ΕΝΟΤΗΤΑ 1.1: Πειράματα Τύχης-Δ.χ , Ενδεχόμενα

Τι πρέπει να ξέρω καλά , μετά από 2 ώρες μάθημα!

- Ποιος είναι ο ορισμός του πειράματος τύχης.
  - Στρίψιμο κέρματος, ρίψη ζαριού, πέτρα-ψαλίδι-μολύβι-χαρτί, bottle flip.
- Τι είναι ο Δ.χ πειράματος τύχης– Ενδεχόμενα, αναπαράσταση αυτών.
  - Απλό, βέβαιο(Ω), αδύνατο ενδεχόμενο(Ø) – Συμβολισμοί.
  - Δενδροδιαγράμματα (εφαρμογή 1 σελ 12,ασκήσεις 1,3,4 σελ 15) - Πίνακες διπλής εισόδου (εφαρμογή 2 σελ 13, ασκήσεις 2,5 σελ 15) – Διαγράμματα Venn
- Τι είναι το υποσύνολο!-Πράξεις με σύνολα (∪,∩,συμπλήρωμα , διαφορά).
  - Ασυμβίβαστα ή ξένα μεταξύ τους ενδεχόμενα.
- **Τον παρακάτω πίνακα!** (πρόσθετο υλικό 1 σελίδα 16)

Γλώσσα συνόλων	Φυσική Γλώσσα
A∪B	ένα τουλάχιστον απ τα A,B (A ή B)
A∩B	A και B (και τα δυο)
(A∪B)΄	Κανένα απ τα δυο. (ούτε A ούτε B)
(A∩B)΄	Όχι και τα δυο. (ούτε **A και B**)
A-B	Μόνο το A
B-A	Μόνο το B
(A-B)∪(B-A)	Ένα μόνο. (μόνο A ή μόνο B)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **(Πείραμα τύχης)**
   Ποιο από τα παρακάτω πειράματα είναι πείραμα τύχης ; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.
   α) ο χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών εκλείψεων του ήλιου.
   β) το πλήθος των πελατών ενός εμπορικού καταστήματος μια συγκεκριμένη μέρα.
   γ) ο αριθμός των αεροπλάνων που φθάνουν σε ένα αεροδρόμιο εντός καθορισμένου χρονικού διαστήματος.
   δ) ο χρόνος που απαιτείται για να διανύσει ένα κινητό γνωστή απόσταση s με σταθερή ταχύτητα v (velocity).
   ε) ο τόκος που θα λάβουμε για καταθέσεις ύψους α με προκαθορισμένο επιτόκιο β.

2. Ρίχνουμε ένα νόμισμα - κέρμα 2 φορές (Στρίψιμο).
α) Ποιος είναι ο δ.χ Ω , του πειράματος και να βρεθεί το πλήθος N(Ω).
β) Να γραφεί (με αναγραφή) το ενδεχόμενο Α = { και στις δυο ρίψεις ήρθε το ίδιο αποτέλεσμα}. και συμπληρώστε το κενό, N(A) = …… .
γ*) Αν ρίξουμε το κέρμα 3 φορές ποιο είναι τότε το N(Ω) ;

3. Ρίχνουμε ζάρι 2 φορές και ορίζουμε τα ενδεχόμενα Α = {το αποτέλεσμα της 2ης ρίψης είναι μεγαλύτερο της 1ης} , Β = {το άθροισμα των ενδείξεων είναι περιττός} , Γ = {το γινόμενο των ενδείξεων είναι ≤ 7}.
Βρείτε τα ενδεχόμενα : Α∩Β , Α∩Γ , Β∩Γ , Α∩(Β∩Γ) , Α–Β , Β–Α.

4. Σε μια ομάδα 20 ατόμων , 4 από τις 7 γυναίκες και 2 από τους 13 άνδρες φορούν γυαλιά. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα άτομα αυτά.
Ονομάζουμε τα ενδεχόμενα Α={είναι γυναίκα} , Β={φοράει γυαλιά}.
Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων το ενδεχόμενο το άτομο που επιλέχθηκε :
α) να είναι γυναίκα **ή** να φοράει γυαλιά.
β) να μην είναι γυναίκα και να φοράει γυαλιά.

5. Από τους μαθητές ενός Λυκείου κάποιοι μιλούν πολύ καλά τη γαλλική γλώσσα. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή για να εκπροσωπήσει το σχολείο σε μια εκδήλωση του τμήματος της Γαλλικής Φιλολογίας. Αν ονομάσουμε τα ενδεχόμενα Α : « ο μαθητής να είναι κορίτσι»
Β : « ο μαθητής μιλά καλά την γαλλική γλώσσα»
Να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα :
i. Α∪Β ii.Α∩Β iii. Β-Α iv. Α-Β v.Α΄ vi. (Α∪Β)΄

6. Ρίχνουμε ένα νόμισμα και κατόπιν ένα ζάρι.
α) Ποιος είναι ο δ.χ Ω , του πειράματος ;
β) Να γραφεί το ενδεχόμενο Α = { ήρθε Κεφαλή στη ρίψη του νομίσματος}.
γ) Να γραφεί το ενδεχόμενο Β = { ήρθε αριθμός > 4 στη ρίψη του ζαριού}.
δ) Να γραφούν τα ενδεχόμενα Α΄ και Α∩Β.
ε) Συμπληρώστε τα κενά, N(Ω) = …… , N(A) = ……. , N(B) = ……..

7. Δυο παίκτες παίζουν σκάκι και συμφωνούν ότι νικητής είναι εκείνος που θα φτάσει πρώτος στις δυο νίκες. Αν α είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο πρώτος παίκτης και β το αποτέλεσμα να κερδίζει ο δεύτερος , προσοχή εξαιρούμε το ΠΑΤ.
α) Γράψτε το δ.χ Ω του παιχνιδιού.
β)Βρείτε το ενδεχόμενο Α= { κερδίζει ο 1ος παίκτης}
γ)Βρείτε το ενδεχόμενο Α΄= { κερδίζει ο 2ος παίκτης}.
δ) Συμπληρώστε τα κενά, N(Ω) = …… , N(A) = …… , N(A΄) = ……..

ΕΝΟΤΗΤΑ : 1.2 Πιθανότητες : Ορισμοί και Εφαρμογές

Τι πρέπει να ξέρω καλά , μετά από 4 ώρες μάθημα!

- Δίκαιο [illegible]
- Κλασικός ορισμός πιθανότητας (ισοπίθανα ενδεχόμενα)
  - $0 \leq P(A) \leq 1$
  - $P(\emptyset)=0$
  - $P(\Omega)=1$
  - Να γίνουν οι Ασκήσεις 1και 4 σελίδας 24
- **Μη** ισοπίθανα ενδεχόμενα (bottle flip) – Αξιωματικός ορισμός
  - $A \mapsto P(A)$, $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\emptyset)=0$, $P(\Omega)=1$, Απλός προσθετικός νόμος
  - **Εφαρμογή 2 σελίδας 21**
  - Άσκηση 6 σελίδα 24

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

8. Μεταξύ των οικογενειών με 3 παιδιά επιλέγουμε τυχαία μια οικογένεια και εξετάζουμε τα παιδιά ως προς το φύλο και τη σειρά γέννησης.

α) Γράψτε τον δ.χ Ω του παραπάνω πειράματος.

β) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου
A={όλα τα παιδιά είναι του ίδιου φύλου}.

9. Ρίχνουμε 2 ζάρια ταυτόχρονα. **Να βρείτε την πιθανότητα**,

α) και τα δυο ζάρια να έχουν την ίδια ένδειξη.

β) Να έρθουν εξάρες.

γ) Το άθροισμα των ενδείξεων είναι ≥ 10. Γράψτε το αντίστοιχο ενδεχόμενο.

δ) Το άθροισμα των ενδείξεων είναι ≥ 11.

ε) Το άθροισμα των ενδείξεων είναι 7.

10. Έστω ο δ.χ $\boldsymbol{\Omega = \{\omega_1 , \omega_2 , \omega_3 , \omega_4\}}$ με $P(\omega_1) = \frac{1}{3}$, $P(\omega_3) = \frac{1}{6}$, $P(\omega_4) = \frac{1}{9}$.
Βρείτε την πιθανότητα $P(\omega_2)$.

Ενδεικτική Λύση

Εδώ **ΔΕΝ** έχουμε ισοπίθανα ενδεχόμενα!

Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει, δες σχολικό βιβλίο σελίδα 20.

$$P(\{\omega_1 , \omega_2 , \omega_3 , \omega_4\})=P(\{\omega_1\})+P(\{\omega_2\})+P(\{\omega_3\})+P(\{\omega_4\})$$
$$P(\Omega)=P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+ P(\omega_4)$$
$$1=\frac{1}{3}+ P(\omega_2) + \frac{1}{6}+\frac{1}{9}$$
$$1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{9} = P(\omega_2)$$
$$\frac{18}{18}-\frac{6}{18}-\frac{3}{18}-\frac{2}{18}= P(\omega_2)$$
$$\frac{7}{18} = P(\omega_2)$$

11. Δίνεται το σύνολο Ω={1,2,3,4,5,6} (ρίψη ζαριού-ισοπίθανα ενδεχόμενα) και τα υποσύνολα του Α={1,2,4,5}, Β={2,4,6}.

α)Παραστήστε με διαγράμματα Venn , με βασικό σύνολο το Ω , τα σύνολα Α , Β , Α∪Β , Α∩Β , Α΄ και Β΄.

β) επιλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο απ το Ω. Βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων :

i. Να μην πραγματοποιηθεί το Α.
ii. Να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα Α και Β.
iii. Να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα Α , Β.

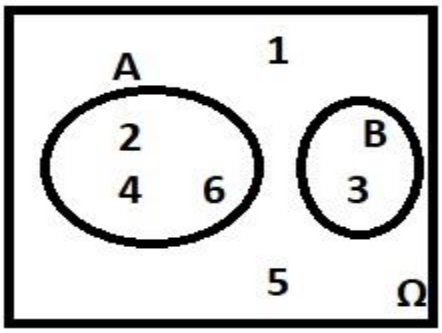
ΕΝΟΤΗΤΑ : 1.3 Πιθανότητες και Πράξεις

Τι πρέπει να ξέρω καλά , μετά από 4 ώρες μάθημα!

- **Αν τα Α, Β είναι ξένα ή ασυμβίβαστα τότε ισχύει:**

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ (απλός προσθετικός νόμος)

π. χ Έστω ρίψη ζαριού. $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ και τα ενδεχόμενα $A=\{2,4,6\}$,$B=\{3\}$



Έχουμε ,

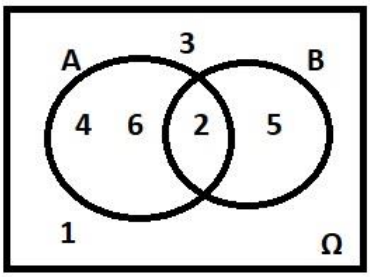
$P(A)=\frac{3}{6}$, $P(B)=\frac{1}{6}$

Είναι $A\cup B=\{2,3,4,6\}$ και $P(A\cup B)=\frac{4}{6}$

Όμως , $P(A)+P(B)=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=P(A\cup B)$

- **Μπορεί να ισχύει $P(A\cup B)<P(A)+P(B)$; Διερεύνηση σελ 29 σχολικού.**

π. χ Έστω ρίψη ζαριού. $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ και τα ενδεχόμενα $A=\{2,4,6\}$,$B=\{2,5\}$



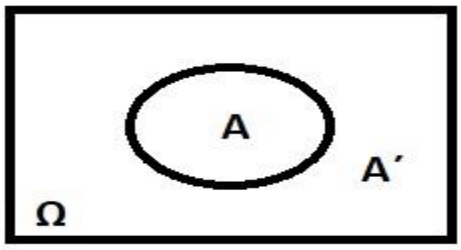
Έχουμε , $P(A)=\frac{3}{6}$, $P(B)=\frac{2}{6}$

Είναι $A\cup B=\{2,4,5,6\}$ και $P(A\cup B)=\mathbf{\frac{4}{6}}$

Όμως , $P(A)+P(B)=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}>P(A\cup B)$

Οι τύποι λογισμού Πιθανοτήτων

Για ασυμβίβαστα, ισχύει P(A΄)=1-P(A)



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι ασυμβίβαστα τα ενδεχόμενα A , A΄
Και ισχύει : $A \cup A' = \Omega$ (ίσα ενδεχόμενα του ίδιου δ.χ άρα και πιθ/τες)

Άρα $P(A \cup A') = P(\Omega)$

$P(A)+P(A')=1$

$P(A')=1-P(A)$

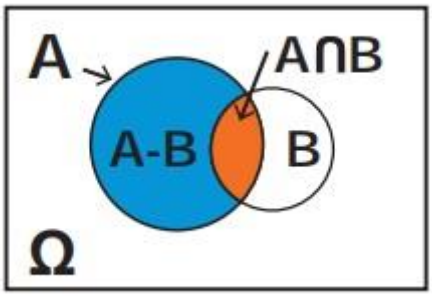
π. χ 1ο Αν $P(A) = \frac{1}{6}$, βρείτε την πιθανότητα P(A΄).

π. χ 2ο Αν η πιθανότητα να κολλήσω Κοβιντ είναι $P(\{\text{κολλάω}\})=\frac{1}{3}$, ποια είναι η πιθανότητα P({να μην κολλήσω κόβιντ}) ;

π. χ 3ο Συμπλήρωσε τα παρακάτω :

P(B΄)=..... **P((A∪B)΄)=.....**

P(A)=P(A-B)+P(A∩B)



Τα A-B (μόνο το A) , A∩B (και A και B) είναι ασυμβίβαστα.
Είναι, $(A-B) \cup (A \cap B) = A$

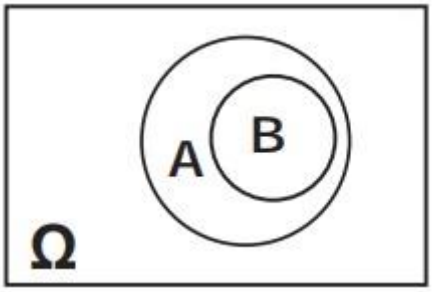
Άρα $P\big((A-B) \cup (A \cap B)\big) = P(A)$

$P(A-B)+P(A \cap B)=P(A)$

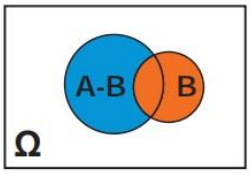
Ερώτηση : Στο ίδιο Βενν , με τι θα ισούται το P(B)=;

Αν $B \subseteq A$, τότε $P(B) \leq P(A)$

Το «=» για την περίπτωση που B=A. <u>**Προσοχή !**</u> Το αντίστροφο ΔΕΝ ισχύει.



$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-$



$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (Π4)
Απόδειξη Τα ενδεχόμενα A - B και B είναι ασυμβίβαστα και ισχύει: $(A - B) \cup B = A \cup B$ Από τον απλό προσθετικό νόμο: $P((A - B) \cup B) = P(A - B) + P(B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$ Με τη βοήθεια του (Π2) για το A - B: $P(A \cup B) = [\, P(A) - P(A \cap B)\,] + P(B) \Leftrightarrow$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

<u>**Σημαντικές Παρατηρήσεις**</u>

- Για τα A και B ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ($A \cap B = \emptyset$) , ισχύουν :
  - $P(A \cap B)=0$
  - $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$
  - Η πιθανότητα $P(A)+P(B)$ είναι ≤ 1 , αφού $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$.

- **Προσοχή !** Αν $P(A)+P(B)<1$, αυτό **δεν** σημαίνει ότι τα A και B είναι ασυμβίβαστα! Γιατί ; Δες $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$ και $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, δες **P(A)=…… P(B) = …….. και P(A)+P(B)=……<1 ,**
  όμως $A \cap B=\{....\}$ άρα έχουν κοινά στοιχεία.

- Αν B συμπληρωματικό του A , τότε $P(A)+P(B)=1$

- Αν όμως $P(A)+P(B)=1$, αυτό **δεν** σημαίνει ότι A και B συμπληρωματικά!
  Π.χ $A=\{1,2,3\}$,$B=\{2,3,4\}$ και $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, είναι $P(A)+P(B)=1$

Άσκηση 2 σελίδας 32

2) Ας υποθέσουμε ότι Α και Β είναι ενδεχόμενα ενός δ.χ. Ω. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή ή λάθος, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

α) Αν ισχύει ότι $P(A) = 0,8$ και $P(B) = 0,1$. Ισχύει ότι $B \subseteq A$, γιατί $P(B) \leq P(A)$.

β) Αν $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,4$ και $P(A \cup B) = 0,6$, τότε τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

γ) Αν $P(A) = 0,4$ και $P(B) = 0,6$, τότε το συμπληρωματικό του Α είναι το Β.

δ) Ισχύει πάντα ότι $P(A) + P(B) \leq 1$.

ε) Ισχύει πάντα ότι $P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$.

στ) Αν ισχύει $P(A) + P(B) = 1,5$, τότε τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

ζ) Αν ισχύει $P(A) + P(B) < 1$, τότε τα Α και Β είναι ασυμβίβαστα.

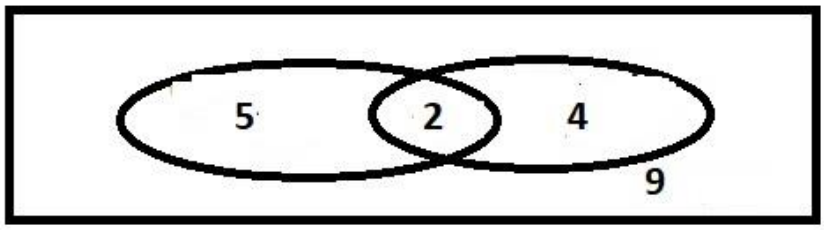
η) Ισχύει ότι $P(A \cap B) \leq P(A)$.

Απαντήσεις :

α)Λ β)Σ γ)Λ δ)Λ ε)Σ στ)Σ ζ)Λ η)Σ

Άσκηση

Σε μια γειτονιά με 20 σπίτια , 7 σπίτια έχουν από έναν σκύλο , 6 σπίτια από μια γάτα και 2 έχουν και γάτα και σκύλο. Πόσα σπίτια δεν έχουν κατοικίδιο;



Άσκηση 1 σελ 32

1) Το 50% των δωματίων ενός ξενοδοχείου έχουν τζάκι, το 20% έχουν καλοριφέρ και το 10% και τζάκι και καλοριφέρ. Επιλέγουμε τυχαία ένα δωμάτιο του ξενοδοχείου.

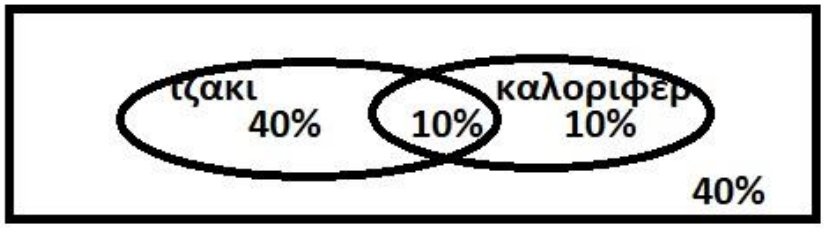
Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου το δωμάτιο που επιλέξαμε:

α) να μην έχει τζάκι,

β) να μην έχει ούτε τζάκι ούτε καλοριφέρ,

γ) να έχει μόνο τζάκι;

Ενδεικτική Λύση



Α={έχει τζάκι} , άρα Α΄ ={δεν έχει τζάκι}
Β={έχει καλοριφερ}

Α ∪ Β={έχει τζάκι **ή** καλοριφερ} Α ∩Β={έχει και τα δυο}

Α-Β={έχει μόνο τζάκι}

(Α ∪ Β)΄={ούτε τζάκι ούτε καλοριφερ}

Δεδομένα , $P(A) = 0.5$ $P(B) = 0.2$ $P(A \cap B)=0.1$

α) $P(A')=1-P(A)=1-0.5 = 0.5$

β) Ζητείται το P[(Α ∪ Β)΄] , άρα αρκεί να βρω Ρ(Α ∪ Β)

Είναι $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) = 0.5 + 0.2 - 0.1 = 0.6$

Άρα $P[(A \cup B)'] = 1-0.6=0.4$

γ) **Ζητείται** το $P(A-B) = P(A) - P(A\cap B) = 0.5 - 0.1 = 0.4$

Άσκηση 4 σελ 33

4) Από τους/τις μαθητές/τριες της Β΄ τάξης ενός Λυκείου το 55% είναι μαθήτριες, το 40% παίζουν μπάσκετ και το 10% είναι μαθήτριες που παίζουν μπάσκετ. Επιλέγουμε τυχαία έναν/μία μαθητή/τρια.
Να υπολογίσετε τις πιθανότητες να είναι:
α) μαθήτρια ή να παίζει μπάσκετ,
β) μαθήτρια και να μην παίζει μπάσκετ,
γ) μαθητής και να παίζει μπάσκετ,
~~**δ)** μαθητής ή να παίζει μπάσκετ.~~

Ενδεικτική Λύση

Δεδομένα της άσκησης.

A={είναι μαθήτρια} , και άρα P(A)=0.55
B = {παίζει μπάσκετ} , άρα P(B)=0.4

A ∩B={μαθήτρια που παίζει μπάσκετ} και P(A ∩B)=0.1

A-B=A ∩B΄={μαθήτρια που δεν παίζει μπάσκετ}
B-A=B ∩A΄={παίζει μπάσκετ αλλά δεν είναι μαθήτρια}

α) Ζητείται η πιθανότητα P(A ∪B).

Είναι $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0.55+0.4-0.1$
$=0.95-0.1$
$=0.85$

β) Ζητείται να είναι μόνο μαθήτρια. P(A-B)

Είναι , P(A-B) =P(A)-P(A ∩B)
=0.55-0.1
=0.45

γ) Ζητείται να είναι μόνο μαθήτρια. P(B-A)

Είναι , P(B-A) =P(B)-P(A ∩B)
=0.4-0.1
=0.3

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

12. Για τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν : $P(A)=\frac{2}{3}$, $P(B)=\frac{1}{2}$ και $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$. Βρείτε τις πιθανότητες :

i. P(A∪B) ii. P(A΄) iii. P(A-B) iv. P((A-B)∪(B-A))

ΟΜΟΙΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7,9,10 ΣΕΛΙΔΑ 155 [1]

Ενδεικτική Λύση

i. $P(A\cup B)=P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{4}{6}+\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$

ii. $P(A')=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

iii. $P(A-B)=P(A)-P(A \cap B) =\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

13. Το 8% των ατόμων ενός πληθυσμού έχουν υπέρταση , το 6% στεφανιαία καρδιακή ασθένεια και το 2% έχουν και τα δυο. Επιλέγετε ένα άτομο τυχαία . Αφού σχηματίσετε το διάγραμμα Vennπου περιγράφει τα παραπάνω, υπολογίστε την πιθανότητα ,

α) να έχει το άτομο που επιλέχθηκε τουλάχιστον μια ασθένεια.

β) να έχει το άτομο που επιλέχθηκε μόνο υπέρταση.

γ) να έχει το άτομο που επιλέχθηκε μόνο στεφανιαία νόσο.

δ) να έχει το άτομο που επιλέχθηκε μόνο μια ασθένεια.

ΟΜΟΙΑ με ΑΣΚΗΣΗ 13 ΣΕΛΙΔΑ 156 [1]

14. Από 120 μαθητές ενός Λυκείου, 24 μαθητές συμμετέχουν στον διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας(Ε.Μ.Ε), 20 συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών (Ε.Ε.Φ)και 12 μαθητές συμμετέχουν και στους δυο διαγωνισμούς.
Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής:

α) να συμμετέχει σε έναν τουλάχιστον από τους διαγωνισμούς.

β) να συμμετέχει **μόνο** στο διαγωνισμό της Ε.Μ.Ε.

γ) να συμμετέχει **μόνο** στο διαγωνισμό της Ε.Ε.Φ.

δ) να συμμετέχει **μόνο** σε έναν απ΄ τους δυο διαγωνισμούς.

15. Στο σύλλογο των καθηγητών ενός λυκείου το 55% είναι γυναίκες , το 40% είναι φιλόλογοι και το 30% είναι γυναίκες φιλόλογοι .
Ονομάζουμε τα ενδεχόμενα Γ={ είναι γυναίκα } και Φ={ είναι φιλόλογος}.
Επιλέγουμε τυχαία έναν καθηγητή, εκφράστε λεκτικά τα παρακάτω ενδεχόμενα **και** υπολογίστε τις πιθανότητες τους .

i. Γ∪Φ ={……}

ii. Γ−Φ = {……}

iii. (Γ∪Φ)΄={……}

iv. Γ΄∩Φ= {……..…}

[ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2003]

16. Το 70% των κατοίκων μιας πόλης έχει αυτοκίνητο, το 40% έχει μηχανάκι και το 20% έχει αυτοκίνητο και μηχανάκι. Επιλέγουμε τυχαία έναν κάτοικο της πόλης. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα : Α = {ο κάτοικος έχει αυτοκίνητο}
Μ = { ο κάτοικος έχει μηχανάκι}.

α) Να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα Α∪Μ , Μ-Α , Μ΄ .

β) Να βρείτε την πιθανότητα ο κάτοικος που επιλέχθηκε :

i. Να μην έχει μηχανάκι,

ii. Να μην έχει ούτε αυτοκίνητο ούτε μηχανάκι.

17. Σε μια εταιρεία το 20% των εργαζομένων της ανήκει στις ευπαθείς ομάδες , το 60% έχει υποβληθεί σε έλεγχο της νόσου COVID-19 και το 15% ανήκει στις ευπαθείς ομάδες και έχει υποβληθεί σε έλεγχο της νόσου COVID-19. Επιλέγουμε τυχαία έναν εργαζόμενο της εταιρείας.
Να βρείτε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων.

Α : «να ανήκει στις ευπαθείς ομάδες ή να έχει υποβληθεί σε έλεγχο της νόσου COVID-19.»
Β: «να ανήκει στις ευπαθείς ομάδες και να ΜΗΝ έχει υποβληθεί σε έλεγχο της νόσου COVID-19.»
Γ : «να ΜΗΝ ανήκει στις ευπαθείς ομάδες ΚΑΙ να ΜΗΝ έχει υποβληθεί σε έλεγχο της νόσου COVID-19.» **[ΠΑΝΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2020 ΘΕΜΑ Β2]**

[Απ. α) 65% , β) 5% , γ) 35%]

Ενδεικτική Λύση

Ορίζω τα Ε={ανήκει σε ευπαθή ομάδα} και P(E)=0.2
Κ={έχει υποβληθεί σε έλεγχο της νόσου Covid 19} P(K)=0.6

Επίσης δίνεται P(E ∩K)=0.15

Άρα τότε Α =Ε ∪Κ , Β=Ε-Κ , Γ=(Ε ∪ Κ)΄

$$\mathbf{P(A)}=P(E \cup K) = P(E) + P(K) - P(E \cap K)$$
$$= 0.2 + 0.6 - 0.15 = 0.65$$

$$\mathbf{P(B)}=P(E-K)=P(E)-P(E \cap K)$$
$$=0.2-0.15$$
$$=0.05$$

$$\mathbf{P(\Gamma)}=P\big((E \cup K)'\big)=1-P(E \cup K)=1-0.65=0.35$$

ΕΝΟΤΗΤΑ : 1.4 Συνδυαστική και Πιθανότητες (Μέρος Α΄)

Τι πρέπει να ξέρω καλά , μετά από 3 ώρες μάθημα!

- Αρχικά , να διακρίνω τα στοιχεία ενός συνόλου (ν) και τις θέσεις (κ).
- Να μάθω τη βασική αρχή της απαρίθμησης (διάβασε σελ 34-35).
    - Να γίνουν οι ασκήσεις 4 και 6 σελίδας 40.

Άσκηση 4 σελίδα 40

- ✓ Αν κάποιος διαθέτει 2 μπουφάν (ένα μαύρο κι ένα μπλε), 4 παντελόνια, 3μπλούζες, 10 ζευγάρια κάλτσες και 3 ζευγάρια παπούτσια, με πόσους τρόπους μπορεί να ντυθεί, φορώντας από όλα τα είδη;
- ✓ Αν ένας επιλέξει τυχαία έναν από αυτούς τους τρόπους για να ντυθεί φορώντας ένα μπουφάν, ένα παντελόνι, μία μπλούζα, ένα ζευγάρι κάλτσες και ένα ζευγάρι παπούτσια, ποια είναι η πιθανότητα να φοράει το μπλε μπουφάν;

Ενδεικτική Λύση

Το σύνολο εδώ είναι τα ρούχα.

Σ={2 μπουφάν (μαύρο-μπλε) , 4 παντελόνια, 3 μπλούζες,
10 ζευγ.κάλτσες , 3 ζευγ.παπούτσια}

Και οι θέσεις κ=5:

Μπουφάν	παντελόνι	μπλούζα	κάλτσες	παπούτσια

Μπορεί να ντυθεί με

$$2\cdot 4\cdot 3\cdot 10\cdot 3 = 8\cdot 90 = 720 \text{ τρόπους}$$ (δυνατές περιπτώσεις)

Θέλουμε να φοράει το μπλε μπουφάν (ευνοϊκές περιπτώσεις) πόσοι είναι τώρα οι τρόποι:

$$1\cdot 4\cdot 3\cdot 10\cdot 3 = 4\cdot 90 = 360 \text{ τρόπους}$$ (ευνοϊκές περιπτώσεις)

Άρα η Ρ({να φοράει το μπλε μπουφάν})=$\frac{360}{720} = \frac{1}{2} = 0.5$

- Πώς υπολογίζω τις διατάξεις ν στοιχείων ενός συνόλου ανά κ (θέσεις) με επανάληψη αυτών–π.χ στρίψιμο κέρματος 5 φορές(δυνατά αποτελέσματα)
- Πώς υπολογίζω τις διατάξεις ν στοιχείων ενός συνόλου ανά κ (θέσεις) χωρίς επανάληψη αυτών – π. χ τρέχουν 8 αθλητές με πόσους τρόπους προκύπτει η τριάδα των νικητών;
- Πώς υπολογίζω τις μεταθέσεις ν στοιχείων ενός συνόλου ανά ν (θέσεις).
    - Να γίνουν οι ασκήσεις 5 σελίδας 40 και 11 σελίδας 41.
- Έναν νέο συμβολισμό – Το παραγοντικό.
    - $0! = 1$
    - $\nu\cdot(\nu-1)\cdot\ldots\ldots\cdot(\nu-\kappa+1)=\frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}$
- Τι γίνεται όταν (άτομα<θέσεων). Δες π.χ με ασανσέρ !
    - **Άσκηση 8 σελίδας 40**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

18. Σε ένα διαγωνισμό τραγουδιού λαμβάνουν 20 χώρες . Με πόσους τρόπους μπορούν να συμπληρωθούν οι 3 πρώτες θέσεις ;

[Απ. 6840]

Ενδεικτική Λύση

Διατάξεις των ν=20 χωρών ανά κ=3 θέσεις.

1η θέση	2η θέση	3η θέση
20	19	18

Άρα , $$\frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!} = \frac{20!}{17!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$$

19. Σε ένα αγώνα στίβου (για π. χ 100αρι) τρέχουν 8 αθλητές . Με πόσους τρόπους μπορούν να συμπληρωθούν οι 3 πρώτες θέσεις ;

[Απ. 336 τρόποι]

Ενδεικτική Λύση

Διατάξεις των ν=8 αθλητών ανά κ=3 θέσεις. (ν>κ)

1η θέση	2η θέση	3η θέση
8	7	6

Άρα , $$\frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!} = \frac{8!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336$$

20. Με πόσους τρόπους μπορούμε να κρεμάσουμε 3 κορνίζες σε τρία καρφιά;

[Απ. 6 τρόποι]

Ενδεικτική Λύση

Μεταθέσεις των ν=3 κορνιζών ανά κ=3 θέσεις. (ν=κ)

Άρα , $\nu! = 3! = 6$

21. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 6 άνθρωποι σε 6 θέσεις ;

[Απ. 720 τρόποι]

Ενδεικτική Λύση

Μεταθέσεις των ν=6 ανθρώπων ανά κ=6 θέσεις. (ν=κ)

Άρα , $\nu! = 6! = 720$

22. (**Πανκύπριες 2021**-Θέμα Α2) Δίνεται η λέξη «ΠΑΝΔΗΜΙΕΣ».

α) Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης υπάρχουν ;Δεν χρειάζεται η λέξη να βγάζει νόημα.
β) Αν η λέξη ξεκινάει από Π και τελειώνει σε Α, πόσες τέτοιες λέξεις μπορούμε να σχηματίσουμε ; **[Απ. α) 9! , β) 7!]**

Ενδεικτική Λύση

α) Τα γράμματα είναι Σ={Π,Α,Ν,Δ,Η,Μ,Ι,Ε,Σ} ν=9

Και οι θέσεις είναι κ = 9 άρα

Μεταθέσεις των ν=9 γραμμάτων ανά κ=9 θέσεις. (ν=κ)

Άρα , $\nu! = 9! = 362880$

β) Η πρώτη θέση έχει το γράμμα Π και η τελευταία το γράμμα Α.

Π	7	6	5	4	3	2	1	Α

Μπορούμε να σχηματίσουμε $7! = 5040$ λέξεις. (χωρίς να έχουν απαραίτητα νόημα)

23. Να υπολογίσετε πόσους διαφορετικούς **τριψήφιους** αριθμούς (όλους τους τριψήφιους που) μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία του συνόλου

$$A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

αν **επιτρέπεται** επανάληψη ψηφίου. **[ΠΑΝΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2022 ΘΕΜΑ Α3]**

Ενδεικτική Λύση

ν=9 τα στοιχεία του συνόλου Α και κ=3 οι θέσεις (τριψήφιοι)

8	9	9

Άρα, $8 \cdot 9 \cdot 9 = 8 \cdot 81 = 648$ τριψήφιους.

24. Πόσους **τετραψήφιους** μπορούμε να γράψουμε με τα ψηφία {1,2,3,4,5} (στοιχεία) αν θέλουμε,

α) να έχουν δηλαδή διαφορετικά ψηφία,

β) κάθε ψηφίο να μπορεί χρησιμοποιείται παραπάνω από μια φορά.

γ) Αν πάρουμε στην τύχη έναν τετραψήφιο ποια η πιθανότητα να έχει όλα τα ψηφία του διαφορετικά ;

[Απ. α) 120, β) 625, γ) 0.192]

ΟΜΟΙΑ με ΑΣΚΗΣΗ 1 ΣΕΛΙΔΑ 164 [1]

Ενδεικτική Λύση

α) ν=5 , κ=4

5	4	3	2

Άρα $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 20 \cdot 6 = 120$ τετραψήφιοι

β) ν=5 , κ=4

5	5	5	5

Άρα $5^4 = 25 \cdot 25 = 625$ τετραψήφιοι

γ) Όλα διαφορετικά (ευνοϊκές περιπτώσεις)=120
Δυνατές περιπτώσεις : 625

Άρα P({όλα διαφορετικά})= $\frac{120}{625} = \frac{24}{125} = 0.192$

25. **α)** Πόσες πινακίδες κυκλοφορίας μπορούμε να φτιάξουμε που να περιέχουν 3 κεφαλαία γράμματα στη σειρά απ τα Α,Β,Ε,Ζ,Η,Ι,Κ,Μ,Ν,Ο,Ρ,Τ,Υ,Χ και έναν τετραψήφιο αριθμό απ τα ψηφία 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

β) Πόσες απ τις παραπάνω πινακίδες είναι Αθηναϊκές (ξεκινούν από Ι).

γ) Πόσες απ τις παραπάνω είναι από Πέλλα (ξεκινούν από ΕΕ).

[Απ. α) 24.696.000, β) 1.764.000, γ) 126.000]

ΟΜΟΙΑ με ΑΣΚΗΣΗ 2 ΣΕΛΙΔΑ 163 [1]

Άσκηση 11 σχολικού σελίδας 41

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου τέσσερα τυχαία επιλεγμένα άτομα από την τάξη σας (ή το σχολείο σας), να έχουν γεννηθεί σε τέσσερις διαφορετικές εποχές του έτους.

Ενδεικτική Λύση

Οι τέσσερις επιλεγμένοι Μαθητές/μαθήτριες {M_1,M_2,M_3,M_4} (είναι οι θέσεις) και οι τέσσερις εποχές {Α,Κ,Φ,Χ} (το σύνολο εδώ).

- Δυνατές Περιπτώσεις:

$1^{ος}$ μαθητής	$2^{ος}$	$3^{ος}$	$4^{ος}$
4 εποχές	4 εποχές	4	4

Άρα δυνατές περιπτώσεις : 4^4=256

- Ευνοϊκές περιπτώσεις(έχουν γεννηθεί διαφορετικές εποχές)

$1^{ος}$ μαθητής	$2^{ος}$	$3^{ος}$	$4^{ος}$
4 εποχές	3 εποχές	2 εποχές	1

Άρα ευνοϊκές περιπτώσεις : $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12 \cdot 2 = 24$

Άρα η πιθανότητα να έχουν γεννηθεί σε διαφορετικές εποχές είναι:

Ρ({έχουν γεννηθεί σε διαφορετικές εποχές})$=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{4^4}=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot4\cdot4\cdot4}=\frac{6}{64}=\frac{3}{32}\cong 0.09$

26. Από 20 μαθητές μιας τάξης , ποια είναι η πιθανότητα,

α) όλοι οι μαθητές να έχουν γενέθλια διαφορετικές μέρες.

β) Δυο τουλάχιστον μαθητές έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα.

[Απ. α) $\frac{A_{20}^{365}}{365^{20}}$ **]**

27. **4** άτομα μπαίνουν σε ένα ασανσέρ στο ισόγειο ενός **5όροφου** κτιρίου.

α) Με πόσους τρόπους μπορούν να κατέβουν αν ο καθένας μπορεί να κατέβει σε οποιαδήποτε όροφο. (Δυνατές Περιπτώσεις για το (γ)ερώτημα)

β) Ποια η πιθανότητα να κατέβουν όλοι σε διαφορετικό όροφο.

γ) Ποια η πιθανότητα να κατέβουν όλοι στους δυο πρώτους ορόφους;

[Απ. 625, 0.192 , 0.0256]

Ενδεικτική Λύση

α) Εδώ οι θέσεις είναι τα άτομα , άρα κ=4 και το ν=5 {$1^{ος}$όροφος,$2^{ος}$,$3^{ος}$,$4^{ος}$, $5^{ος}$ } είναι οι επιλογές τους ή αλλιώς ο όροφος που θα κατέβουν.

$1^{ος}$	$2^{ος}$	$3^{ος}$	$4^{ος}$
5 επιλογές(όροφοι)	5 επιλογές(όροφοι)	5 επιλογές(όροφοι)	5 επιλογές(όροφοι)

Άρα οι δυνατές περιπτώσεις είναι : $5\cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = \nu^{\kappa} = 625$

β) Τις δυνατές περιπτώσεις τις βρήκαμε πριν, είναι 625.

Ψάχνω τις ευνοϊκές περιπτώσεις του ερωτήματος.

$1^{ος}$	$2^{ος}$	$3^{ος}$	$4^{ος}$
5 επιλογές(όροφοι)	4 επιλογές(όροφοι)	3 επιλογές(όροφοι)	2 επιλογές(όροφοι)

Οι ευνοϊκές είναι : $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 20 \cdot 6 = 120$

Άρα P({να κατέβουν σε διαφορετικό όροφο})$=\frac{120}{625} = \frac{24}{125} = 0.192$

γ)

$1^{ος}$	$2^{ος}$	$3^{ος}$	$4^{ος}$
2 επιλογές(όροφοι)	2 επιλογές(όροφοι)	2 επιλογές(όροφοι)	2 επιλογές(όροφοι)

Οι ευνοϊκές εδώ είναι : $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

Άρα P({να κατέβουν όλοι στους δυο πρώτους ορόφους})$=\frac{16}{625} \cong 0.03$

28. **Οκτώ** άτομα, μεταξύ των οποίων ο Ιορδάνης και η Ελένη, θα καθίσουν τυχαία ο ένας δίπλα στον άλλο σε **8 θέσεις**.

α) Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν ; (Δυνατές Περιπτώσεις)

β) Με πόσους τρόπους η Ελένη κάθεται δίπλα στον Ιορδάνη ;

γ) Ποια η πιθανότητα Ιορδάνης και Ελένη να κάτσουν δίπλα δίπλα ;

[Απ. 40.320, 10.080 , 0.25]

ΟΜΟΙΑ με ΑΣΚΗΣΗ 3 ΣΕΛΙΔΑ 164 [1]

Ενδεικτική Λύση

α) Τα οκτώ άτομα και εδώ είναι οι θέσεις (κ=8).

Και οι θέσεις-καρέκλες είναι τα στοιχεία $\nu = 8$

Ο $1^{ος}$ έχει 8 επιλογές , ο $2^{ος}$ 7 επιλογές-καρέκλες , κ.ο.κ άρα 8!=40320

β) Ιορδάνης-Ελένη : 7 τρόποι
Ελένη – Ιορδάνης: 7 τρόποι

Άρα συνολικά : 14 τρόποι για την Ελένη και τον Ιορδάνη να κάθονται δίπλα.
Οι υπόλοιποι 6 κάθονται σε 6 καρέκλες με 6! τρόπους.

Άρα ο Ιορδάνης κάθεται δίπλα στην Ελένη με $14 \cdot 6! = 10080$ τρόπους.

γ) Η ζητούμενη πιθανότητα

$$P(\{\text{κάθονται δίπλα-δίπλα}\}) = \frac{14 \cdot 6!}{40320} = \frac{10080}{40320} = 0.25$$

ΕΝΟΤΗΤΑ : 1.4 Συνδυαστική και Πιθανότητες (Μέρος Β΄)

Τι πρέπει να ξέρω καλά , μετά από 2 ώρες μάθημα!

- **Ερώτηση:** Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω απ το σύνολο {Α,Β,Γ} δυο στοιχεία (και να κάνω ένα σύνολο) χωρίς να με ενδιαφέρει η σειρά; Είναι ο αριθμός αυτός ίσος με τις διατάξεις αυτών ανά δυο ;

  {Α,Β}, {Α,Γ},{Β,Γ}
- Να υπολογίζω τους συνδυασμούς των ν στοιχείων ανά κ.
  - $\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$
- Να γίνουν οι ασκήσεις 1,2 σελ 45 και 5,6 σελ 46.

29. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε μια διμελή επιτροπή από 5 άτομα ; **[Απ. 10 τρόποι]**

30. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε από μια τράπουλα με 52 φύλλα 6 απ αυτά ;

[Απ. 20.358.520]

31. **α.** Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε, στο παιχνίδι ΛΟΤΤΟ , 6 απ τους 49 αριθμούς ;

β. Ποια η πιθανότητα να κερδίσουμε 6άρι συμπληρώνοντας μόνο έξι αριθμούς ; **[Απ. α) 13.983.816 , β) 0.00000071]**

32. Ένα μαθητής πρέπει να απαντήσει στις εξετάσεις Φυσικής Γ΄ Γυμνασίου σε 6 απ τις 9 ερωτήσεις. Πόσες επιλογές έχει ; **[Απ. 84 επιλογές]**

Άσκηση 1 σελίδα 45
Σε ένα πρωτάθλημα συμμετέχουν 7 ομάδες και αγωνίζονται όλες με όλες μία φορά. Να υπολογίσετε πόσοι αγώνες θα γίνουν.

Ενδεικτική Λύση

Η απάντηση είναι όσοι οι συνδυασμοί των 7 ανά 2. Δεν ενδιαφέρει η σειρά επιλογής , άρα $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(5)!} = 21$ αγώνες.

33. Μια τάξη έχει 6 αγόρια και 12 κορίτσια.

α) Με πόσους τρόπους μπορεί να προκύψει το 5μελές συμβούλιο ;

β) Με πόσους τρόπους μπορεί να προκύψει 5μελες συμβούλιο με 3 ακριβώς κορίτσια ;

γ) Αν πάρουμε στην τύχη 6 μαθητές απ την τάξη αυτή , να υπολογίσετε την πιθανότητα να είναι και τα 6 κορίτσια.

[Απ. α) 8568 , β) 3300 γ) 0.05]

Ενδεικτική Λύση

α) Η απάντηση είναι όσοι οι συνδυασμοί των 26 ανά 5. Δεν ενδιαφέρει η σειρά επιλογής , άρα $\binom{18}{5} = \frac{18!}{5!(13)!} = \frac{18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14}{2\cdot3\cdot4\cdot5} = 3\cdot17\cdot4\cdot3\cdot14 = 8568$

β) Τρία ακριβώς κορίτσια επιλέγονται με $\binom{12}{3} = \frac{12!}{3!(9)!} = \frac{12\cdot11\cdot10}{6} = 2\cdot110 = 220$

Τα υπόλοιπα 2 μέλη είναι αγόρια, άρα : $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(4)!} = \frac{5\cdot6}{2} = 15$

Άρα 3 κορίτσια και 2 αγόρια : $15\cdot220 = 3300$

γ) Παίρνω 6 μαθητές από 12+6=18 , άρα οι δυνατές περιπτώσεις είναι :

$$\binom{18}{6} = \frac{18!}{6!(12)!} = \frac{18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = 17\cdot4\cdot3\cdot7\cdot13 = 18564$$

Έξι ακριβώς κορίτσια επιλέγονται με

$$\binom{12}{6} = \frac{12!}{6!(6)!} = \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2} = 2\cdot11\cdot6\cdot7 = 924 \text{τρόπους}$$

$$P\{\text{επιλέγω 6 κορίτσια από την τάξη}\} = \frac{924}{18564} = 0.05$$

34. Σε ένα δοχείο υπάρχουν **20** μπάλες, αριθμημένες αποτο1 μέχρι το 20. Παίρνουμε **5** μπάλες απ το δοχείο, **χωρίς** να μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή αν:

α. δεν υπάρχει περιορισμός.

β. Πάρουμε μόνο μπάλες με άρτιο αριθμό.

γ. Πάρουμε το πολύ 2 μπάλες με άρτιο αριθμό.

δ. Πάρουμε τις μπάλες με τους αριθμούς 10 και 19 και όχι την μπάλα με το αριθμό 1.

[ΠΑΝΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2022 ΘΕΜΑ Β3]

Ενδεικτική Λύση

α) $\binom{20}{5} = \frac{20!}{5!(15)!} = \frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 19\cdot6\cdot17\cdot16 = 31008$

β) Μπάλες με άρτιο αριθμό {2,4,6,8,10,12,14,16,18,20}

Από τις 10 παραπάνω μπάλες να επιλέξω τις 5 , άρα $\binom{10}{5} = 84\cdot3 = 252$

γ) **Καμία μπάλα με άρτιο αριθμό** άρα επιλέγω απ τις {1,3,5,7,9,11,13,15,17,19} τις 5 μπάλες με $\binom{10}{5} = 84\cdot3 = 252$ τρόπους.

Μία μπάλα με άρτιο αριθμό και 4 με μονό: $\binom{10}{1}\binom{10}{4} = 10\cdot140 = 1400$

Δύο μπάλες με άρτιο αριθμό και 3 με μονό: $\binom{10}{2}\binom{10}{3} = 45\cdot120 = 5400$

Άρα με $252+1400+5400 = 7052$ τρόπους