**ΘΕΩΡΙΑ ( 2 ) : ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΝΙΣΤΑΜΕΝΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ (ΣΥΝΘΕΣΗ ΔΥΝΑΜΕΩΝ)–ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΥΝΑΜΗΣ ΣΕ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ**

**Συνισταμένη** , ΣF ή Fολ , δυο ή περισσοτέρων δυνάμεων οι οποίες ενεργούν ταυτόχρονα σε ένα σώμα λέγεται η δύναμη που μπορεί να τις αντικαταστήσει και επιφέρει τα ίδια μηχανικά αποτελέσματα που επιφέρουν όλες μαζί. Τις δυνάμεις F1,F2,.... που αντικαθίστανται από τη συνισταμένη τους τις ονομάζουμε **συνιστώσες** δυνάμεις. Για να βρεθεί η συνισταμένη , οι δυνάμεις πρέπει να έχουν το ίδιο σημείο εφαρμογής . Γ’ αυτό μεταφέρονται όλες οι δυνάμεις από τα πραγματικά σημεία εφαρμογής τους, στο κέντρο μάζας του σώματος.

Οι δυνάμεις διακρίνονται σε

**1.) Συγγραμμικές δυνάμεις:** είναι οι δυνάμεις που οι διευθύνσεις τους είναι στην ίδια ή σε παράλληλες ευθείες.

 F1 F1

 F2

 (σχήμα 1) F2 (σχήμα 2)

Οι συγγραμμικές δυνάμεις διακρίνονται σε

1. **α Ομόρροπες συγγραμμικές δυνάμεις** : Είναι οι συγγραμμικές δυνάμεις που έχουν την ίδια φορά (σχήμα 1)
2. **β Αντίρροπες συγγραμμικές δυνάμεις** : Είναι οι συγγραμμικές δυνάμεις που έχουν αντίθετη φορά (σχήμα 2)

και

**2 .) Μη συγγραμικές δυνάμεις** : είναι οι δυνάμεις που οι διευθύνσεις τους δεν είναι στην ίδια ή σε παράλληλες ευθείες.

F2

F1

* **ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ**

**1) Οι δυνάμεις είναι ομόρροπες και συγγραμμικές**: Η συνισταμένη δύναμη έχει την ίδια κατεύθυνση με τις συνιστώσες και μέτρο ίσο με το άθροισμα των μέτρων των συνιστωσών. **ΣF = F1+F2**

 F1 F2 ΣF

F1

F2

F2

ΣF

Παράδειγμα:

Αν F1 = 5Ν και F2 = 10Ν τότε ΣF= F1 + F2 = 5+10 →ΣF= 15N

 **2)Οι δυνάμεις έχουν αντίθετες κατευθύνσεις( Αντίρροπες συγγραμμικές δυνάμεις** ): η συνισταμένη δύναμη έχει τη φορά της μεγαλύτερης δύναμης και μέτρο ίσο με την διαφορά των μέτρων τους **ΣF= F1-F2 αν (** $F\_{1} >$ $F\_{2}$)

 F2

Παράδειγμα: F2  ΣF F1

 ΣF

Αν F1 = 5Ν και F2 = 10Ν τότε ΣF= F2 – F1 = 10-5 → ΣF= 5N

\*\*\* Αν $F\_{1}$= $F\_{2}$ τότε αυτές λέγονται αντίθετες και $F\_{ολ}$ = 0 F1

**3)Σύνθεση πολλών συγγραμμικών δυνάμεων** : Έστω ότι σε ένα σώμα ασκούνται πολλές συγγραμμικές δυνάμεις . Η συνισταμένη τους έχει την ίδια διεύθυνση με αυτές. Για να βρούμε τη συνισταμένη ακολουθούμε την εξής διαδικασία.

**Βήμα 1ο** : επιλέγουμε τη θετική φορά (μπορούμε να επιλέξουμε ως θετική όποια φορά θέλουμε εμείς ). Έστω : Για τις οριζόντιες δυνάμεις θεωρούμε ως θετική φορά την προς τα δεξιά φορά . Για τις κατακόρυφες δυνάμεις θεωρούμε ως θετική φορά την προς τα πάνω φορά.

**Βήμα 2o** : όσες οριζόντιες δυνάμεις έχουν φορά προς τα δεξιά ( αντίστοιχα όσες κατακόρυφες δυνάμεις έχουν φορά προς τα πάνω ) τις βάζω με πρόσημο ( + ) ενώ όσες οριζόντιες δυνάμεις έχουν φορά προς τα αριστερά ( αντίστοιχα όσες κατακόρυφες δυνάμεις έχουν φορά προς τα κάτω ) τις βάζω με πρόσημο ( - ) .

**Βήμα 3ο** : Για να βρούμε τη συνισταμένη αθροίζουμε αλγεβρικά όλες τις δυνάμεις. $F\_{ολ}=+F\_{1}+F\_{2}+… -F\_{8}-F\_{9}-F\_{10}$

Αν η συνισταμένη των δυνάμεων ΣF έχει πρόσημο (+) την σχεδιάζω προς τα δεξιά (ή αντίστοιχα προς τα πάνω ).

F2

F1

ΣF

Αν η συνισταμένη των δυνάμεων ΣF έχει πρόσημο (-) την σχεδιάζω προς τα αριστερά (ή αντίστοιχα προς τα κάτω ).

 Παράδειγμα : Αν F1 = 5Ν, F2 = 10Ν , F3 = 4Ν , F4 = 8Ν

 ΣF= F1+ F2- F3 - F4 = 5+10- 8 -4 = 15- 12  ΣF= 3N Φορά προς τα δεξιά για το ένα σχήμα και προς τα πάνω

F3

F4

 για το άλλο.

F4

F3

ΣF F1 F2

* **ΣΥΝΘΕΣΗ ΜΗ ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ**

### ΣΥΝΘΕΣΗ ΔΥΟ ΜΗ ΣΥΓΓΡΑΜΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΠΟΥ ΣΧΗΜΑΤΙΖΟΥΝ ΤΥΧΑΙΑ ΓΩΝΙΑ φ

Για να βρούμε την συνισταμένη δυο δυνάμεων που σχηματίζουν γωνία φ χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του

ΣF

παραλληλογράμμου . Η συνισταμένη ΣF συμπίπτει με

φ

F1

τη διαγώνιο του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν οι F1 και F2 . Ισχύει ότι:

$$F\_{ολ}=\sqrt{F1^{2}+F2^{2}+2 F\_{1} F\_{2}συνφ}$$

F2

εφ$\hat{θ}$ = $\frac{F\_{1 ημ φ}}{F\_{2}+ F\_{1 συν φ}}$

θ

 (Δεν θα γίνει χρήση αυτού του τύπου στο φετινό βιβλίο)

Παράδειγμα : Nα βρείτε τη συνισταμένη των δυνάμεων αν F1 =$\sqrt{3} Ν$ , F2  = 2Ν και φ=30ο  .

3  4  4

3 3

2

( 3)2  22  2. 3.2 30

**ΣF=**  ΣF=  ΣF=  ΣF=$\sqrt{13}$ Ν

*F*  *F*  2.*F* .*F* .

2

2

1 2

1 2



εφ$\hat{θ}$ = $\frac{F\_{1 ημ φ}}{F\_{2}+ F\_{1 συν φ}}= \frac{\sqrt{3 · } \frac{1}{2}}{2+\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}}$ = $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2+\frac{3}{2}}$ = $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{7}{2}}$=$\frac{\sqrt{3}}{7}$

 **α) ΔΥΟ ΚΑΘΕΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ** : Όταν οι δυνάμεις σχηματίζουν γωνία 90ο , δηλαδή είναι κάθετες μεταξύ τους , η διεύθυνση σχηματικά βρίσκεται από το κανόνα του παραλληλογράμμου ( από τα άκρα της κάθε δύναμης φέρουμε διακεκομμένες ευθείες παράλληλες στην άλλη δύναμη . Η συνισταμένη είναι μια δύναμη με αρχή την κοινή αρχή των δυο συνιστωσών δυνάμεων , και τέλος στο σημείο στο οποίο συναντώνται οι διακεκομμένες). Όμως $συν90$ = 0 οπότε :

$$ F\_{1}$$

ΣF

$$F\_{ολ}=\sqrt{F1^{2}+F2^{2}}$$

θ

εφ$\hat{θ}$ = $\frac{F\_{1 }}{F\_{2}}$ =$\frac{κατακόρυφη δύναμη}{οριζόντια δύναμη}$ =$\frac{απέναντι πλευρά}{προσκείμενη }$

$$ F\_{2}$$

#### Παράδειγμα:

Αν F1 =$\sqrt{3}$ N και F2 =1 N , $F\_{ολ}=\sqrt{F1^{2}+F2^{2}}$ = $\sqrt{\sqrt{3}^{2}+1^{2}}$=$\sqrt{4} $= 2 Ν εφ$\hat{θ}$ = $\frac{F\_{1 }}{F\_{2}}$ =$\frac{\sqrt{3}}{1}$=$\sqrt{3}$ άρα θ=30ο

### Εφαρμογή της ιδιότητας των κάθετων δυνάμεων .

Δύναμη που δέχεται από την επιφάνεια ένα σώμα που κινείται πάνω στην επιφάνεια αυτή.

Το σώμα του σχήματος δέχεται από την επιφάνεια πάνω στην οποία βρίσκεται δύο δυνάμεις. Την κάθετη αντίδραση Ν και την τριβή ολίσθησης Τολ . **Η δύναμη αντίδρασης Α** που δέχεται το σώμα από το οριζόντιο επίπεδο

Α

δίνεται από τη σχέση Α =

Ν

 2  2



και η διεύθυνση της προσδιορίζεται από την σχέση εφφ = $\frac{Ν}{Τολ }$ φ

Τολ

### β) ΠΟΛΛΕΣ ΚΑΘΕΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Αν σε ένα σώμα ασκούνται πολλές δυνάμεις που είναι κάθετες μεταξύ τους ( οριζόντιες και κατακόρυφες εργαζόμαστε ως εξής :

**Βήμα 1Ο** : κατασκευάζουμε δυο κάθετους άξονες (ορθογώνιο σύστημα αξόνων ) που η αρχή τους ταυτίζεται με την αρχή των δυνάμεων. Τον οριζόντιο άξονα χχ΄. Τον κατακόρυφο άξονα yy΄.

**Βήμα 2ο** : Βρίσκω την συνισταμένη των δυνάμεων μόνο στον άξονα χχ΄ (την ΣFx) . Οι δυνάμεις στον άξονα χχ΄ είναι συγγραμμικές μεταξύ τους.

**Βήμα 3ο** : Βρίσκω την συνισταμένη των δυνάμεων μόνο στον άξονα yy΄ (την ΣFy) . Οι δυνάμεις στον άξονα yy΄είναι συγγραμμικές μεταξύ τους.

**Βήμα 4ο** : οι ΣFx και ΣFy είναι κάθετες μεταξύ τους οπότε χρησιμοποιώ τη μεθοδολογία των κάθετων δυνάμεων δηλαδή

ΣF= και εφφ=$\frac{ΣFx}{ΣFy}$

*F* 2  *F* 2

*X*

*Y*

Παράδειγμα : Nα βρείτε την συνισταμένη των δυνάμεων αν F1 = 5Ν , F2 = 10Ν , F3 = 9Ν , F4 = 4Ν , F5 = 12Ν

y

F4

F3

F1

F2

F5

 H συνισταμένη των δυνάμεων στον άξονα χχ΄ είναι

 ΣFx= F1+ F2 - F3 = 5+10- 9 = 15- 9  ΣF= 6N (φορά προς τα δεξιά )

 Η συνισταμένη των δυνάμεων στον άξονα yy΄ είναι

 ΣFy= F4 – F5 = 4- 12 ΣFy= -8N (φορά προς τα κάτω )

 χ φ ΣFx

 ΣFy ΣF

ΣF=$\sqrt{ΣFχ^{2}+ΣFy^{2} }$ = $\sqrt{36+64}$ =$\sqrt{100}$= 10 N και εφφ=$\frac{ΣFx}{ΣFy}$ = $\frac{-8}{6}$ = $\frac{-4}{3}$

* **ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΥΝΑΜΗΣ ΣΕ ΔΥΟ ΚΑΘΕΤΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ**

**Ανάλυση** μιας δύναμης σε συνιστώσες είναι η αντικατάσταση της δύναμης από δυο δυνάμεις οι οποίες ασκούμενες αντί για αυτήν στο ίδιο σώμα θα προκαλούσαν το ίδιο αποτέλεσμα .

Fy

Όταν θέλουμε να αναλύσουμε μια δύναμη F σε δυο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες εργαζόμαστε ως εξής :

F

 **Βήμα 1Ο** : κατασκευάζουμε δυο κάθετους άξονες (ορθογώνιο σύστημα αξόνων ) που η αρχή τους ταυτίζεται με το σημείο εφαρμογής της δύναμης F **.** Τον οριζόντιο άξονα χχ΄. Τον κατακόρυφο άξονα yy΄.

φ

Fx

**Βήμα 2ο** : Τότε οι συνιστώσες αντιστοιχούν στις προβολές της F στους ορθογώνιους άξονες (Φέρνουμε διακεκομμένες ,κάθετες στους άξονες . Οι συνιστώσες Fx,Fy ξεκινούν από το σημείο εφαρμογής της δύναμης F και καταλήγουν στο σημείο που οι διακεκομμένες συναντούν τους άξονες ). Αν γνωρίζουμε την γωνία φ που σχηματίζει η F με έναν από τους άξονες μπορούμε να υπολογίσουμε τις συνιστώσες με την βοήθεια των τριγωνομετρικών αριθμών :

$F\_{y}$**= F ημ** $\hat{φ}$

$F\_{χ}$**= F συν** $\hat{φ}$

συν $\hat{φ}$ =$ \frac{Fχ}{F} $ και ημ $\hat{φ}$ =$ \frac{Fy}{F} $

Παράδειγμα: Aν F= 10N και φ=60ο τότε:

Fχ= F.συνφ  Fχ= 10. συν60ο  Fχ= 10. $\frac{1}{2}$  Fχ= 5Ν και $F\_{y} $= F ημ $\hat{φ } $= 10·ημ 60 = 10· $\frac{\sqrt{3}}{2}$  $F\_{y} $= 5$\sqrt{3}$ Ν

### \*\*\*\* ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ ΠΟΥ ΘΑ ΣΥΝΑΝΤΗΣΟΥΜΕ

### Α)Σώμα κινείται σε οριζόντιο επίπεδο υπό την επίδραση πλάγιας δύναμης F που σχηματίζει γωνία φ με το οριζόντιο δάπεδο

##  F τότε Fχ=F.συνφ

FY

 και FY=F.ημφ

## Fχ

### Β) Σώμα το οποίο κρέμεται δεμένο από νήμα που σχηματίζει γωνία φ με την κατακόρυφο

****

|  |  |
| --- | --- |
|  | H γωνία φ είναι ίση με την γωνία ανάμεσα στην |
| φ |  | τάση του νήματος και τον άξονα yy΄ |
| ΤTx | Τy | (ως εντός εναλλάξ)οπότε Τy=T.συνφ και Τx=T. ημφ |

### Γ) Σώμα βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ. Εδώ αναλύουμε το βάρος w.

Παρατηρήσεις : ο άξονας χχ΄ βρίσκεται κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου και ο yy΄κάθετος σε αυτόν . Η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου είναι ίση με την γωνία που σχηματίζεται ανάμεσα στο βάρος w και τον άξονα yy΄


## wx = w.ημφ και wy = w. συνφ

y

x

wx

φ

wy

w

φ