σημείο, έστω x_0, του διαστήματος $(\alpha, \alpha + 1)$ το οποίο να είναι κρίσιμο σημείο της f. Στη συνέχεια να δείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι ολικό ελάχιστο με $f(x_0) < 0$.

(7 μονάδες)

Στα επόμενα ερωτήματα θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 3^x + x^2$, $x \in R$.

Δ3. Να δείξετε ότι η ευθεία (ε): $y = 3x + 1$ έχει με το διάγραμμα της συνάρτησης g ακριβώς δύο κοινά σημεία τα $A(0,1)$, $B(1,4)$.

(5 μονάδες)

Δ4. Να δείξετε ότι $\int_0^1 \left(g(x) \cdot \sqrt{\frac{3}{2}x^2 + x} \right) dx < \sqrt{7}$.

(8 μονάδες)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ