

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 5 ΜΑΪΟΥ 2025
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: 4

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln |x|$, $x \in \mathbb{R}^*$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

Μονάδες 6

- A2.** Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

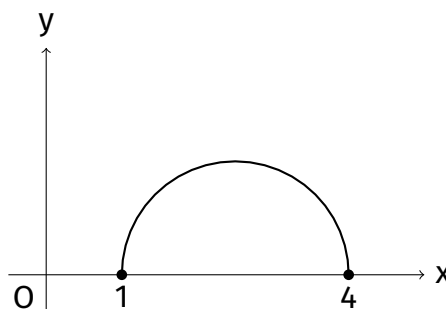
Μονάδες 4

- A3.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle.

Μονάδες 5

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- i. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, η οποία δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές στο $[\alpha, \beta]$.
- ii. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .
- iii. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται από το παρακάτω σχήμα,



τότε υπάρχει $x_0 \in (1, 4)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

- iv. Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = -\infty$.

- ν. Κάθε συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{5x+1}{x-5}$, $x \in \mathbb{R} - \{5\}$.

- B1.** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R} - \{5\}$ (Μονάδες 3) και ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες (Μονάδες 6).

Μονάδες 9

- B2.** Να αποδείξετε ότι $(f \circ f)(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{5\}$.

Μονάδες 4

- B3.** Να εξετάσετε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την f στο διάστημα $[6, 7]$. Εφόσον πληρούνται, να το εφαρμόσετε και να βρείτε όλα τα $\xi \in (6, 7)$ που το επαληθεύουν.

Μονάδες 6

- B4.** Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία $y = 5$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = 1$ και $x = 4$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \ln x}{1-x} & , \text{αν } 0 < x \neq 1 \\ f(1) & , \text{αν } x = 1 \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f(1) + 1)x^3 + 2x^2 - 3}{x^2 + 1} = 2$.

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι $f(1) = -1$.

Μονάδες 4

Για

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \ln x}{1-x} & , \text{αν } 0 < x \neq 1 \\ -1 & , \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 5

Γ3. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = (1-x)^2 + 2x(\ln x + 1 - x)$.

i. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και να βρεθεί το πρόσημό της.

Μονάδες 5

ii. Με τη βοήθεια του (i) και γνωρίζοντας ότι η f' είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 3

Γ4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$\int_1^2 f(x)dx > -\frac{5}{4}$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$g'(x) = \frac{e^x + 1}{e^{g(x)}}, \quad x \geq 0$$

και $g(0) = 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $g(x) = \ln(e^x + x)$, $x \geq 0$.

Μονάδες 3

Αν

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & , \text{αν } x < 0 \\ g(x) & , \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Δ2. i. Να βρεθεί, αν υπάρχει, κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 2

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{e^{g(x)} - g(x)}{x} + \frac{g(x)}{x - 2025} = 0$$

έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(0, 2025)$.

Μονάδες 5

Δ4. Σημείο M με θετική τετμημένη κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της f . Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι 1cm/sec . Αν N η προβολή του M στον άξονα x' και σημείο $A(0, \alpha)$, $\alpha > 0$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου AMN τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τετμημένη του M είναι 2cm .

Μονάδες 5

Δ5. Να λύσετε την εξίσωση

$$f(e^{x^2} - 1) + f(|x| - |\eta\mu x|) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους / τις εξεταζόμενες)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10:00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**