



Διαγώνισμα Προσομοίωσης

2^ο

Εκφωνήσεις

ΘΕΜΑ Α

- A.1** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

Μονάδες 6

- A.2** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά

Μονάδες 2+3=5

- A.3** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι Αληθής, η το γράμμα Ψ, αν είναι Ψευδής.

Μονάδα 1

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με την χρήση θεωρίας ή αντιπαραδείγματος.

Μονάδες 3

- A.4** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, η Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.



ΓΕΛ

Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού

2/3/2025

- i. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει ότι: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(x_0)$
- ii. Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$, είναι παραγωγίσιμη στο $R_2 = \mathbb{R} - \{x | \sin x = 0\}$ και ισχύει ότι $f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$
- iii. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ με $f(a) < f(\beta)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_0) < 0$
- iv. Οι ρητές συναρτήσεις με μορφή $\frac{P(x)}{Q(x)}$ δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες
- v. Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και παρουσιάζει σημείο καμπής στο $K(x_0, f(x_0))$, τότε: $f''(x_0) = 0$

Μονάδες 2x5 = 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{ax^2 + \beta x + 1}{x}$, η οποία έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την διχοτόμο πρώτου και τρίτου τεταρτημόριου.

B.1 Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 0$

Μονάδες 4

B.2 Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, την κυρτότητα τα ακρότατα αν υπάρχουν, καθώς και τα σημεία καμπής

Μονάδες 8

B.3 Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να λύσετε την εξίσωση $x^2 - ax + 1 = 0$ με $x \neq 0$, για τις διαφορετικές τιμές του a .

Μονάδες 7



B.4 Να βρείτε τις υπόλοιπες ασύμπτωτες της f , να την εξετάσετε ως προς τη συμμετρία και να την σχεδιάσετε με στυλό στο τετράδιο σας.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν :

$$f(2) = 0, f'(2) = 1 \text{ και } (x-1)^2 f''(x) + 1 = 0 \text{ για κάθε } x > 1$$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(x-1)$, $x > 1$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι:

i. Η f είναι γνησίως αύξουσα

ii. Ισχύει $\ln(2^{|x|} + 5) \geq \ln(\sin^2 x + 5)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Μονάδες 2+5=7

Γ3. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο $A(0, -2)$.

Μονάδες 6

Γ4. Ένα κινητό M ξεκινάει από το σημείο $B(2, 0)$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x \geq 2$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του M είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του, αν υποτεθεί ότι $x'(t) > 0$, για κάθε $t \geq 0$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1) - \alpha^x + 2$, με $x > -1$, $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$

Δ.1 Αν κανένα σημείο της γραφικής παράστασης της f δεν βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = 1$, να δείξετε ότι $\alpha = e$.



Μονάδες 6

Δ.2 α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατά της

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\ln\left(\frac{\eta\mu x+1}{x+1}\right) + e^x \leq e^{\eta\mu x}$ στο διάστημα $[0, \pi]$.

Μονάδες 3+5=8

Δ.3 α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ετερόσημες ρίζες x_1 και x_2 , με $x_1 < x_2$.

β) Αν F μια αρχική της f , να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της F , δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο $(-1, 0]$ και ότι ισχύει $F(x) \geq F(x_1)$ για κάθε $x \in (-1, 0]$.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, x_2)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$.

Μονάδες 3+4+4=11

Να έχετε επιτυχία!!!