



## 1<sup>ο</sup> Διαγώνισμα Προσομοίωσης

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να δειχθεί ότι μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό

διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και ισχύουν :

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει ένας, τουλάχιστον

$x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιος, ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

**Μονάδες 6**

**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

**Μονάδες 4**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις

i.  $\lim_{x \rightarrow 6} [f(x)g(x)] = f(6)g(6)$

ii. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$  τότε  $f(x) > 0$  για κάθε πραγματικό  $x$

iii. Οι συναρτήσεις  $f(x) = 2\ln x$  και  $g(x) = \ln x^2$  είναι ίσες

iv. Αν  $f$  και  $g$  είναι δυο συναρτήσεις με πεδία ορισμού  $A, B$  αντίστοιχα, τότε η

σύνθεση της  $f$  με τη  $g$ , δηλαδή η συνάρτηση  $g \circ f$ , ορίζεται αν  $f(A) \cap B \neq \emptyset$

v. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και υπάρχει  $x_0$  στο  $(\alpha, \beta)$  με

$$f(x_0) = 0 \quad \text{τότε} \quad f(\alpha)f(\beta) < 0$$

**Μονάδες 3x5 = 15**



## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = 1 + \ln(\sqrt{x-1} + 1)$

**B1.** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της  $f$

Μονάδες 4

**B2.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι "1-1"

Μονάδες 8

**B3.** Να βρεθεί η  $f^{-1}$

Μονάδες 7

**B4.** Να λυθεί η εξίσωση  $f^{-1}(x+1) = 3$

Μονάδες 6

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$  συνεχής για την οποία ισχύουν :

$$f(20) = 1, f(21) = 10 \quad \text{και} \quad \frac{f(f(x))}{f(f(x)+2)} = \frac{f(f(x)+3)}{f(f(x)+1)} \quad (1)$$

**Γ1.** Να δείξετε ότι υπάρχει  $x_1 \in \mathbb{R}$  ώστε  $f(x_1) = 2$  και ότι

$$f(2)f(3) = f(4)f(5)$$

Μονάδες 7

**Γ2.** Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\rho_1 \in [2, 3]$  και ένα  $\rho_2 \in [4, 5]$

τέτοια ώστε:

$$f^2(\rho_1) = f(2)f(3) \quad \text{και} \quad f^2(\rho_2) = f(4)f(5)$$

Μονάδες 6

**Γ3.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν είναι "1-1"

Μονάδες 6

**Γ4.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνήσια αύξουσα στο  $[20, 21]$  και  $x_1, x_2 \in [20, 21]$ ,

να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in [20, 21]$  τέτοιο ώστε:

$$3f(x_0) = f(x_1) + 2f(x_2)$$

Μονάδες 6



## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνεχής συνάρτηση  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $f(x)(f(x) - 2x) = \ln^2(x + 1) - x^2$  για κάθε  $x \in [0, +\infty)$
- Η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(1, 1 + \ln 2)$

**Δ.1** Να δείξετε ότι  $f(x) = x + \ln(x + 1)$  για κάθε  $x \in [0, +\infty)$

**Μονάδες 7**

**Δ.2** Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-f(x) + \frac{e}{3}} - x$

**Μονάδες 3**

**Δ.3** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  και να προσδιορίσετε το πλήθος ριζών της εξίσωσης  $f(x) = a$ , για κάθε  $a \in \mathbb{R}$

**Μονάδες 3+2=5**

Έστω συνάρτηση  $g(x) = e^{x-2} - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**Δ.4** Να δείξετε ότι σύνθεση της  $g$  με την  $f$  είναι η συνάρτηση  $h(x) = e^{x-2} + x - 3$ ,  $x \geq 2$

**Μονάδες 4**

**Δ.5** Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των  $f$  και  $h$  τέμνονται σε σημείο με τετμημένη στο διάστημα  $(2, 5)$

**Μονάδες 6**