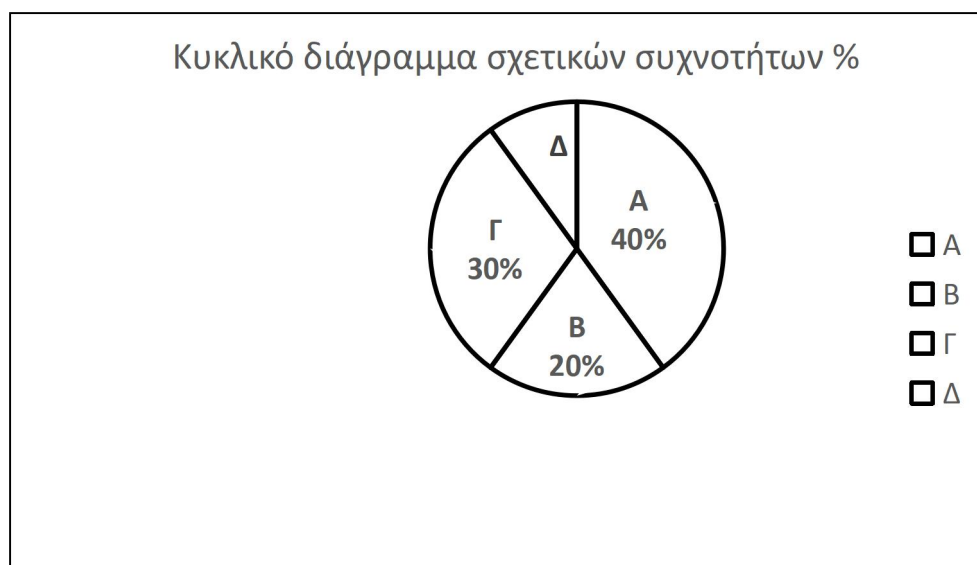


ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑΤΑ 2

32213

Στη σχολική εκδρομή ενός Δημοτικού Σχολείου πήγαν ορισμένα παιδιά από κάθε μια από τις τάξεις Α΄, Β΄, Γ΄ και Δ΄. Στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα παριστάνονται αυτά τα παιδιά ανά τάξη, ως ποσοστό επί του συνόλου των παιδιών που πήγαν στην εκδρομή.



α) Με τη βοήθεια του κυκλικού διαγράμματος να απαντήσετε στο εξής: Από ποια τάξη, από τις Α΄, Β΄, Γ΄ ή Δ΄ ήταν τα περισσότερα στην εκδρομή και από ποια τα λιγότερα;

(Μονάδες 8)

β) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα σχετικών συχνοτήτων.

Τάξη	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
A	
B	
Γ	
Δ	
Σύνολο	

(Μονάδες 10)

γ) Να σχεδιάσετε το αντίστοιχο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων %.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Ο μικρότερος κυκλικός τομέας του κυκλικού διαγράμματος είναι ο Δ, άρα τα παιδιά της Δ' τάξης ήταν τα λιγότερα στην εκδρομή.

Αντίστοιχα, ο μεγαλύτερος κυκλικός τομέας είναι ο Α, άρα τα παιδιά της Α' τάξης ήταν τα περισσότερα στην εκδρομή.

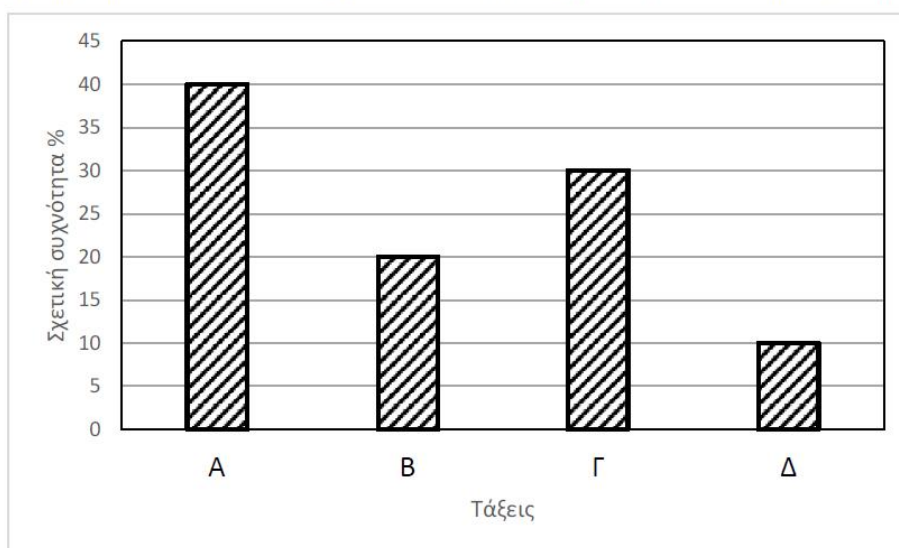
β) Για τις τάξεις Α', Β' και Γ', οι σχετικές συχνότητες % είναι 40, 20 και 30, αντίστοιχα, σύμφωνα με το κυκλικό διάγραμμα.

Για την Δ' τάξη, η σχετική συχνότητα % είναι $100 - (40 + 20 + 30) = 10$.

Άρα, συμπληρώνουμε τον πίνακα:

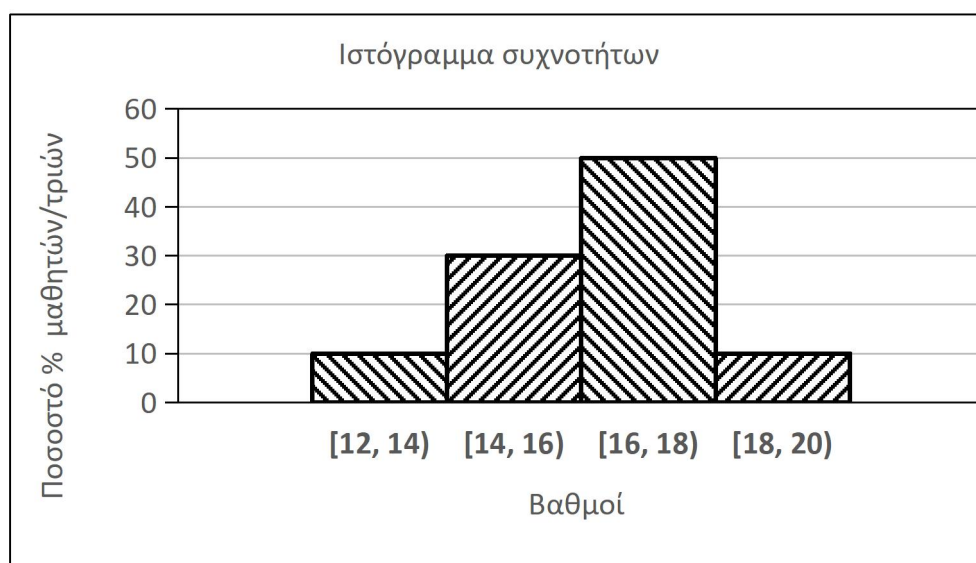
Τάξη	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
A	40
B	20
Γ	30
Δ	10
Σύνολο	100

γ) Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω στοιχεία σχεδιάζουμε το ζητούμενο ραβδόγραμμα.



32212

Το παρακάτω ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων % αντιστοιχεί στους βαθμούς 50 μαθητών και μαθητριών της Β΄ τάξης ενός Λυκείου, στο μάθημα της Λογοτεχνίας για το Α΄ τετράμηνο.



α) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων.

(Μονάδες 10)

Κλάσεις με τους βαθμούς	Συχνότητα n_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
[12, 14)		
[14, 16)		
[16, 18)		
[18, 20)		
Σύνολο		

β) Τι ποσοστό των μαθητών ή μαθητριών έχουν βαθμό:

i. 18 ή περισσότερο.

(Μονάδες 4)

ii. μικρότερο από 14.

(Μονάδες 4)

iii. τουλάχιστον 14.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Αντλώντας στοιχεία από το ιστόγραμμα συχνοτήτων συμπληρώνουμε την στήλη «σχετική συχνότητα $f_i\%$ ».

Εφόσον οι μαθητές και μαθήτριες είναι 50, τότε κάθε συχνότητα αντιστοιχεί στο μισό της αντίστοιχης σχετική συχνότητας %, δηλαδή $n_i = (f_i\%):2$.

Π.χ. $n_1 = (f_1\%):2 = 10:2 = 5$.

Ομοίως συμπληρώνουμε τη στήλη «συχνότητα n_i ».

Κλάσεις με τους βαθμούς	Συχνότητα n_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
[12, 14)	5	10
[14, 16)	15	30
[16, 18)	25	50
[18, 20)	5	10
Σύνολο	50	100

β) i. Βαθμό 18 ή περισσότερο έχουν οι μαθητές ή οι μαθήτριες που οι βαθμοί τους ανήκουν στην κλάση $[18, 20)$, άρα 10%.

ii. Βαθμό μικρότερο από 14 έχουν οι μαθητές ή οι μαθήτριες που οι βαθμοί τους ανήκουν στην κλάση $[12, 14)$, άρα 10%.

iii. Βαθμό τουλάχιστον 14 έχουν οι μαθητές ή οι μαθήτριες που οι βαθμοί τους ανήκουν στις κλάσεις $[14, 16)$, $[16, 18)$ και $[18, 20)$. Η', αλλιώς εκείνοι και εκείνες που δεν ανήκουν στην κλάση $[12, 14)$, άρα $100\% - 10\% = 90\%$.

27314

Δίνεται η παρακάτω λίστα δεδομένων:

2 , 3 , 2 , 1 , 2 , 3 , 2 , 2 , 1.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 2$,

(Μονάδες 5)

ii. η διάμεσος είναι $\delta = 2$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε:

i. τη διακύμανση,

(Μονάδες 5)

ii. την τυπική απόκλιση,

(Μονάδες 5)

iii. τον συντελεστή μεταβλητότητας.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α)

i. Το πλήθος των παρατηρήσεων 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 2, 1 είναι $n = 9$.

Η μέση τιμή είναι:

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 + t_9}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{2+3+2+1+2+3+2+2+1}{9}$$

$$\bar{x} = \frac{18}{9}$$

$$\bar{x} = 2$$

Εναλλακτικά: Οι τιμές των παρατηρήσεων είναι οι $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ και $x_3 = 3$, με αντίστοιχες συχνότητες $v_1 = 2$, $v_2 = 5$ και $v_3 = 2$, οπότε η μέση τιμή είναι:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 2}{9}$$

$$\bar{x} = \frac{18}{9}$$

$$\bar{x} = 2$$

ii. Για να υπολογίσουμε τη διάμεσο, διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά. Η διάμεσος δ είναι τότε η μεσαία παρατήρηση, αφού το $n = 9$ είναι περιττός αριθμός, άρα είναι η 5^η παρατήρηση:

$$1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3$$

Επομένως $\delta = 2$.

β)

i. Η διακύμανση s^2 είναι:

$$s^2 = \frac{(t_1 - \bar{x})^2 + (t_2 - \bar{x})^2 + (t_3 - \bar{x})^2 + (t_4 - \bar{x})^2 + (t_5 - \bar{x})^2 + (t_6 - \bar{x})^2 + (t_7 - \bar{x})^2 + (t_8 - \bar{x})^2 + (t_9 - \bar{x})^2}{n}$$

$$s^2 = \frac{(2-2)^2 + (3-2)^2 + (2-2)^2 + (1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2 + (2-2)^2 + (2-2)^2 + (1-2)^2}{9}$$

$$s^2 = \frac{1+1+1+1}{9}$$

$$s^2 = \frac{4}{9}$$

ii. Η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$.

iii. Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{2/3}{2} = \frac{1}{3}$.

30224

Οι βαθμοί μιας μαθήτριας της Γ' λυκείου στα διαγωνίσματα των μαθηματικών κατά τη διάρκεια του έτους ήταν : 12 ,14, 15, 16, 20, 17, 12, 14 .

α) Να υπολογιστεί η μέση τιμή των βαθμών της. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογιστεί η διάμεσος των βαθμών της. (Μονάδες 4)

γ) Ναδειχτεί ότι η διακύμανση είναι ίση με $\frac{25}{4}$. (Μονάδες 8)

δ) Να υπολογιστεί ο συντελεστής μεταβλητότητας. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Η μέση τιμή των βαθμών της δίνεται από τον τύπο $\bar{x} = \frac{t_1+t_2+t_3+\dots+t_v}{v}$ και μετά από αντικατάσταση προκύπτει : $\bar{x} = \frac{12+12+14+14+15+16+17+20}{8} = \frac{120}{8} = 15$

β) Οι βαθμολογίες σε αύξουσα σειρά είναι οι : 12,12,14,14,15,16,17,20 και επειδή το πλήθος είναι άρτιο $\delta = \frac{14+15}{2} = 14,5$

γ) Η διακύμανση της βαθμολογίας δίνεται από τον τύπο

$s^2 = \frac{(t_1-\bar{x})^2+(t_2-\bar{x})^2+(t_3-\bar{x})^2+\dots+(t_v-\bar{x})^2}{v}$ και μετά από αντικατάσταση προκύπτει :

$$s^2 = \frac{(12-15)^2+(12-15)^2+(14-15)^2+(14-15)^2+(15-15)^2+(16-15)^2+(17-15)^2+(20-15)^2}{8} =$$

$$= \frac{(-3)^2+(-3)^2+(-1)^2+(-1)^2+(0)^2+(1)^2+(2)^2+(5)^2}{8} =$$

$$= \frac{9+9+1+1+0+1+4+25}{8} = \frac{50}{8} = \frac{25}{4}.$$

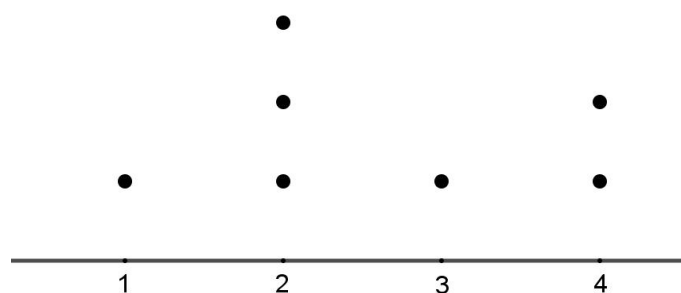
δ) Ο συντελεστής μεταβλητότητας δίνεται από τον τύπο $CV = \frac{s}{|\bar{x}|}$. Για να υπολογιστεί πρέπει

να βρούμε την τυπική απόκλιση που είναι $s = \sqrt{s^2}$, ειδικότερα $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$,

όπου με αντικατάσταση προκύπτει : $CV = \frac{\frac{5}{2}}{15} = \frac{1}{6} \approx 0,17$.

31507

Στο επόμενο σημειόγραμμα φαίνονται τα γκολ που σημείωσε η εθνική ομάδα της Αργεντινής στο Μουντιάλ του Κατάρ το 2022 στα επτά συνολικά παιχνίδια που χρειάστηκε να αγωνισθεί μέχρι να κατακτήσει το παγκόσμιο κύπελλο.



α) Με βάση το σημειόγραμμα να καταγράψετε τον αριθμό των γκολ σε κάθε αγώνα.

(Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε για τα γκολ που σημείωσε η ομάδα στα 7 αυτά παιχνίδια:

- Τη μέση τιμή. (Μονάδες 5)
- Το εύρος. (Μονάδες 5)
- Την επικρατούσα τιμή. (Μονάδες 5)
- Την διάμεσο. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Τα γκολ που σημείωσε η ομάδα στους επτά αγώνες, σύμφωνα με το σημειόγραμμα, σε αύξουσα διάταξη, είναι:

1,2,2,2,3,4,4

β)

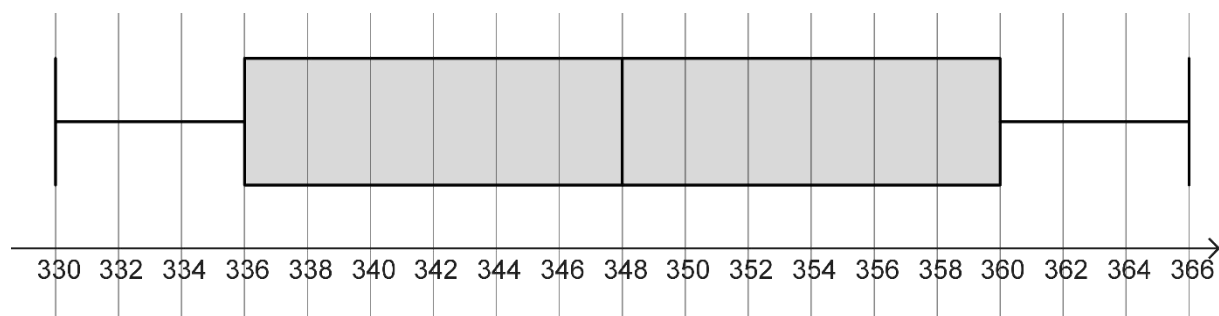
- Η μέση τιμή των παραπάνω παρατηρήσεων είναι:

$$\bar{x} = \frac{1+2+2+2+3+4+4}{7} = \frac{18}{7}, \text{ δηλαδή περίπου ίση με } 2,57$$

- Το εύρος R είναι η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση, δηλαδή $R=4-1=3$.
- Η επικρατούσα τιμή Mo είναι η παρατήρηση με τη μεγαλύτερη συχνότητα. Στην περίπτωσή μας είναι $Mo=2$.
- Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι επτά (περιττό) και οι τιμές είναι σε αύξουσα διάταξη. Η διάμεσος είναι η μεσαία τιμή, δηλαδή $\delta=2$.

32214

Η Χριστίνα πηγαίνει για τρέξιμο τουλάχιστον 5 φορές την εβδομάδα. Τις τελευταίες τέσσερις εβδομάδες μετρούσε κάθε φορά σε πόσα δευτερόλεπτα έτρεχε 1 χιλιόμετρο. Το παρακάτω θηκόγραμμα αντιστοιχεί στις μετρήσεις της Χριστίνας.



α) Χρησιμοποιώντας το θηκόγραμμα, να βρείτε:

- το εύρος R των μετρήσεων,
- τη διάμεσο δ των μετρήσεων,
- το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο των μετρήσεων, Q_1 και Q_3 αντίστοιχα,
- το ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q των μετρήσεων.

(Μονάδες 20)

β) Ποιος είναι ο καλύτερος (μικρότερος) χρόνος που έκανε η Χριστίνα;

(Μονάδες 5)

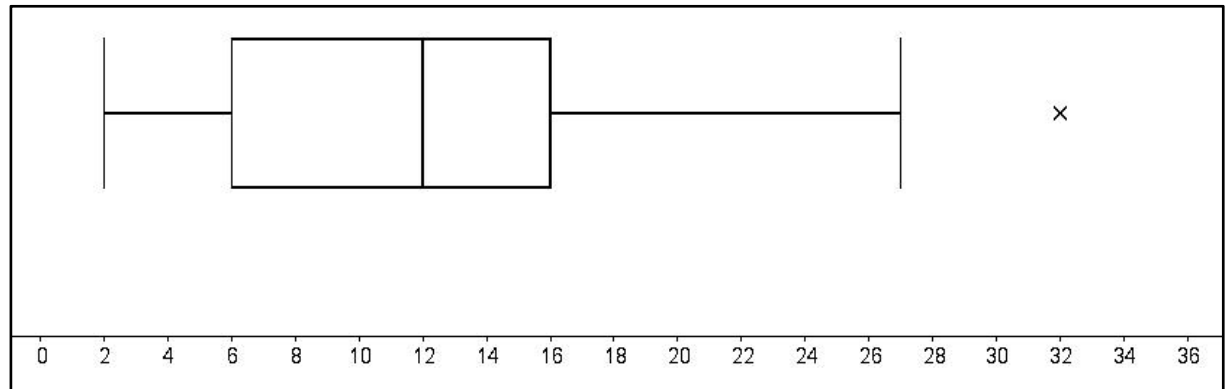
ΛΥΣΗ

α) Από τα στοιχεία το θηκογράμματος καταλαβαίνουμε ότι:

- Η μέγιστη μέτρηση είναι 366 δευτερόλεπτα και η ελάχιστη 330 δευτερόλεπτα, άρα το εύρος είναι $R = 366 - 330 = 36$ δευτερόλεπτα.
 - Η διάμεσος είναι $\delta = 348$ δευτερόλεπτα.
 - Το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο είναι $Q_1 = 336$ και $Q_3 = 360$ δευτερόλεπτα.
 - Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι $Q = Q_3 - Q_1 = 360 - 336 = 24$ δευτερόλεπτα.
- β) Σύμφωνα με το θηκόγραμμα είναι 330 δευτερόλεπτα.

29015

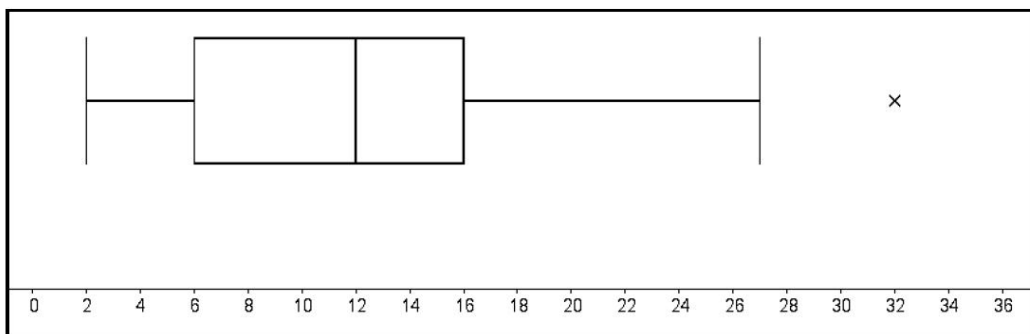
Το παρακάτω θηκόγραμμα παρουσιάζει τους πόντους ενός παίκτη μιας ομάδας καλαθοσφαίρισης στα 15 τελευταία παιχνίδια της ομάδας του.



Με τη βοήθεια του θηκογράμματος να βρείτε:

- α) Το εύρος R των πόντων του παίκτη. (Μονάδες 6)
- β) Τα τεταρτημόρια Q_1 , Q_2 και Q_3 . (Μονάδες 9)
- γ) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q . (Μονάδες 5)
- δ) Τις ακραίες τιμές. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ



- α) Το εύρος R ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση. Στην περίπτωση μας είναι $R = 32 - 2 = 30$.
- β) Από το θηκόγραμμα έχουμε ότι $Q_1=6$, $Q_2=12$ και $Q_3=16$.
- γ) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q είναι η διαφορά του πρώτου τεταρτημορίου Q_1 από το τρίτο τεταρτημόριο Q_3 , δηλαδή $Q=Q_3-Q_1=16-6=10$.
- δ) Οι παρατηρήσεις που βρίσκονται έξω από το διάστημα $[Q_1-1,5Q, Q_3+1,5Q] = [-9, 31]$ ονομάζονται ακραίες τιμές. Στην περίπτωση μας ακραία τιμή είναι η τιμή 32.

ΘΕΜΑΤΑ 4

34605

Η Μαρία και οι συμμαθητές της συμμετείχαν σε έναν διαγωνισμό στη Στατιστική. Η βαθμολογία της Μαρίας αρχικά καταχωρήθηκε ως 3 πριν διορθωθεί με τη σωστή βαθμολογία που ήταν 13. Τα παρακάτω θηκογράμματα θ_1 και θ_2 παρουσιάζουν τις βαθμολογίες των παιδιών, πριν και μετά τη διόρθωση στη βαθμολογία της Μαρίας.

α) Ποια από τα δύο θηκογράμματα θ_1 και θ_2 :

- έχει ακραία τιμή;
(Μονάδες 3)
- περιέχει τη σωστή βαθμολογία της Μαρίας;
(Μονάδες 4)

β) Να συγκρίνετε τις δύο βαθμολογίες, πριν και μετά τη διόρθωση, ως προς:

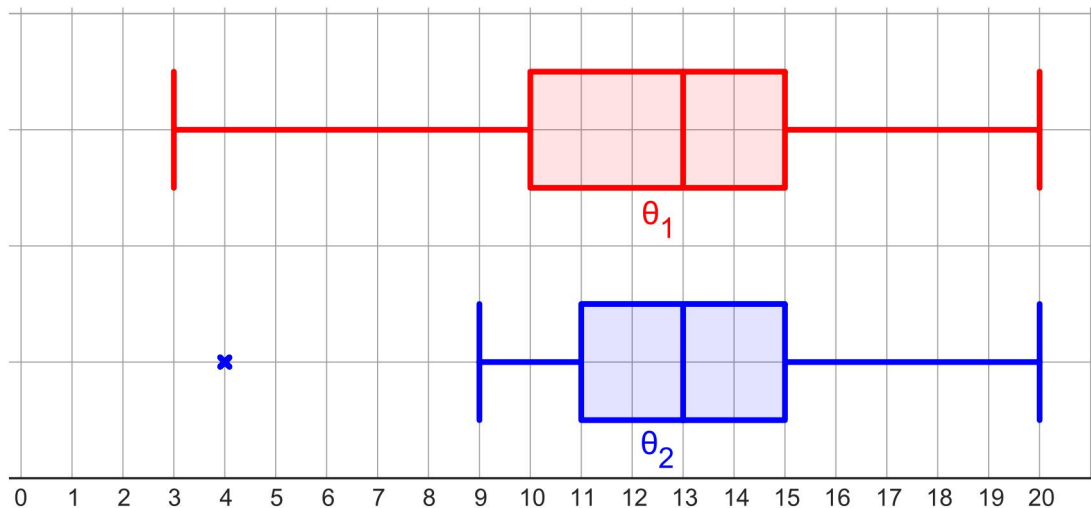
- τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο,
(Μονάδες 6)

iv. το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος,

(Μονάδες 6)

v. τη μέση τιμή.

(Μονάδες 6)



ΛΥΣΗ

α) Από τα θηκογράμματα θ_1 και θ_2 παρατηρούμε ότι:

- i. Ακραία τιμή, την παρατήρηση 4, έχει η βαθμολογία που παρουσιάζεται στο θ_2 .
- ii. Τη σωστή βαθμολογία της Μαρίας περιέχει το θ_2 , αφού στο θ_2 δεν περιλαμβάνεται η λανθασμένη παρατήρηση 3.

β) Από τα θηκογράμματα θ_1 και θ_2 παρατηρούμε ότι:

- i. Η διάμεσος είναι η ίδια, $\delta = 13$ και στις δύο βαθμολογίες, πριν και μετά τη διόρθωση.

Το πρώτο τεταρτημόριο για τη βαθμολογία που παρουσιάζεται στο θ_1 είναι $Q_1 = 10$ και για τη βαθμολογία που παρουσιάζεται στο θ_2 είναι $Q'_1 = 11$. Επομένως $Q_1 < Q'_1$.

Το τρίτο τεταρτημόριο είναι το ίδιο, $Q_3 = Q'_3 = 15$ και στις δύο βαθμολογίες.

- ii. Για τη βαθμολογία που παρουσιάζεται στο θ_1 , η μέγιστη παρατήρηση είναι 20 και η ελάχιστη 3, οπότε το εύρος είναι $R = 20 - 3 = 17$.

Για τη βαθμολογία που παρουσιάζεται στο θ_2 , η μέγιστη παρατήρηση είναι 20 και η ελάχιστη 4, οπότε το εύρος είναι $R' = 20 - 4 = 16$.

Επομένως $R > R'$, άρα το εύρος της λανθασμένης βαθμολογίας είναι μεγαλύτερο από το εύρος της διορθωμένης βαθμολογίας.

Για τη βαθμολογία που παρουσιάζεται στο θ_1 , το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι

$$Q = Q_3 - Q_1 = 15 - 10 = 5.$$

Για τη βαθμολογία που παρουσιάζεται στο θ_2 , το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι

$$Q' = Q'_3 - Q'_1 = 15 - 11 = 4.$$

Επομένως $Q > Q'$, άρα το ενδοτεταρτημοριακό εύρος της λανθασμένης βαθμολογίας είναι μεγαλύτερο από το εύρος της διορθωμένης βαθμολογίας.

iii. Η μέση τιμή της διορθωμένης βαθμολογίας, είναι μεγαλύτερη από τη μέση τιμή της λανθασμένης βαθμολογίας, αφού η παρατήρηση 3 αντικαταστάθηκε με την μεγαλύτερη παρατήρηση 13.

Σημείωση: Αν το πλήθος των παιδιών που συμμετείχαν στον διαγωνισμό είναι n , τότε η μέση

τιμή αυξήθηκε κατά $\frac{-3+13}{n} = \frac{10}{n}$.

32877

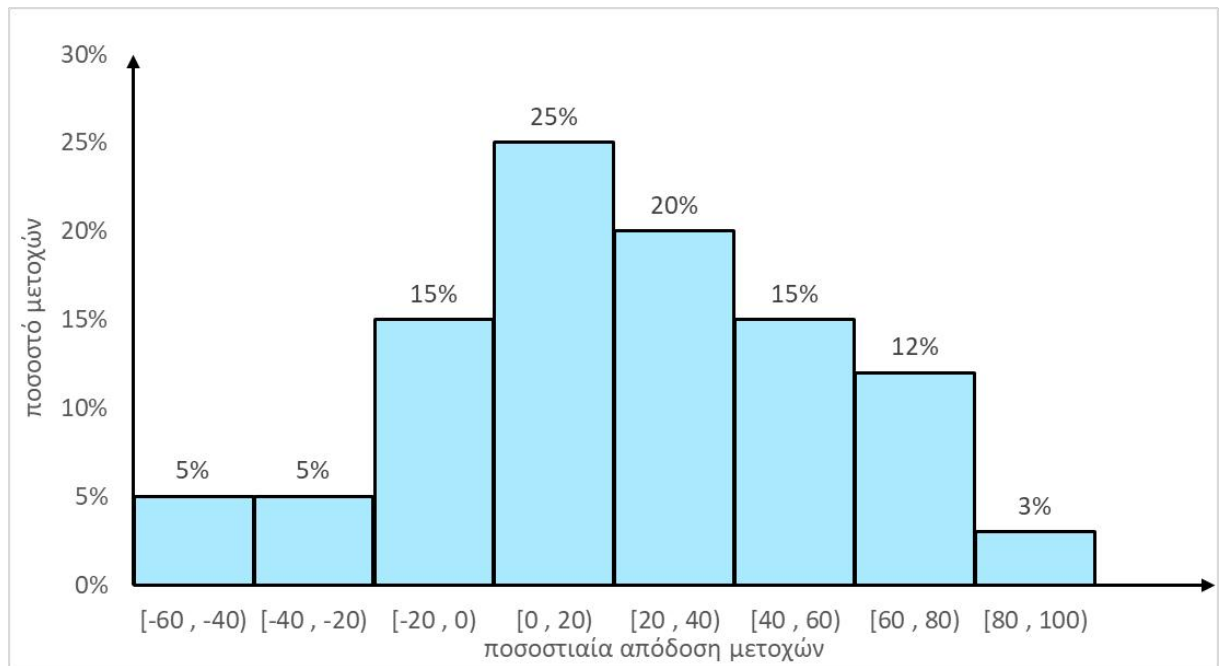
Το παρακάτω ιστόγραμμα δείχνει την κατανομή των ποσοστιαίων ετήσιων αποδόσεων, όλων των μετοχών που είναι εισηγμένες σε ένα Χρηματιστήριο. Για παράδειγμα, η απόδοση για μια μετοχή -20 σημαίνει μείωση της τιμής της κατά 20%, ενώ η απόδοση 20 σημαίνει αύξηση της τιμής της κατά 20%.

α) Μεταξύ ποιων τιμών είναι η μικρότερη ποσοστιαία ετήσια απόδοση και μεταξύ ποιων τιμών είναι η μεγαλύτερη;
(Μονάδες 7)

β) Επιλέγουμε τυχαία μία μετοχή. Να βρείτε τις πιθανότητες για αυτή τη μετοχή:

- i. η τιμή της να αυξήθηκε, αλλά η ποσοστιαία αύξηση είναι μικρότερη από 20%,
- ii. η τιμή της να μειώθηκε,
- iii. η τιμή της να μεταβλήθηκε το πολύ κατά 20%.

(Μονάδες 18)



ΛΥΣΗ

α) Η μικρότερη ετήσια απόδοση είναι στην πρώτη κλάση του ιστογράμματος από αριστερά, την $[-60, -40)$ άρα είναι μείωση της τιμής μιας μετοχής μεταξύ 60% και 40%.

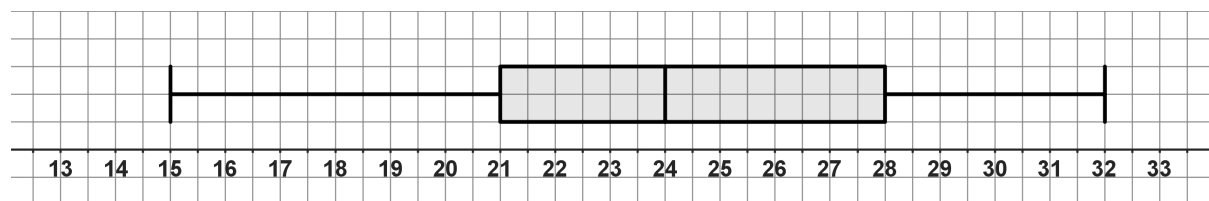
Η μεγαλύτερη ετήσια απόδοση είναι στην πρώτη κλάση του ιστογράμματος από δεξιά, την $[80, 100)$ άρα είναι αύξηση της τιμής μιας μετοχής μεταξύ 80% και 100%.

β) Επειδή η επιλογή της μετοχής γίνεται τυχαία μπορούμε να θεωρήσουμε ότι όλες οι μετοχές είναι εξίσου πιθανές να επιλεγούν. Άρα από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε:

- Η πιθανότητα η τιμή της μετοχής να αυξήθηκε, αλλά η ποσοστιαία αύξηση είναι μικρότερη από 20%, είναι ίση με τη σχετική συχνότητα της κλάσης $[0, 20)$ που είναι 25%. Άρα η πιθανότητα είναι 0,25.
- Η πιθανότητα η τιμή της μετοχής να μειώθηκε, είναι ίση με το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων των κλάσεων $[-60, -40)$, $[-40, -20)$ και $[-20, 0)$ που είναι $5\% + 5\% + 15\% = 25\%$. Άρα η πιθανότητα είναι 0,25.
- Η πιθανότητα η τιμή της μετοχής να μεταβλήθηκε το πολύ κατά 20%, είναι ίση με το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων των κλάσεων $[-20, 0)$ και $[0, 20)$ που είναι $15\% + 25\% = 40\%$. Άρα η πιθανότητα είναι 0,4.

32217

Ο Κώστας εργάζεται στο τηλεφωνικό κέντρο εταιρείας πληροφορικής εξυπηρετώντας τηλεφωνικά τους πελάτες. Το παρακάτω θηκόγραμμα αντιστοιχεί στους πελάτες ανά ημέρα που εξυπηρέτησε ο Κώστας σε 20 ημέρες.



α) Ποιος ήταν ο μικρότερος και ποιος ο μεγαλύτερος αριθμός πελατών ανά ημέρα που εξυπηρέτησε ο Κώστας αυτές τις 20 ημέρες;

(Μονάδες 8)

β) Χρησιμοποιώντας το θηκόγραμμα, να βρείτε τα τεταρτημόρια Q_1 και Q_3 και τη διάμεσο δ .

(Μονάδες 9)

γ) Ο Κώστας θέλει να καταγράψει τις 10 πιο «απασχολημένες» ημέρες του με κριτήριο τον αριθμό των πελατών που εξυπηρέτησε κάθε ημέρα.

Μια ημέρα εξυπηρέτησε 23 πελάτες και μια άλλη ημέρα εξυπηρέτησε 25 πελάτες. Ποια ή ποιες από αυτές τις δύο ημέρες ανήκουν στις 10 πιο απασχολημένες του;

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Από τα στοιχεία το θηκογράμματος ο μεγαλύτερος αριθμός πελατών που εξυπηρετήσε ο Κώστας σε μία ημέρα είναι 32. Αντίστοιχα, ο μικρότερος ήταν 15.

β) Για το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο είναι $Q_1 = 21$ και $Q_3 = 28$ πελάτες.

Για τη διάμεσο ισχύει $\delta = 24$.

γ) Οι παρατηρήσεις (καταγραφές πελατών ανά ημέρα) είναι 20. Οπότε το 50% των παρατηρήσεων είναι 10.

Η διάμεσος είναι 24. Αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε παρατήρηση μεγαλύτερη από 24 ανήκει στις 10 ημέρες με περισσότερους πελάτες. Ο αριθμός 23 είναι μικρότερος από τη διάμεσο, άρα δεν ανήκει σε αυτές τις 10 ημέρες. Δηλαδή δεν ανήκει στις 10 πιο απασχολημένες ημέρες. Αντίθετα ο αριθμός 25 είναι μεγαλύτερος από τη διάμεσο, άρα ανήκει στις 10 πιο απασχολημένες ημέρες.

(εναλλακτικά: από το θηκόγραμμα φαίνεται ότι το 23 είναι αριστερά από τη διάμεσο, άρα δεν ανήκει στις 10 ημέρες με τους περισσότερους πελάτες. Αντίθετα το 25 είναι δεξιά από τη διάμεσο, άρα ανήκει στις 10 ημέρες με τους περισσότερους πελάτες.)

32893

Μια εταιρεία τροφίμων χρησιμοποιεί ένα αυτόματο μηχάνημα για να συσκευάσει βρώσιμες ελιές σε δοχεία 250 γραμμαρίων (αναγραφόμενη ετικέτα). Παρακάτω δίνεται το καθαρό βάρος από ένα τυχαίο δείγμα 15 τέτοιων δοχείων.

245	245	250	247	250	245	250	250	245	249	245	242	247	250	245
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

α) Για το παραπάνω δείγμα:

i. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή.

(Μονάδες 3)

ii. Να βρείτε τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο.

(Μονάδες 6)

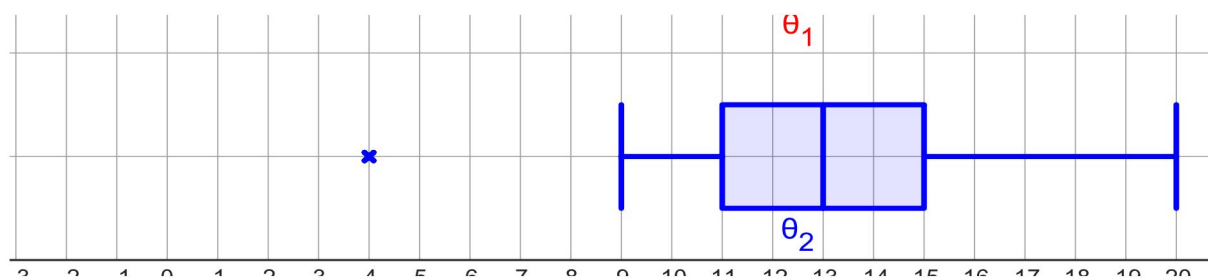
iii. Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα.

(Μονάδες 6)

β) Μια μικρή οικογενειακή επιχείρηση συσκευάζει το ίδιο προϊόν σε δοχεία 250 γραμμαρίων, με το χέρι. Επιλέχθηκε τυχαίο δείγμα 15 δοχείων και το καθαρό βάρος των δοχείων αυτών, παριστάνεται με το παρακάτω θηκόγραμμα. Να βρείτε τη

μέγιστη και την ελάχιστη τιμή, τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο.

(Μονάδες 5)



γ) Συγκρίνοντας τις απαντήσεις σας, στα ερωτήματα α) και β), ποιος πιστεύετε ότι είναι ο πιο ακριβής τρόπος πλήρωσης των δοχείων, με αυτόματο μηχάνημα ή με το χέρι; (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α)

i. Η μέγιστη τιμή είναι $x_{\max} = 250$ και η ελάχιστη τιμή $x_{\min} = 242$.

ii. Για να υπολογίσουμε τη διάμεσο διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά.

242, 245, 245, **245**, 245, 245, 245, **247**, 247, 249, 250, **250**, 250, 250, 250

Επειδή το πλήθος των διατεταγμένων παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός, 15, η διάμεσος δ είναι η μεσαία παρατήρηση, που είναι η 8η, άρα $\delta = 247$.

Για τον υπολογισμό του πρώτου Q_1 και του τρίτου Q_3 τεταρτημορίου έχουμε:

Επειδή το πλήθος των διατεταγμένων παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός, αφαιρούμε από το δείγμα τη διάμεσο και διακρίνουμε το πρώτο μισό, του οποίου η διάμεσος είναι το Q_1 και το δεύτερο μισό, του οποίου η διάμεσος είναι το Q_3 , όπως φαίνεται παραπάνω. Επομένως $Q_1 = 245$ και $Q_3 = 250$.

iii. Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q είναι η διαφορά του πρώτου τεταρτημορίου από το τρίτο τεταρτημόριο, άρα $Q = Q_3 - Q_1 = 250 - 245 = 5$.

Είναι

$$Q_1 - 1,5Q = 245 - 1,5 \cdot 5 = 245 - 7,5 = 237,5 \text{ και}$$

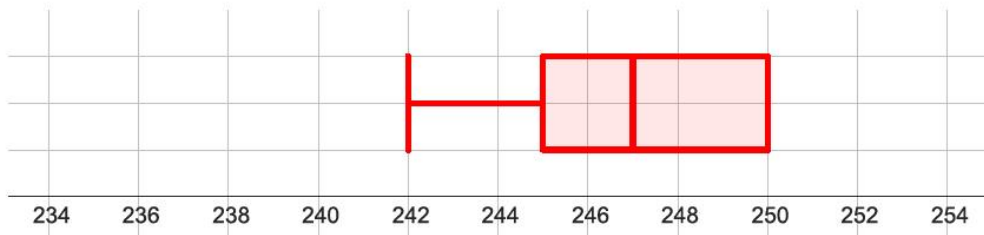
$$Q_3 + 1,5Q = 250 + 1,5 \cdot 5 = 250 + 7,5 = 257,5$$

Παρατηρούμε ότι δεν βρίσκονται παρατηρήσεις έξω από το διάστημα

$$[Q_1 - 1,5Q, Q_3 + 1,5Q] = [237,5, 257,5]$$

άρα δεν υπάρχουν ακραίες τιμές.

Επομένως το θηκόγραμμα είναι το παρακάτω:



β) Από το δοθέν θηκόγραμμα

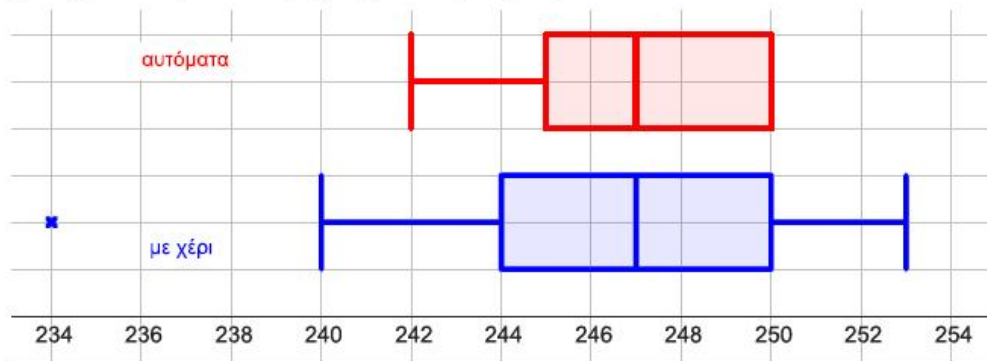


έχουμε:

μέγιστη τιμή $x'_{\max} = 253$, ελάχιστη τιμή $x'_{\min} = 234$,

διάμεσος $\delta' = 247$, $Q'_1 = 244$ και $Q'_3 = 250$

γ) Συγκρίνοντας τα δύο θηκογράμματα παρατηρούμε ότι:



η διάμεσος (247) και το τρίτο τεταρτημόριο (250) είναι τα ίδια και στα δύο δείγματα. Όμως το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι μικρότερα στην περίπτωση της αυτόματης πλήρωσης των δοχείων έναντι αυτής με το χέρι:

$R = 250 - 242 = 8$ έναντι $R' = 253 - 234 = 19$ και

$Q = 250 - 245 = 5$ έναντι $Q' = 250 - 244 = 6$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ο τρόπος πλήρωσης των δοχείων, είναι πιο ακριβής με αυτόματο μηχάνημα παρά με το χέρι.

32218

Δίνονται οι παρακάτω είκοσι παρατηρήσεις:

4, 5, 6, 4, 5, 7, 2, 4, 8, 11, 6, 7, 7, 4, 5, 7, 6, 10, 9, 9

α) Να υπολογίσετε:

i. την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή,

(Μονάδες 4)

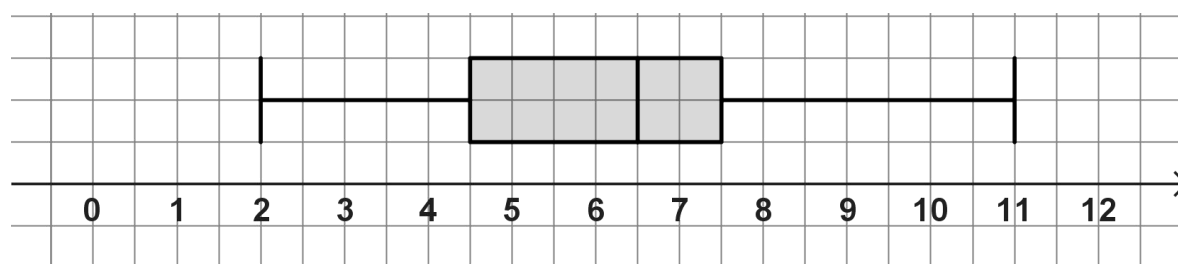
ii. τη διάμεσο δ ,

(Μονάδες 4)

iii. τα τεταρτημόρια Q_1 και Q_3 .

(Μονάδες 4)

β) Ένας συμμαθητής σας ισχυρίζεται ότι το παρακάτω θηκόγραμμα αντιστοιχεί στα παραπάνω δεδομένα. Ωστόσο έχει ένα λάθος. Μπορείτε να το εντοπίσετε;



(Μονάδες 8)

γ) Να κάνετε αλλαγή σε μία μόνο από τις παραπάνω παρατηρήσεις, έτσι ώστε στο νέο σύνολο είκοσι παρατηρήσεων που θα προκύψει, να αντιστοιχεί το θηκόγραμμα του β) ερωτήματος.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) i. Η ελάχιστη τιμή είναι $x_{\min} = 2$ και η μέγιστη $x_{\max} = 11$.

ii. Γράφουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

2, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 10, 11

Εφόσον το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο και μάλιστα 20, η διάμεσος δ είναι ίση με τον μέσο όρο 10^{ης} και 11^{ης} παρατήρησης.

Η 10^η και η 11^η παρατήρηση είναι ίσες με 6 η καθεμία. Άρα $\delta = \frac{6+6}{2} = 6$.

iii. Το Q_1 είναι ίσο με τον μέσο όρο 5^{ης} και 6^{ης} παρατήρησης, δηλαδή 4 και 5.

Άρα $Q_1 = \frac{4+5}{2} = 4,5$.

Η 15^η και η 16^η παρατήρηση είναι 7 και 8 αντίστοιχα. Άρα $Q_3 = \frac{7+8}{2} = \frac{15}{2} = 7,5$.

β) Το λάθος στο θηκόγραμμα του σχήματος είναι η διάμεσος, που φαίνεται να είναι 6,5. Η διάμεσος του συνόλου των παρατηρήσεων είναι $\delta = 6$.

γ) Στο σύνολο παρατηρήσεων που δίνεται κάνουμε την εξής αλλαγή. Αντικαθιστούμε ένα από τα 6 με 7. Τότε έχουμε:

2, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 10, 11

Το νέο δείγμα έχει τα ίδια $x_{\min}$, $x_{\max}$, Q_1 και Q_3 και $\delta = 6,5$.

Επίσης:

$$Q = Q_3 - Q_1 = 7,5 - 4,5 = 3$$

$$Q_1 - 1,5Q = 4,5 - 1,5 \cdot 3 = 0$$

$$Q_3 + 1,5Q = 7,5 + 1,5 \cdot 3 = 11,5$$

Επομένως δεν υπάρχουν ακραίες παρατηρήσεις, όπως και στο θηκόγραμμα του σχήματος.

Άρα σε αυτό το δείγμα αντιστοιχεί το θηκόγραμμα τους σχήματος.

27331

Για την εισαγωγή σε μία σχολή, μία γυναίκα ή ένας άνδρας είναι επιλέξιμοι αν το ύψος τους σε cm, είναι τουλάχιστον 170. Η κατανομή του ύψους των γυναικών είναι κανονική με μέση τιμή 163 και τυπική απόκλιση 7 και η κατανομή του ύψους των ανδρών είναι κανονική με μέση τιμή 170. Επιλέγουμε τυχαία μία γυναίκα και έναν άνδρα.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. η πιθανότητα ώστε μία γυναίκα να είναι επιλέξιμη, είναι 0,16,
(Μονάδες 9)

ii. η πιθανότητα ώστε ένας άνδρας να είναι επιλέξιμος, είναι 0,5 .

(Μονάδες 9)

β) Αν για τους άνδρες παραμείνει η απαίτηση του ελάχιστου ύψος στο 170, πόσο θα πρέπει να γίνει η απαίτηση του ελάχιστου ύψους για τις γυναίκες, ώστε για μια γυναίκα να είναι εξίσου πιθανό να είναι επιλέξιμη όσο για έναν άνδρα.
(Μονάδες 7)

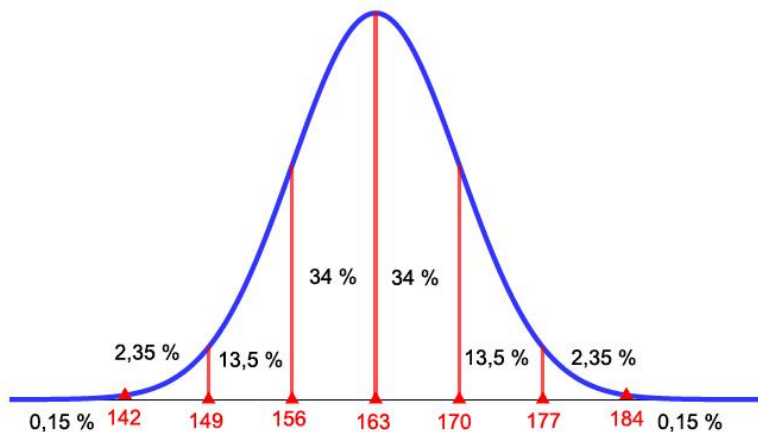
ΛΥΣΗ

α)

i. Τα ύψη των γυναικών είναι κανονικά κατανομημένα με μέση τιμή $\mu = 163$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 7$. Επομένως το ποσοστό των γυναικών είναι:

- 68 % , με ύψος που ανήκει στο διάστημα $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ ή (156 , 170)
- 95% , με ύψος που ανήκει στο διάστημα $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ ή (149 , 177)
- 99,7% , με ύψος που ανήκει στο διάστημα $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ ή (142 , 184)

Σύμφωνα με τα παραπάνω και λόγω συμμετρίας της κανονικής κατανομής έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση (γκαουσιανή καμπύλη) της κατανομής:



Άρα το ποσοστό των γυναικών με ύψος τουλάχιστον 170, είναι

$$\frac{1}{2} \cdot (100\% - 68\%) = \frac{1}{2} \cdot 32\% = 16\%.$$

Επομένως η πιθανότητα ώστε μια γυναίκα να είναι επιλέξιμη είναι $p_1 = 0,16$.

ii. Τα ύψη των ανδρών είναι κανονικά κατανομημένα με μέση τιμή $\mu_\alpha = 170$, όσο είναι και η απαίτηση του ελάχιστου ύψους. Άρα το ποσοστό των ανδρών με ύψος τουλάχιστον 170, είναι 50%. Επομένως η πιθανότητα ώστε ένας άνδρας να είναι επιλέξιμος είναι $p_2 = 0,5$.

β) Για τις γυναίκες το ελάχιστο ύψος, ώστε για μια γυναίκα να είναι εξίσου πιθανό να είναι επιλέξιμη όσο για έναν άνδρα, είναι ίσο με τη μέση τιμή της κατανομής του ύψους των γυναικών, που είναι 163, αφού το ποσοστό των γυναικών με ύψος τουλάχιστον 163, είναι 50%. Τότε η πιθανότητα ώστε μια γυναίκα να είναι επιλέξιμη θα είναι $p_1 = 0,5$, ίση με την πιθανότητα ώστε ένας άνδρας να είναι επιλέξιμος που παραμένει $p_2 = 0,5$.

27339

Ένας δρομέας μεγάλων αποστάσεων, κατέγραψε τα χιλιόμετρα που έτρεξε σε καθεμία από τις 20 ημέρες προπόνησης ενός μήνα και σχημάτισε τον παρακάτω πίνακα:

απόσταση σε χιλιόμετρα	5	7	10	15	20
αριθμός ημερών	4	5	5	5	1

α) Να βρείτε:

i. τη μέση τιμή,

(Μονάδες 7)

ii. τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο.

(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν ακραίες τιμές.

(Μονάδες 6)

γ) Ο δρομέας τον επόμενο μήνα διατήρησε το ίδιο πρόγραμμα προπόνησης, εκτός από την μέγιστη απόσταση την οποία αύξησε σε 28 χιλιόμετρα όπως φαίνεται παρακάτω:

απόσταση σε χιλιόμετρα	5	7	10	15	28
αριθμός ημερών	4	5	5	5	1

Ποια από τα μέτρα θέσης του α) ερωτήματος μεταβάλλονται και ποια όχι; Θα υπάρχουν τώρα ακραίες τιμές;
(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) i) Έχουμε

απόσταση σε χιλιόμετρα x_i	αριθμός ημερών v_i	$v_i x_i$
5	4	20
7	5	35
10	5	50
15	5	75
20	1	20
Αθροίσματα	20	200

Οπότε η μέση τιμή είναι:

$$\bar{x} = \frac{200}{20} = 10 \text{ χιλιόμετρα.}$$

ii) Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

5, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 7, 10, 10, 10, 10, 10, 15, 15, 15, 15, 15, 20

Η διάμεσος δ είναι ο μέσος όρος της 10ης και 11ης παρατήρησης, άρα

$$\delta = \frac{10+10}{2} = 10 \text{ χιλιόμετρα.}$$

Το πρώτο τεταρτημόριο Q_1 είναι ο μέσος όρος της 5ης και της 6ης παρατήρησης, ενώ το τρίτο τεταρτημόριο Q_3 είναι ο μέσος όρος της 15ης και 16ης παρατήρησης, άρα

$$Q_1 = \frac{7+7}{2} = 7 \text{ χιλιόμετρα και}$$

$$Q_3 = \frac{15+15}{2} = 15 \text{ χιλιόμετρα.}$$

β) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι $Q = Q_3 - Q_1 = 15 - 7 = 8$ χιλιόμετρα.

Το διάστημα $[Q_1 - 1,5 Q, Q_3 + 1,5 Q]$ είναι

$$[7 - 1,5 \cdot 8, 15 + 1,5 \cdot 8]$$

$$[7 - 12, 15 + 12]$$

$$[-5, 27]$$

στο οποίο περιλαμβάνονται όλες οι παρατηρήσεις, άρα δεν υπάρχουν ακραίες τιμές.

γ) Η μέγιστη ημερήσια απόσταση από 20 χιλιόμετρα που ήταν, έγινε 28 χιλιόμετρα. Οι παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά είναι τώρα:

5, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 7, 10, 10, 10, 10, 10, 15, 15, 15, 15, 15, 28

Επομένως η διάμεσος, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο δεν μεταβάλλονται.

Η μέση τιμή αυξάνεται και γίνεται $\frac{200-20+28}{20} = \frac{208}{20} = 10,4$ χιλιόμετρα.

Επειδή το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο δεν μεταβάλλονται, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος παραμένει $Q = Q_3 - Q_1 = 8$ και το διάστημα $[Q_1 - 1,5 Q, Q_3 + 1,5 Q]$ παραμένει $[-5, 27]$. Το 28 όμως δεν ανήκει στο διάστημα $[-5, 27]$, άρα είναι ακραία τιμή.