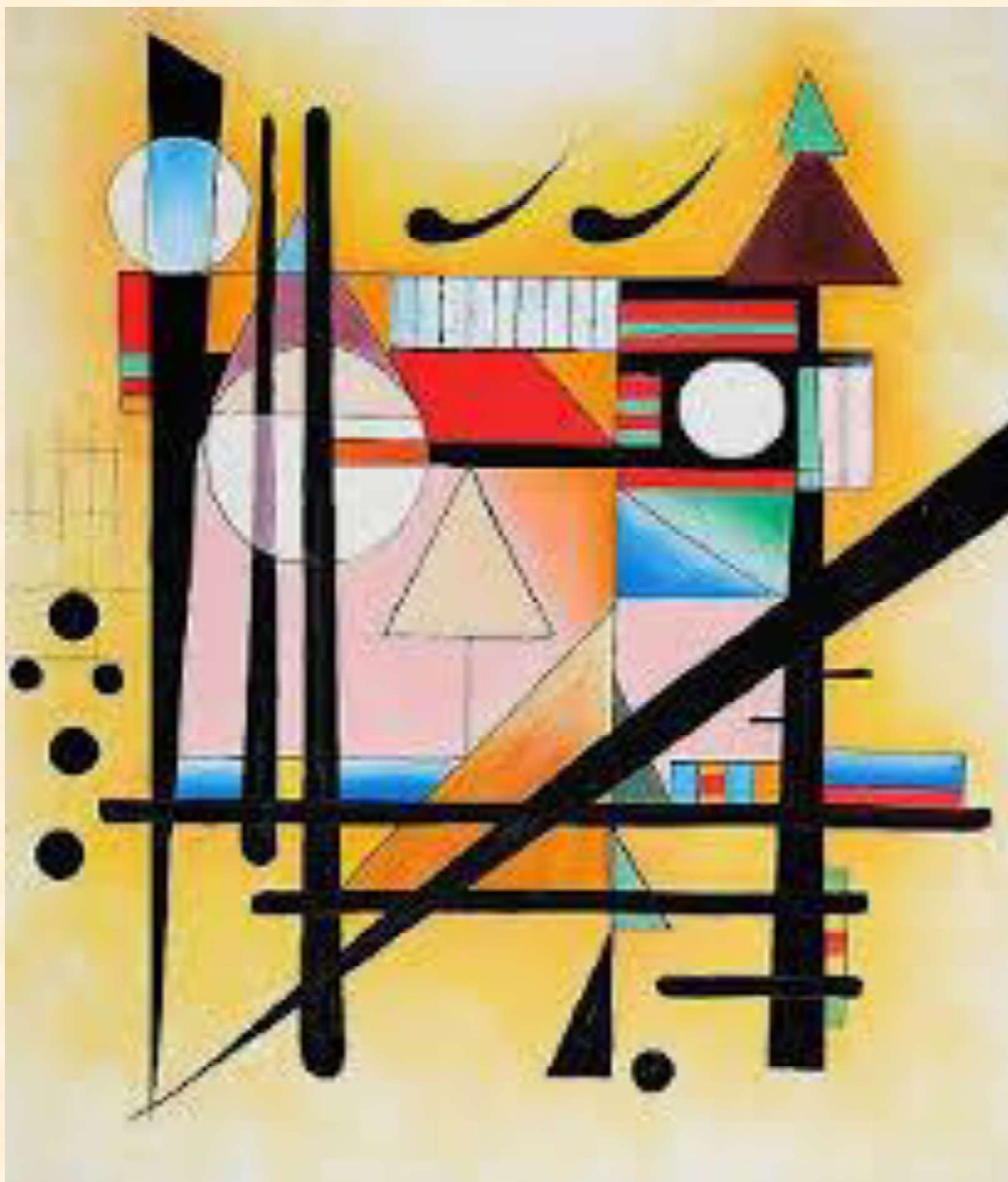


Μαθηματικά Α΄ Λυκείου



14ο Λύκειο Περιστερίου

2021-22

Οι πράξεις των πραγματικών αριθμών και οι ιδιότητες τους

Δυνάμεις

Ορισμός: $\alpha^v = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_v$, $v > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ακόμη ορίζουμε ότι: $\alpha^1 = \alpha$ και με $\alpha \neq 0$: $\alpha^0 = 1$ και $\alpha^{-v} = \frac{1}{\alpha^v}$.

Ιδιότητες

$$1. \alpha^k \cdot \alpha^l = \alpha^{k+l}$$

$$2. \alpha^k \cdot \beta^k = (\alpha \cdot \beta)^k$$

$$3. \frac{\alpha^k}{\alpha^l} = \alpha^{k-l}$$

$$4. \frac{\alpha^k}{\beta^k} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k$$

$$5. (\alpha^k)^l = \alpha^{k \cdot l}$$

1. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\alpha) (x^2)^3 \cdot 5x^4$$

$$\beta) x^{-2} \cdot x^4$$

$$\gamma) \left[(x^{-3})^{-2} \right]^{-5}$$

$$\delta) (2x^2)^3 : (x^{-2})^{-2}$$

$$\epsilon) (xy^3)^2 \cdot x^3y$$

$$\sigma\tau) (-2x)^2 \cdot (-2x^2)$$

$$\zeta) (-x)^3 \cdot (-x)^4 \cdot x^5$$

$$\eta) \frac{6x^3 \cdot y^6}{2x^4 \cdot y^2}$$

$$\theta) \frac{x^{-2} \cdot x^4}{(x^3)^3 \cdot x^7}$$

$$\upsilon) \frac{4\alpha^2 \cdot \beta^8}{x^{-3} \cdot y^5} : \frac{2\alpha^4 \cdot \beta^6}{x^{-5} \cdot y^2}$$

$$\kappa) 2\alpha^2 \cdot \beta^4 \left(\frac{\alpha^{-2} \cdot \beta^{-1}}{2} \right)^{-3} \cdot \left(\frac{\alpha^3 \cdot \beta^2}{2} \right)^2$$

$$\lambda) \frac{3^{100} \cdot \alpha^8 \cdot \beta^4}{9^{49} \cdot (\alpha^3\beta)^2} : \frac{81^{20} \cdot (\alpha^{-2})^4 \cdot (\beta^{-2})^8}{(3^{-2})^{-39} \cdot \alpha^{-6} \cdot \beta^{-14}}$$

2. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις ως μία δύναμη:

$$A = 3^{77} + 3^{77} + 3^{77}$$

$$B = 2^{102} - 2^{101} - 2^{100}$$

$$\Gamma = 2^{59} - 4^{29}$$

$$\Delta = 2^{17} \cdot 3^{18} - 2^{18} \cdot 3^{17}$$

3. Αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι, να αποδείξετε ότι:

$$\left[(\alpha^{-7}\beta^3) : (\alpha\beta)^4 \right] \cdot \frac{(\alpha\beta)^{-2}}{(\alpha^{18})^0 (\beta^{-2}\alpha)^{-1} \beta^7} = 1$$

4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{\alpha^{-12}\beta^4 (\alpha^2\beta^{-5})^3}{\alpha^{-5} (\alpha^{-3}\beta^5)^{-2}} \cdot \left[\frac{(\alpha\beta)^2}{\alpha^2\beta^4} \right]^{-3}$ για

$$\alpha = 1821 \text{ και } \beta = \frac{1}{1821}.$$

5. Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

$$A = \frac{25^5 \cdot 15^{10} \cdot 12^{15} \cdot 14^{20}}{6^{25} \cdot 32^5 \cdot 35^{20}}$$

$$B = \frac{18^{10} \cdot 10^5 \cdot 22^{16} \cdot 25^5}{55^5 \cdot 33^{11} \cdot 15^{10} \cdot 4^{20}}$$

Ταυτότητες

1. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$	2. $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
3. $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$	4. $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
5. $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$	6. $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$
7. $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$	
8. $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$	
9. $\alpha^v - \beta^v = (\alpha - \beta)(\alpha^{v-1} + \alpha^{v-2}\beta + \alpha^{v-3}\beta^2 + \dots + \alpha\beta^{v-2} + \beta^{v-1})$	

6. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(2\alpha + 5)^2$ β) $(x^6 - 2x^3)^2$ γ) $(-3x + y)^2$ δ) $(-5\alpha - 6\beta)^2$
 ε) $(2\alpha - 3\beta)(2\alpha + 3\beta)$ στ) $(x + 5)(5 - x)$ ζ) $(-x + 2y)(x + 2y)$
 η) $(2x + 5y)^3$ θ) $(x^2 - 2)^3$ ι) $(x + 1)(x^2 - x + 1)$
 κ) $(2\alpha - 1)(4\alpha^2 + 2\alpha + 1)$ λ) $4(x - 3)^2 - (2x - 3)^2$
 μ) $(\alpha - 2)^3 - 2(3\alpha + 1)^3 - \alpha(\alpha + 3)(3 - \alpha)$

7. Να αποδείξετε ότι:

α) $(\alpha + 4)^2 + (2\alpha + 3)^2 = \alpha^2 + (2\alpha + 5)^2$ β) $(\alpha - 3\beta)^2 - (\beta - 3\alpha)^2 + 8(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 0$
 γ) $(\alpha - \beta + \gamma)^2 + (\beta - \alpha + \gamma)^2 = 2[(\alpha - \beta)^2 + \gamma^2]$
 δ) $\alpha(\alpha - 3\beta)^2 + \beta(\beta - 3\alpha)^2 = (\alpha + \beta)^3$
 ε) $(x + 2)^3 - 4(x + 1)^3 + 6x^3 + (x - 2)^3 = 4(x - 1)^3$

8. Με τη βοήθεια των ταυτοτήτων να βρείτε τις παρακάτω τιμές:

α) $504^2 - 502^2$ β) $10^6 - 999^2$ γ) $997 \cdot 1003$ δ) $88^2 + 2 \cdot 88 \cdot 12 + 12^2$
 ε) $999^2 + 2 \cdot 999 + 1$ στ) 101^2 ζ) 99^2

9. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = (3x - 1)^2 + (4x - 3)^2 - (5x - 3)^2$ είναι σταθερό.

10.α) Να αποδείξετε ότι $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4$

β) Να υπολογίσετε τη παράσταση $\Pi = \left(1821 + \frac{1}{1821}\right)^2 - \left(1821 - \frac{1}{1821}\right)^2$.

11.α) Να αποδείξετε ότι $(x - 3)^2 + (3x + 1)^2 - 10(x - 1)(x + 1) = 20$.

β) Χωρίς να κάνετε τις πράξεις να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης:

$$997^2 + 3 \cdot 001^2 - 10 \cdot 999 \cdot 1.001.$$

12. Αν $x + \frac{1}{x} = 6$, να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων:

α) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

β) $x^3 + \frac{1}{x^3}$

13. Αν $\alpha + \beta = 6$ και $\alpha \cdot \beta = 7$, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + \beta^2 = 22$

β) $\alpha^3 + \beta^3 = 90$

Παραγοντοποίηση

Η διαδικασία με την οποία μία παράσταση, που είναι άθροισμα μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων, λέγεται παραγοντοποίηση.

α) Κοινός παράγοντας

Αν όλοι οι όροι μιας παράστασης έχουν κοινό παράγοντα, τότε η παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο με τη χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας.

π.χ.: $\alpha x - \alpha y + \alpha z = \alpha(x - y + z)$

β) Ομαδοποίηση

Στην παράσταση $\alpha x + \alpha y + \beta x + \beta y$ δεν υπάρχει κοινός παράγοντας σε όλους τους όρους. Όμως αν από τους δύο πρώτους όρους βγάλουμε κοινό παράγοντα το α και από τους δύο τελευταίους το β η παράσταση γίνεται:

$\alpha(x + y) + \beta(x + y)$ και έτσι σχηματίζονται δύο καινούργιοι όροι με κοινό παράγοντα το $x + y$. Οπότε:

$$\alpha x + \alpha y + \beta x + \beta y = \alpha(x + y) + \beta(x + y) = (x + y)(\alpha + \beta)$$

γ) Διαφορά τετραγώνων: $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$

π.χ.: $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$

δ) Διαφορά - Άθροισμα κύβων

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) \text{ και } \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

π.χ.: $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$, $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

ε) Ανάπτυγμα τετραγώνου

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 \text{ και } \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$$

π.χ.: $x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = (x + 1)^2$, $x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x - 2)^2$

στ) Παραγοντοποίηση τριωνύμου

$$(x + \alpha)(x + \beta) = x^2 + \beta x + \alpha x + \alpha\beta = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

π.χ.: $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$ με $\alpha + \beta = 5$ και $\alpha \cdot \beta = 6$

14. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $2\alpha\beta - 2\alpha\gamma$

β) $9x^2 - 3x$

γ) $x(x + 3) + 7(x + 3)$

δ) $\alpha^2(x - 1) + \beta(1 - x)$

ε) $\alpha(x - y) - (y - x)$

στ) $(2x - 3)(x - 5) - (x + 2)(x - 5)$

ζ) $9 - x^2$	η) $36\beta^2 - 9\gamma^2$	θ) $x^6 - y^4$
ι) $\alpha^4 - \beta^4$	κ) $3x^3 - 3x$	λ) $(\alpha - 2\beta)^2 - 4\beta^2$
μ) $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2$	ν) $x^5 - 16x$	ξ) $x^3 - 8$
		ο) $8x^3 + 27$

15. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις

α) $\alpha x + \alpha y + \beta x + \beta y$	β) $x^2 - y + xy - x$	γ) $\alpha^2 - 2\alpha + 1$	δ) $4x^2 - 4x + 1$
ε) $9y^2 + 12y + 4$	στ) $x^3 - 6x^2 + 9x$	ζ) $x^2 - 7x + 6$	η) $x^2 - 6x + 5$

21. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

α) $x^{v+1} + x^v - x - 1$	β) $x^{v+1} - (v+1)x + v$
----------------------------	---------------------------

22. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα :

α) $\frac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha + \beta}$	β) $\frac{\alpha^5 - \beta^5}{\alpha - \beta}$	γ) $\frac{x^{101} - 101x + 100}{x - 1}$
--	--	---

16. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\frac{\alpha^3 - 8\alpha^2 + 16\alpha}{\alpha^3 - 16\alpha}$	β) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$
γ) $\frac{\alpha^2 + 3\alpha}{2\alpha^2 + 3\alpha} \cdot \frac{4\alpha^2 - 9}{4\alpha^2 - 12\alpha + 9}$	δ) $\frac{\alpha^2 - 4}{\alpha^3 + 8} : \frac{\alpha - 2}{\alpha^2 - 2\alpha + 4}$

17. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\frac{\alpha^4 - 8\alpha^2 + 16}{\alpha^3 - 4\alpha^2 + 4\alpha}$	β) $\frac{\alpha^2 - 25}{\alpha^3 - 125} \cdot \frac{\alpha^2 + 5\alpha + 25}{\alpha^2 + 10\alpha + 25}$
γ) $\frac{4x^2 + 4x + 1}{6x^2 - 3x} : \frac{12x^2 - 3}{2x}$	δ) $(x + y)^2 \cdot (x^{-1} + y^{-1})^{-2}$

18. Αν $A = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$ και $B = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 1}$, να αποδείξετε ότι: $(A + B)^2 - (A - B)^2 = 4$

19. Δίνονται οι παραστάσεις $A = x(x + 3)$ και $B = (x + 1)(x + 2)$.

α) Να αποδείξετε ότι $B = A + 2$ και $AB + 1 = (A + 1)^2$.

β) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1$

20. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ για τους οποίους ισχύει ότι:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{\gamma}{4} \text{ και } \alpha + \beta + \gamma = 45.$$

21. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha^2\gamma + \alpha\gamma^2}{\beta^2\delta + \beta\delta^2} = \left(\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}\right)^3$.

Τράπεζα θεμάτων

22.(1251) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να

ισχύουν: $\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4$ και $\frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$

23.(1254) Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x + 5y}{x - 4y} = -2$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y = 2x$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$.

24.(1318) Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους

ισχύει: $\frac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 + 1} = \frac{\alpha}{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = \frac{\alpha^{22} \cdot (\beta^3)^8}{\alpha^{-2} \cdot (\alpha\beta)^{25}}$

25.(12685). Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$ ισχύει ότι: $(\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) = 4$,

τότε να αποδείξετε ότι: α) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2$ β) $\alpha = \beta$

26.(13088) Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε

$$A = 2(x + y)^2 - (x - y)^2 - 6xy - y^2.$$

α) Να αποδείξετε ότι: $A = x^2$

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

27.(13323) α) Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17.$$

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0$.

28.(13053) Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι **i.** $\beta + \gamma = -\alpha$. **ii.** $\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} = -\alpha$

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{\beta^2}{\gamma + \alpha}$, $\frac{\gamma^2}{\alpha + \beta}$ και να αποδείξετε

ότι $\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = 0$.

Διάταξη πραγματικών αριθμών

Ορισμός: Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό β , και γράφουμε $\alpha > \beta$, όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός.
Δηλαδή $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$.

Ιδιότητες

- $\alpha^2 \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ (η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\alpha = 0$)
- $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$
- $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$
- $(\alpha > 0 \text{ και } \beta > 0) \Rightarrow \alpha + \beta > 0$ Το άθροισμα δύο θετικών αριθμών είναι θετικός αριθμός
- $(\alpha < 0 \text{ και } \beta < 0) \Rightarrow \alpha + \beta < 0$ Το άθροισμα δύο αρνητικών αριθμών είναι αρνητικός αριθμός
- α, β ομόσημοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > 0$
- α, β ετερόσημοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 0$
- $(\alpha > \beta \text{ και } \beta > \gamma) \Rightarrow \alpha > \gamma$
- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
- Αν $\gamma > 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
- Αν $\gamma < 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$
- $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$
- Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, τότε: $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$
- Αν α, β θετικοί αριθμοί και n θετικός ακέραιος, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n$.
- Αν α, β θετικοί αριθμοί και n θετικός ακέραιος, τότε: $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^n = \beta^n$.

29. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + 4 \geq 4\alpha$

β) $x^2 + 16 \geq 8x$

γ) $(\alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta \geq -8\beta^2$

δ) $\alpha^2 + 2\alpha + 3 > 0$

ε) $3x^2 + 4x + 4 > 0$

στ) $\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha + 2\beta + 5 \geq 0$

ζ) $\alpha^2 - 4\alpha + 5 > 0$

η) $2\alpha^2 - 4\alpha + 4 > 0$

θ) $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 2\beta + 2 \geq 0$

30. Να αποδείξετε ότι:

α) $2x^2 - 4x + 5 > 0$, $x \in \mathbb{R}$

β) $x^2 + y^2 \geq 12x + 4y - 40$, $x, y \in \mathbb{R}$

γ) $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq \frac{1}{4}(\alpha + \beta)^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

δ) $\alpha^2 + \beta^2 + 25 \geq 6\alpha + 8\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

31. Να αποδείξετε ότι: $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) \geq (\alpha x + \beta y)^2$.

32.α) Αν $x > 2$, να αποδείξετε ότι: $3x + 2 > x + 6$.

β) Αν $x > 1$, να αποδείξετε ότι: $5x + 2 > 2x + 5$.

33.α) Αν α, β ομόσημοι να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$.

β) Αν α, β, γ θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha\beta(\alpha + \beta) + \beta\gamma(\beta + \gamma) + \gamma\alpha(\gamma + \alpha) \geq 6\alpha\beta\gamma$$

34.α) Αν $\alpha < 2 < \beta$, να αποδείξετε ότι: $\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 4 < 0$.

β) Αν $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha < \frac{3\alpha + 5\beta}{8} < \beta$.

γ) Αν $0 < \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι: $\alpha < \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta} < \beta$.

δ) Αν $\alpha \geq 1$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 - 1 \geq \alpha - \alpha^2$.

ε) Αν $\alpha > 1$ και $\beta > 1$ να δείξετε ότι $\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta} < 1$.

35.α) Αν $\alpha + \beta > 0$ τότε $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta} \geq \frac{\alpha + \beta}{2}$.

β) Αν $\alpha \geq \beta$ να δείξετε ότι $\alpha^3 - \beta^3 \geq \alpha\beta^2 - \beta\alpha^2$.

36. Αν $0 < \alpha < \beta$, τότε:

α) Να διατάξετε από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $1, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$.

β) Να αποδείξετε ότι πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών ο $\frac{\alpha}{\beta}$ βρίσκεται

πλησιέστερα στο 1 από ότι ο $\frac{\beta}{\alpha}$.

37. Αν $6 < x < 8$ και $2 < y < 3$, να αποδείξετε ότι:

α) $8 < x + y < 11$ β) $3 < x - y < 6$ γ) $18 < 2x + 3y < 25$ δ) $1 < \frac{x-2}{y+1} < 2$

38. Αν $2 \leq x \leq 3$ και $3 \leq y \leq 4$, να αποδείξετε ότι:

α) $5 \leq x + y \leq 7$

β) $6 \leq xy \leq 12$

γ) $-2 \leq x - y \leq 0$

δ) $-2 \leq 3x - 2y \leq 3$

ε) $13 \leq x^2 + y^2 \leq 25$

στ) $1 \leq \frac{x+3}{y+1} \leq \frac{3}{2}$

39. Αν $-1 < x < 1$ και $-4 < y < 1$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των ποιών βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων: α) $2x - 4y$ και β) $3x + y$

40. Αν $x \in [2, 3]$ και $y \in [1, 2]$, να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή

καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις: α) $x + y$ β) $2x - 3y$ γ) $\frac{x}{y}$

41. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α) $6^{14} \cdot 9^{21}$ και $6^{21} \cdot 9^{14}$

β) $10^9 \cdot 5^7$ και 5^{25}

γ) $(x-1)^2$ και $2(x-5)$

δ) $(x+3)^2$ και $2(2x+3)$

ε) $A = \alpha^2 + \beta^2 + 13$ και $B = 4\alpha + 6\beta$

στ) $A = \alpha^2 + \beta^2 + 20$ και $B = 8\alpha + 4\beta$.

42. Αν $\alpha > \beta > 0$, να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α) $A = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}$ και $B = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$

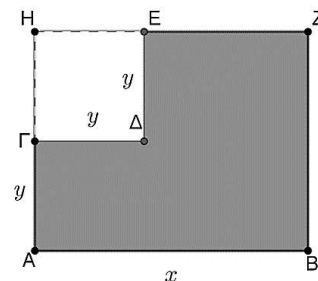
β) $A = (\alpha - \beta)^3$ και $B = \alpha^3 - \beta^3$.

Τράπεζα θεμάτων

43.(1261) Από το ορθογώνιο ABZH αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y .

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος EZBAGΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.



44.(1287) Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β) Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

45.(1298) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

46.(1314) Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν: $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$.
Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις: **α)** $\alpha - 2\beta$ **β)** $\alpha^2 - 2\alpha\beta$

47.(1317) Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$.

β) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β .

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

48.(1324) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $3 \leq x \leq 5$ και $-2 \leq y \leq -1$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) $y - x$ **β)** $x^2 + y^2$

49.(1352) Αν $0 < \alpha < 1$, τότε

α) να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 < \alpha$.

β) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}$.

50.(1353) **α)** Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:
 $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$

51.(1368) Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$ **β)** $2x - 3y$ **γ)** $\frac{x}{y}$

52.(1373) Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$ **β)** $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right) \cdot \left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$

53.(12673) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0 < \alpha < \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$.

54.(12922) Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $A = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$.

55.(13266) Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$.

β) i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$.

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$;

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Ορισμός

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\alpha|$ και ορίζεται από

τον τύπο: $|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \alpha < 0 \end{cases}$.

Συνέπειες του ορισμού

1. $|-x| = |x|$

2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3. $|x| + |y| = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

4. $|x|^{2v} = x^{2v}$, $v \in \mathbb{N}^*$.

5. $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \text{ ή } x = -y$

6. $|x| \geq x$ και $|x| \geq -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

7. $-|x| \leq x \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Απόσταση δύο αριθμών

Αν θεωρήσουμε δύο αριθμούς α, β που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία A και B αντίστοιχα, τότε το μήκος του τμήματος AB λέγεται απόσταση των αριθμών α και β και ισχύει: $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$

Είναι προφανές ότι $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$

56. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $A = \frac{|2x-1|}{|1-2x|} - 3 \frac{|3y+2|}{|-2-3y|} + 2 \frac{|x-y-z|}{|y-x+z|}$

57. Να απαλλαγούν από τις απόλυτες τιμές οι παραστάσεις:

$A = |x^2 - 2x + 1|$

$B = |4x^2 + 4x + 1|$

$\Gamma = |-x^2 + 8x - 16|$

58. Να απαλλαγούν από τις απόλυτες τιμές οι παραστάσεις:

$A = |x-1| - 3$, αν $x < -2$

$B = x - 3|x+1| - 2$, αν $x > 0$

$\Gamma = |x-3| - 2|x+2|$, αν $-1 \leq x < 2$

$\Delta = |x+3| - 2|-x+4| + 2|x+1|$, αν $1 \leq x \leq 3$

59. Να απαλλαγούν από τις απόλυτες τιμές οι παραστάσεις:

$A = |x-3| - 1$, αν $x < -1$

$B = |x+2| - 2x$, αν $x > 0$

$\Gamma = |x-1| - |x+1|$, αν $-1 \leq x \leq 1$

$\Delta = |x+2| - |3-x| + |x+1|$, αν $x > 3$

60. Αν $x \in [1, 2)$, να αποδείξετε ότι: $3 < |x| - |x-1| + 2|3-x| \leq 5$.

61. Αν $\alpha < \beta < \gamma < 0$, να αποδείξετε ότι:

α) $|\alpha - \beta| + |\beta - \gamma| - |\gamma - \alpha| = 0$

β) $|\alpha + \beta| - |\beta + \gamma| - |\alpha + \gamma| = 2\gamma$

62. Αν $\alpha < x < \beta$ να δείξετε ότι $||\alpha - x| + |\beta - x|| = \beta - \alpha$.

63. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτη τιμή

$$A = |x - 2| + 3x - 5$$

$$B = |x - 3| + 2x - 1$$

$$\Gamma = 2|x - 1| - 3 + x$$

$$\Delta = |x - 3| - 2|x + 1| + x$$

$$E = |2x + 2| - 3|-x + 3| + 3x$$

$$Z = |x - 3| + 3|x + 1| - 1$$

64. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = |4x - 8| - |4 - 2x| - |2 - x|$$

$$B = |15 - 5x| - |3x - 9| + |2x - 6|$$

65. Να αποδείξετε ότι: α) $\left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{2}$

β) $x^2 + y^2 \geq 2|xy|$

66. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

α) $|x - 2| + |5 - x| \geq 3$

β) $|7 - x| + |x + 6| \geq 1$

β) $|3 - x| + |x + 2| \geq 5$

67. Αν $|x| \leq 4$ και $|y| \leq 1$ να δείξετε ότι $|x + y| \leq 5$ και $|3y - x - 2| \leq 9$.

Αν $|x| = 2$, $|y| = 3$, $|z| = 5$ να δείξετε ότι $|x - y + z| \leq 10$.

68. Αν $|x - \alpha| < k$ και $|x - \beta| < m$ να δείξετε ότι $|\alpha - \beta| < k + m$.

Τράπεζα θεμάτων

69.(1239) Δίνεται η παράσταση: $A = |3x - 6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε $x \geq 2$ είναι $A = 3x - 4$

ii) για κάθε $x < 2$ είναι $A = 8 - 3x$

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι: $\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$

70.(1248) α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y - 3| < 1$.

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.

71.(1252) α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y - 3| < 1$.

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι: $6 < \Pi < 14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου.

72.(1258) Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$:

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{|x - 5|}{x - 5} + \frac{|x - 10|}{x - 10}$

73.(1260) Δίνεται η παράσταση: $A = |x - 1| - |x - 2|$.

α) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 2x - 3$

β) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

74.(1268) Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν: $|x - 3| \leq 2$ και $|y - 6| \leq 4$.

α) Να δείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$.

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογώνιου με διαστάσεις $2x$ και y

75.(1320) Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$

α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$.

β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x - 3| - 2|3 - x|$ είναι ανεξάρτητη του x .

76.(1322) Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x - 2| < 3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x + 1| + |x - 5|}{3}$

77.(1323) Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y , για τους οποίους ισχύει: $|y - 2| < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|y - 1| + |y - 3|}{2}$

78.(1342) Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x - 1| < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0 < x < 1$.

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $1, x, x^2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

79.(1366) α) Αν $a < 0$, να αποδειχθεί ότι: $a + \frac{1}{a} \leq -2$.

β) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \geq 2$.

80.(1371) α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2$ (1)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

81.(1374)α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|1 - 2x| < 5$

ii) $|1 - 2x| \geq 1$

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

82.(1383) Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x + 1| < 2$, τότε:

α) να δείξετε ότι $x \in (-3, 1)$.

β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x .

83.(1384) Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| + |y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$. Να αποδείξετε ότι:

α) $A = x - y + 2$

β) $0 < A < 4$.

84.(13177) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β , για τους οποίους ισχύει $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$.

α) Να δείξετε ότι: $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$ και $|\beta + 2| = \beta + 2$

β) Να δείξετε ότι: $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$.

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2|$ είναι ίση με 1.

4ο Θέμα

85.(1427) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x, 5) \leq 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x .

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β).

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:

$$|x + 4| + |x - 14| = 18.$$

86.(1428) Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς $-2, 7$ και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

- α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων: **i)** $|x + 2|$ **ii)** $|x - 7|$
β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:
 $|x + 2| + |x - 7|$.
γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x + 2| + |x - 7|$ γεωμετρικά.
δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

87.(1429) Σε έναν άξονα τα σημεία A , B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5 , 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x - 5|$ και $|x - 9|$.

β) Αν ισχύει $|x - 5| = |x - 9|$ τότε:

- i)** Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M . Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

88.(1515) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση $(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α , β .

β) Αν επιπλέον $|\beta - \alpha| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = |\alpha - 1| + |1 - \beta|$.
 Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά.

89.(1525) Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $|\alpha - 2| < 1$ και $|\beta - 3| \leq 2$

α) Να αποδειχθεί ότι $1 < \alpha < 3$.

β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β .

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha - 3\beta$.

δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$.

90.(13179) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1 \leq \beta \leq 2$ και $2 \leq \alpha \leq 4$,

α) i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3 .

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο **i.** ερώτημα.

β) i. Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\beta}$.

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1 - \frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta} - 1\right|$.

Ρίζες πραγματικών αριθμών

Ορισμός

Αν $\alpha \geq 0$, τότε **τετραγωνική ρίζα** ($\sqrt{\alpha}$), ονομάζουμε τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$.

Δηλαδή τετραγωνική ρίζα του αριθμού $\alpha \geq 0$ λέγεται ο αριθμός $x \geq 0$ που αν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον α .

Ιδιότητες τετραγωνικής ρίζας

- $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$
- $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha, \alpha \geq 0$
- $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}, \alpha, \beta \geq 0$
- $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \alpha \geq 0, \beta > 0$

Ορισμός

Αν $\alpha \geq 0$, τότε **ν-οστή ρίζα** ($\sqrt[n]{\alpha}$), ονομάζουμε τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης

$x^n = \alpha$. Δηλαδή ν-οστή ρίζα του αριθμού $\alpha \geq 0$ λέγεται ο αριθμός $x \geq 0$ που αν υψωθεί στη ν-οστή μας δίνει τον α .

Ιδιότητες ν-οστής ρίζας

- $\sqrt[n]{\alpha^n} = |\alpha|$
- Αν $\alpha \geq 0$ τότε $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$ και $\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha$, ενώ αν $\alpha \leq 0$, τότε $\sqrt[n]{\alpha^n} = |\alpha| = -\alpha$
- $\sqrt[n]{\alpha}\sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha\beta}, \alpha, \beta \geq 0$
- $\frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}, \alpha \geq 0, \beta > 0$
- $\sqrt[n]{\alpha^k} = (\sqrt[n]{\alpha})^k, \alpha \geq 0$
- $\sqrt[n]{\alpha^n\beta} = \alpha\sqrt[n]{\beta}, \alpha, \beta \geq 0$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[mn]{\alpha}, \alpha \geq 0$
- $\sqrt[n]{\alpha^{mp}} = \sqrt[n]{\alpha^m}^p$

91. Να γραφούν οι παρακάτω παραστάσεις σε μορφή κλάσματος με ρητό παρονομαστή:

- α) $3^{\frac{2}{3}}$ β) $5^{\frac{2}{7}}$ γ) $2^{\frac{-4}{3}}$ δ) $3^{\frac{-1}{2}}$ ε) $5^{\frac{-3}{2}}$

92. Να κάνετε τις πράξεις:

- α) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$ β) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$ γ) $\sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\alpha^2}$ δ) $\sqrt[5]{\alpha^2} \cdot \sqrt[5]{\alpha^3}$ ε) $\frac{\sqrt[5]{4^7} \cdot \sqrt[5]{4^6}}{\sqrt[5]{4^3}}$
- στ) $\frac{\sqrt[3]{5^8} \cdot \sqrt[3]{5^4}}{\sqrt[3]{5^3}}$ ζ) $\frac{\sqrt[6]{2^{13}} \cdot \sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{16}}$ η) $\sqrt[3]{4^5} \cdot \sqrt[3]{4^2} \cdot \sqrt[3]{4^2}$ θ) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$ ι) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{2}$
- κ) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[4]{3^3}$ λ) $\frac{\sqrt[3]{5^5} \cdot \sqrt[12]{5}}{\sqrt[4]{5^3}}$ μ) $\sqrt{3^3} \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[6]{3^5}$

93. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\begin{array}{llll}
 \alpha) \sqrt[3]{\sqrt{3^4}} \cdot \sqrt[6]{9} & \beta) \sqrt[5]{2^7} \cdot \sqrt[10]{2^3} & \gamma) \sqrt{\sqrt{7^3}} \cdot \sqrt[8]{7^2} & \delta) \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{17}}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt{2^7}} \\
 \epsilon) \sqrt[4]{\sqrt{5^3}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{5^5}} & \sigma\tau) \frac{\sqrt[4]{\sqrt[5]{3^{27}}}}{\sqrt[10]{\sqrt{3^7}}} & \zeta) \sqrt{\sqrt[3]{7^4}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{7^4}} &
 \end{array}$$

94. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{array}{ll}
 \alpha) \sqrt{3} \cdot \sqrt{\sqrt{7}-2} \cdot \sqrt{\sqrt{7}+2} = 3 & \beta) \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{13}-3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{13}+3} = 2 \\
 \gamma) \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{5}{2} & \delta) \frac{1}{(5-\sqrt{23})^2} - \frac{1}{(5+\sqrt{23})^2} = 5\sqrt{23}
 \end{array}$$

95. Να αποδείξετε ότι: $\alpha) \frac{\sqrt{75} + \sqrt{147}}{\sqrt{192} - \sqrt{108}} = 6$ $\beta) \sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250} = 6\sqrt[3]{2}$

96. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$A = \frac{\sqrt{20} - 2\sqrt{8} + 3\sqrt{12}}{\sqrt{45} - 2\sqrt{18} + 3\sqrt{27}} \quad B = \sqrt[3]{8} - 2\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{27} \quad \Gamma = \sqrt[3]{16} - 3\sqrt[3]{54}$$

97. Αν $\alpha, \beta > 0$ να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις με τη βοήθεια μιας μόνο ρίζας.

$$\begin{array}{llllll}
 \alpha) \sqrt[5]{2^3 \sqrt{2}} & \beta) \sqrt[3]{2^3 \sqrt[4]{2}} & \gamma) \sqrt[4]{9 \sqrt[3]{9}} & \delta) \sqrt{\sqrt[5]{a^2}} & \epsilon) \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}} \\
 \sigma\tau) \sqrt[4]{\sqrt[5]{a^8 b^{12}}} & \zeta) \sqrt[5]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a} & & &
 \end{array}$$

98. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{array}{lll}
 \alpha) \sqrt[6]{3^5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{9} & \beta) \sqrt[4]{2^5} \cdot \sqrt[12]{2^9} = 4 & \gamma) \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[6]{x^5}} = \sqrt[4]{x^3} \\
 \delta) \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{8} = 2\sqrt[12]{2^{11}} & \epsilon) \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[12]{3} & \sigma\tau) \sqrt[6]{3^3 \sqrt[9]{3^5}} = \sqrt[12]{3^5}
 \end{array}$$

99. Να τραπούν τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

$$\begin{array}{llllll}
 \alpha) \frac{1}{\sqrt{2}} & \beta) \frac{2}{\sqrt{6}} & \gamma) \frac{1}{2\sqrt{2}} & \delta) \frac{2}{\sqrt[3]{5}} & \epsilon) \frac{4}{\sqrt[4]{8}} & \sigma\tau) \frac{1}{\sqrt[7]{2^3}} \\
 \zeta) \frac{2}{\sqrt[3]{2}} & \eta) \frac{1}{\sqrt[7]{10^3}} & \theta) \frac{7}{\sqrt[5]{49}} & \iota) \frac{3}{\sqrt[4]{6}} & &
 \end{array}$$

100. Να τραπούν τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.

$$\alpha) \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \quad \beta) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+1} \quad \gamma) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \quad \delta) \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} \quad \epsilon) \frac{26}{\sqrt[3]{3}-1}$$

101. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} \quad B = \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} \quad B = \sqrt{x + y + 2\sqrt{xy}}, \quad x, y > 0$$

102. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$A = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \quad B = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} \quad \Gamma = \sqrt{7 + 2\sqrt{10}} \quad \Delta = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$$

103. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παρακάτω παραστάσεις:

$$\alpha) \sqrt{x-1} \quad \beta) \sqrt[3]{3-x} \quad \gamma) \sqrt{x-3} - \sqrt{x-7} \quad \delta) \sqrt{x-1} + \sqrt{4-x} \quad \varepsilon) \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

104. Να αποδείξετε ότι η τετραγωνική ρίζα του αριθμού $43 - 24\sqrt{3}$ είναι ο αριθμός $3\sqrt{3} - 4$ και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τη παράσταση

$$A = \sqrt{43 + 24\sqrt{3}} + \sqrt{43 - 24\sqrt{3}}.$$

105. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{2} - 1$ είναι η κυβική ρίζα του αριθμού $5\sqrt{2} - 7$.

106. Αν $A = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ να υπολογίσετε το A^2 και το A .

107. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \sqrt[5]{5} < \sqrt[3]{3} \quad \beta) \sqrt{7} + \sqrt{3} < \sqrt{21} + 1 \quad \gamma) \sqrt{8 - 2\sqrt{10}} > \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

108. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \sqrt[6]{6} < \sqrt[5]{5} \quad \beta) \sqrt{6} + \sqrt{5} < \sqrt{30} + 1 \quad \gamma) \sqrt{12 + 2\sqrt{30}} > \sqrt{6} + \sqrt{5}$$

109. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{7} - \sqrt{2}$ και $\sqrt{8} - \sqrt{3}$.

Τράπεζα θεμάτων

110. (1270) Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$

α) Να βρείτε τις τιμές που πρέπει να πάρει το x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

111. (1281) Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις: $A = (\sqrt{2})^6$, $B = (\sqrt[3]{3})^6$ και $\Gamma = (\sqrt[6]{6})^6$

α) Να δείξετε ότι: $A + B + \Gamma = 23$

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$. Να αιτιολογήσετε την απάντηση.

112. (1335) Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{(x-2)^2}$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$ όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ;

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A = B$.

113. (1338) Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$ και $\Gamma = \sqrt[6]{5}$, τότε:

- α)** Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$ **β)** Να συγκρίνετε τους αριθμούς A , B .

114. (1340) Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

- α)** Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$.
β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$.

115. (1375) Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις): $\sqrt{2} \cong 1,41$, $\sqrt{3} \cong 1,73$, $\sqrt{5} \cong 2,24$ και $\sqrt{7} \cong 2,64$.

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{40}$, $\sqrt{80}$.

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3 \cdot \sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}}$;

116. (1376) Δίνεται η παράσταση: $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$

- α)** Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

117. (1377) **α)** Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$, $6 - \sqrt[3]{30}$.

118. (1378) Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$

- α)** Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.
β) Για $x = 5$, να αποδείξετε ότι: $A^2 + A - 6 = 0$.

119. (1379) Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x-4}$.

- α)** Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.
β) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $A^2 - A = 2 \cdot (10 - \sqrt{5})$.

120. (1380) Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$

- α)** Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.
β) Για $x = -3$, να αποδείξετε ότι: $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$

121. (1381) Δίνεται η παράσταση: $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $B^2 + 6B = B^4$.

122. (1382) Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 4$

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}, 1, \sqrt[3]{2}$

123. (12943) Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ και $\beta = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha + \beta$ και το γινόμενο $\alpha\beta$.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 7$

Εξισώσεις 1ου Βαθμού

Η εξίσωση $\alpha \cdot x + \beta = 0$

- Αν $\alpha \neq 0$, τότε: $\alpha x = -\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha x}{\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{\alpha}$.

Δηλαδή αν $\alpha \neq 0$ η εξίσωση έχει **μοναδική λύση** την $x = -\frac{\beta}{\alpha}$.

- Αν $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση $\alpha x = -\beta$ γίνεται $0 \cdot x = -\beta$ και είναι φανερό ότι για να τη λύσουμε πρέπει να γνωρίζουμε τις τιμές του β , γιατί:
 - αν $\beta \neq 0$ η εξίσωση είναι **αδύνατη**, ενώ
 - αν $\beta = 0$ η εξίσωση έχει τη μορφή $0 \cdot x = 0$ και αληθεύει για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού x , δηλαδή είναι **ταυτότητα**.

124. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x+1}{x+2} = \frac{2(x^2+2)}{x^2-4}$

β) $\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} = \frac{4-x}{x^2+2x}$

γ) $\frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} = \frac{8}{x^2-2x}$

δ) $\frac{3}{x^2+2x+1} = \frac{1}{x^2+x} - \frac{1}{x}$

125. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2(x+1) - x(x+1)^2 = 0$

β) $(x^2-1)^2 - x^2(x^2-2x+1) = 0$

γ) $x(2x-3)^2 = 4x$

δ) $x^3 - 3x^2 - 4(x-1)(x-3) = 0$

126. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

β) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

γ) $2x^3 - 2x = x^2 - 1$

127. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ , να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(\lambda-1)x = \lambda^2 - 1$

β) $(\lambda-2)x = \lambda^2 - 4$

γ) $(\lambda^2 + 2\lambda)x = \lambda + 2$

δ) $\lambda x + 3\lambda = 2x + \lambda^2$

ε) $(\lambda^2 - 25)x = \lambda^2 + 5\lambda$

στ) $\lambda^3 x + 2 = (4x + 1)\lambda$

Τράπεζα θεμάτων

128. (1246) Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 1)x = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 1$ και για $\lambda = -1$.

β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

129. (1327) Δίνεται η εξίσωση: $(a + 3)x = a^2 - 9$, με παράμετρο $a \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) όταν $a = 1$ ii) όταν $a = -3$

β) Να βρείτε τις τιμές του a , για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

130. (1369) Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 9)x = \lambda^2 - 3\lambda$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ , να γράψετε τρεις εξισώσεις.

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση.

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4.

131. (1351) Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

132. (12857) Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x - 2\lambda + 2 = 0$.

α) i. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = -2$.

ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το $x=1$ είναι ρίζα της εξίσωσης.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση είναι ταυτότητα.

Εξισώσεις με απόλυτα

133. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $|x + 3| = 2$ β) $|x - 4| = 6$ γ) $|x - 6| = -3$ δ) $|x - 1| = 3$ ε) $|x - 1| - 4 = 2$

στ) $|x + 3| = 0$ ζ) $|x + 4| = -2$ η) $d(x, 2) = 4$ θ) $d(3, x) = 5$

ι) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 3$

κ) $\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 7$

λ) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2$

134. Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $|3x - 6| + 2 = 6 + |2x - 4|$ β) $7 - |3x + 3| = |2x + 2| - 8$

135. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{|x-2|+4}{3} - \frac{|x-2|+3}{5} = \frac{4}{3}$$

$$\beta) \frac{3|x-1|-1}{2} - 2 = \frac{|x-1|-4}{3}$$

$$\gamma) 1 - \frac{|2x-1|-1}{4} = |1-2x| - \frac{|6x-3|-2}{8}$$

$$\delta) \frac{3-|3x-6|}{2} + 6 = \frac{|3x-6|}{12} + |4-2x|$$

136. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) ||x-1|-2|=3$$

$$\beta) ||2x-3|+1|=4$$

$$\gamma) |3-|x+2||=1$$

137. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\alpha) |3x-4|=2|x+3|$$

$$\beta) |2x-3|=|x+6|$$

$$\gamma) |2x-10|=\sqrt{x^2-4x+4}$$

$$\delta) ||x-3|-2|=||x-3|-4|$$

138. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) ||x-1|-2|+||x-2|-1|=0$$

$$\beta) ||x-3|-4|+|5-|x-2||=0$$

139. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) 3|x-1|=2x-1$$

$$\beta) |3x-2|=x+1$$

$$\gamma) |x-2|=2x-3$$

$$\delta) |2x-4|=3x+2$$

140. Να λύσετε τις εξισώσεις : $\alpha) |x+1||x-5|=2|x+1|$ $\beta) 2|x-3|-|x^2-9|=0$

141. Να λύσετε τις εξισώσεις: $\alpha) 3|x-1|-|x+2|=x+3$

$$\beta) |2-x|+2|x+3|=4$$

142. Για τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ που ισχύει η σχέση $\alpha^2 + \beta^2 + 25 - 8\alpha - 6\beta = 0$, να λυθεί η

$$\text{εξίσωση } \lambda^2 x = \beta^2 x + \lambda^2 - \alpha\lambda + \beta.$$

Τράπεζα θεμάτων

143. (1303) Δίνονται οι παραστάσεις: $A = |2x-4|$ και $B = |x-3|$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

$\alpha)$ Για κάθε $2 \leq x < 3$ να αποδείξετε ότι $A+B=x-1$.

$\beta)$ Υπάρχει $x \in [2,3)$ ώστε να ισχύει $A+B=2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

144. (1308) Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

$\alpha)$ Να δείξετε ότι: $A=4$.

$\beta)$ Να λύσετε την εξίσωση: $|x+A|=1$.

145. (13169) Αν γνωρίζουμε ότι ο x είναι πραγματικός αριθμός με $3 \leq x \leq 5$, τότε:

$\alpha)$ Να αποδείξετε ότι $x-5 \leq 0 < x-2$.

$\beta)$ Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|-|x-5|=2$.

146. (12917) Δίνεται η εξίσωση $(|a-1|-3)x = a+2$ (1) με παράμετρο $a \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση για $a = 0$ και $a = 5$.

β) i. Να βρείτε για ποιες τιμές του a ισχύει $|a-1| = 3$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση (1) για τις τιμές του a που βρήκατε στο ερώτημα β) i.

Η εξίσωση $x^v = a$

Αν v άρτιος και $a < 0$, τότε η εξίσωση $x^v = a$ είναι αδύνατη

Αν v άρτιος και $a \geq 0$ τότε: $x^v = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = +\sqrt[v]{a} \\ x = -\sqrt[v]{a} \end{cases}$

Αν v περιττός και $a \geq 0$ τότε: $x^v = a \Leftrightarrow x = \sqrt[v]{a}$

Αν v περιττός και $a < 0$ τότε: $x^v = a \Leftrightarrow x = -\sqrt[v]{|a|}$

147. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^2 - 25 = 0$

β) $x^4 - 625 = 0$

γ) $x^{2016} - 1 = 0$

δ) $x^4 + 81 = 0$

ε) $x^3 - 27 = 0$

στ) $x^5 + 243 = 0$

ζ) $x^{1821} - 1 = 0$

η) $x^7 - 2x^3 = 0$

θ) $x^5 - 9x^3 = 0$

ι) $x^8 + 125x^5 = 0$

κ) $x^{12} - x^9 = 0$

148. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $(x+1)^4 - 81 = 0$

β) $(x-2)^8 + 128 = 0$

γ) $(2x-1)^5 + 243 = 0$

δ) $(3x+2)^7 - 128 = 0$

ε) $81(x+2)^7 - (x+2)^4 = 0$

στ) $16(x+4)^4 - 81 = 0$

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$.

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	Ρίζες της εξίσωσης
$\Delta > 0$	$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
$\Delta = 0$	$x_{1,2} = -\frac{\beta}{2\alpha}$
$\Delta < 0$	δεν υπάρχουν ρίζες

Άθροισμα και γινόμενο ριζών (τύποι Vieta)

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

149. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $6x^2 + 12x = 0$

β) $\sqrt{2}x^2 - 2x = 0$

γ) $\lambda x^2 - 3x = 0$

δ) $x^2 - 16 = 0$

ε) $2x^2 - 4 = 0$

στ) $x^2 + 16 = 0$

ζ) $\lambda x^2 - \lambda^2 = 0$

150. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - 6\alpha x + 8\alpha^2 = 0$

β) $\alpha^2 x^2 - (\alpha^2 + 1)x + 1 = 0, \alpha \neq 0$

γ) $3x^2 + 5kx + 2k^2 = 0$

δ) $x^2 - 2(\alpha^2 + \beta^2)x + (\alpha^2 - \beta^2)^2 = 0$

151. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες.

α) $x^2 - (k+1)x + k = 0$

β) $x^2 - kx + k - 1 = 0$

152. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + \lambda x - 1 = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ .

153. Αν η μία ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 2(\lambda + 2)x + 2\lambda^2 - 2 = 0$ είναι το 2, να βρείτε την άλλη της ρίζα.

154. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + \lambda = 0$. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ για την οποία η εξίσωση έχει:

α) ρίζα το 3

β) δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

γ) μία διπλή ρίζα

δ) Καμία πραγματική ρίζα

155. Αν η εξίσωση $x^2 - 4x + \lambda = 0$ έχει 2 ίσες ρίζες, να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $4x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$, έχει 2 ρίζες τις οποίες και να βρείτε.

Τράπεζα θεμάτων

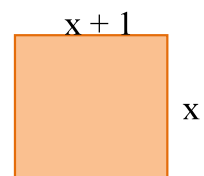
156. (1238).α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2 + 10x = 12$

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0$

157. (1285) Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογώνιου με διαστάσεις $(x+1)$ μέτρα και x μέτρα.

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.



158. (1290) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

159. (1312) Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2 .

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \neq 0$.

160. (1349)**α)** Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$.

β) Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 3 = 0$.

161. (13028) Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 - 2\alpha x - 2\alpha - 2 = 0$ με $\alpha \in \mathbb{R}^*$ (1).

α) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}^*$ για τις οποίες η εξίσωση (1) έχει ρίζα το 3.

β) Για $\alpha = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

4ο Θέμα

162. (1388) Δίνεται η εξίσωση $(8 - \lambda)x^2 - 2(\lambda - 2)x + 1 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη τιμή του λ ώστε η εξίσωση να είναι 1ου βαθμού.

β) Αν η εξίσωση είναι 2ου βαθμού, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε αυτή να έχει μια διπλή ρίζα. Για τις τιμές του λ που βρήκατε, να προσδιορίσετε τη διπλή ρίζα της εξίσωσης.

γ) Για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να δείξετε ότι το τριώνυμο $(8 - \lambda)x^2 - 2(\lambda - 2)x + 1$ είναι μη αρνητικό, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

163. (1412) Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - \lambda) \cdot x^2 - (\lambda^2 - 1) \cdot x + \lambda - 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού.

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή: $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2ου βαθμού.

164. (1440) Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, με $\lambda > 0$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda > 0$.

β) Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:

i) να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου.

ii) να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του $\lambda > 0$ και να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 4$ για κάθε $\lambda > 0$.

iii) για την τιμή του $\lambda > 0$ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

165. (1459) Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x , να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση: $\lambda = (2x + 5)^2 - 8x$ (1)

- α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5 , ποιος είναι ο εξαγόμενος;
 β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20 , ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος;
 γ) Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή $4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$ και στη συνέχεια:
 i) να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x , ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5 .
 ii) να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ .

166. (1476) Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 + \lambda x - 36 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

- α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ , η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
 β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ .
 i) Να δείξετε ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2 - \lambda x - 36 = 0$
 ii) Να δείξετε ότι: $\rho \neq 0$ και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης: $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$

167. (1516) α) Να λύσετε τις εξισώσεις $3x^2 - 14x + 8 = 0$ (1) και $8x^2 - 14x + 3 = 0$ (2).

- β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής: $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ (3) και $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ (4), με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$.
 Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι: Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε:

- i) $\rho \neq 0$ και ii) ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4).

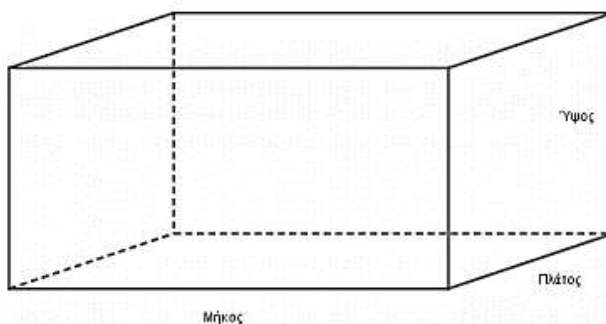
168. (12683) Η δεξαμενή του παρακάτω σχήματος έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ύψος ίσο με το ένα τέταρτο του μήκους της.

- α) Αν η δεξαμενή έχει όγκο 16m^3 , να βρείτε τις διαστάσεις της.
 β) Λόγω έλλειψης χώρου η δεξαμενή ανακατασκευάζεται με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ύψος 2 μέτρα.

Αν το πλάτος της νέας δεξαμενής είναι κατά 2m

μικρότερο από το μήκος της υπολογίστε τις διαστάσεις της βάσης προκειμένου ο όγκος να παραμείνει 16m^3 .

- γ) Αν η νέα δεξαμενή περιέχει 10m^3 πετρέλαιο να βρείτε το ύψος της στάθμης του πετρελαίου μέσα στη δεξαμενή.



169. (13320) Θεωρούμε τις εξισώσεις $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ (I) και $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ (II) όπου α, β, γ είναι μη μηδενικοί ακέραιοι, με $\alpha \neq \gamma$.

- α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω εξισώσεις έχουν το ίδιο πλήθος ριζών.

β) Αν ο αριθμός $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της (I) να δείξετε ότι ο $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της (II) .

γ) Να αποδείξετε, με απαγωγή σε άτοπο, ότι καμία από τις εξισώσεις (I), (II) δεν μπορεί να έχει ως ρίζα τον αριθμό $\sqrt{2}$.

Εξισώσεις που ανάγονται σε 2ου βαθμού

170. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\frac{x^2 - 21}{x^2 - 9} = \frac{2}{x + 3} + \frac{2}{x - 3}$

β) $\frac{2}{x^2 - 4} + \frac{x - 4}{x^2 + 2x} = \frac{1}{x^2 - 2x}$

171. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$

β) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$

γ) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

δ) $x^{10} - 33x^5 + 32 = 0$

ε) $x^{500} + 2011x^{250} + 1821 = 0$

172. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ β) $(x - 2)^2 - 3|x - 2| + 2 = 0$ γ) $(x^2 + 3x)^2 - 5|x^2 + 3x| + 6 = 0$

173. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $(x^2 - 2x)^2 - 4(x^2 - 2x) + 3 = 0$

β) $\left(x + \frac{1}{x} + 1\right)^2 - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0$

174. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 + \frac{1}{x^2} - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$

175. Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $(x^2 - 4x + 3)^2 - 2x^2 + 8x - 9 = 0$ β) $(2x^2 + 3x - 1)^2 - 5(2x^2 + 3x + 3) + 24 = 0$

Τράπεζα θεμάτων

2^ο Θέμα

176. (1332)α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση $\Pi = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x}$ έχει

νόημα πραγματικού αριθμού.

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0 .$$

4^ο Θέμα

177. (1445) α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι: Αν $\beta < 0$, $\gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\gamma > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

178. (1448) Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2 - 5x + \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha| \leq \frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς

αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $\alpha = 2$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$

179. (1477) **α)** Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι αν $\gamma < 0$ τότε:

i) $\beta^2 - 4\gamma > 0$ **ii)** η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

180. (1482) **α)** Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β) Να κατασκευάσετε μία διτετράγωνη εξίσωση της μορφής $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, η οποία να έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας λύνοντας την εξίσωση που κατασκευάσατε.

Τύποι Vieta

181. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 4x - 6 = 0$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $x_1 + x_2$ **β)** $x_1 x_2$ **γ)** $x_1^2 + x_2^2$ **δ)** $x_1^3 + x_2^3$ **ε)** $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

182. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 6x + 2 = 0$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $x_1 + x_2$ **β)** $x_1 x_2$ **γ)** $x_1^2 + x_2^2$ **δ)** $x_1^3 + x_2^3$ **ε)** $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

183. Να βρείτε το πρόσημο των ριζών των παρακάτω εξισώσεων, χωρίς να τις λύσετε.

α) $x^2 - 6x + 3 = 0$ **β)** $x^2 - 4x - 1 = 0$ **γ)** $x^2 + 3x + 2 = 0$

184. Να βρείτε τις εξισώσεις δευτέρου βαθμού που έχουν για ρίζες τα ζεύγη των αριθμών:

α) 2 και -6 **β)** $\frac{1}{3}$ και 2 **γ)** 2α και 3α **δ)** $\frac{\alpha}{2}$ και α^2 **ε)** λ και λ - 2

185. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 2x - 5 = 0$, να βρείτε τις εξισώσεις που έχουν ρίζες τα ζεύγη:

α) $-x_1, -x_2$ β) kx_1, kx_2 γ) x_1^2, x_2^2 δ) $x_1x_2^2, x_2x_1^2$ ε) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$

186. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 5 = 0$. Χωρίς να υπολογίσετε τα x_1, x_2 , να βρείτε την εξίσωση που έχει ρίζες τα ζεύγη:

α) $x_1 - 1$ και $x_2 - 1$ β) $3x_1$ και $3x_2$ γ) x_1^2 και x_2^2 δ) $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$

187. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \lambda x - (\lambda^2 + 1) = 0$

α) Να δείξετε ότι έχει δυο ρίζες άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της, να βρεθεί το λ ώστε $x_1^2 + x_2^2 = 4$.

188. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\lambda x^2 - 2x - \lambda = 0$, $\lambda \neq 0$.

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , για τις οποίες ισχύει: $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

β) Να βρείτε τη δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες ρ_1, ρ_2 για τις οποίες ισχύει

$$\rho_1 + \rho_2 = 2x_1x_2 - 3 \text{ και } \rho_1\rho_2 = \lambda x_1 + \lambda x_2 + 2.$$

189. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $x^2 - \lambda x + \lambda - 1 = 0$, να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες ισχύει $x_1^2 - 5x_1^2x_2 - 5x_1x_2^2 + x_2^2 = -25$.

190. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $x^2 - 2x + \lambda + 3 = 0$, να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες ισχύει $x_1^3 - 3x_1 + x_1^2x_2 - 3x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3 = 2$.

191. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για την οποία η εξίσωση $x^2 + (\lambda + 1)x + \lambda^2 - 3 = 0$ έχει ρίζες αντίστροφες.

192. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για την οποία η εξίσωση $x^2 + (\lambda^2 - 9)x + \lambda + 2 = 0$ έχει ρίζες αντίθετες.

193. α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $3x^2 - (\lambda^2 - 5)x - 2 = 0$ έχει δυο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να βρεθεί ο λ ώστε οι ρίζες της εξίσωσης να είναι αντίθετες.

Τράπεζα θεμάτων

2^ο Θέμα

194. (1262) Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{5 + \sqrt{5}}$ και $B = \frac{1}{5 - \sqrt{5}}$.

α) Να δείξετε ότι: i) $A + B = \frac{1}{2}$ ii) $A \cdot B = \frac{1}{20}$

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B .

195. (1269) Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 5x - 1$.

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: $x_1 + x_2, x_1 \cdot x_2$ και $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

196. (1280) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha + \beta = 2$ και

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30.$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -15$.

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

197. (1288) Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - kx - 2$, με $k \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{R}$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - kx - 2 = 0$ (1), τότε:

i) να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της (1).

ii) να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1, ρ_2 , όπου $\rho_1 = 2x_1$ και $\rho_2 = 2x_2$.

198. (1315) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha \cdot \beta = 4$ και

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20.$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -12$.

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

199. (1316) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha + \beta = -1$ και

$$\alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -12$.

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

200. (1334) Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α, β τέτοιοι ώστε: $\alpha + \beta = 12$ και

$$\alpha^2 + \beta^2 = 272.$$

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -64$

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β .

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β .

201. (1337) Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{3-\sqrt{7}}$ και $B = \frac{1}{3+\sqrt{7}}$

α) Να δείξετε ότι: $A + B = 3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$.

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B .

202. (1348) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$.

203. (1359)**α)** Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = \sqrt{3}$.

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α)ερωτήματος.

4ο Θέμα

204. (1407) Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) t_A, t_B, t_Γ και t_Δ , για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$t_A < t_B, \quad t_\Gamma = \frac{t_A + 2t_B}{3} \quad \text{και} \quad |t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta|.$$

α) i) Να δείξετε ότι $t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2}$.

ii) Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει: $t_A + t_B = 6$ και $t_A \cdot t_B = 8$.

i) Να γράψετε μία εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B .

ii) Να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών.

205. (1431) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ .

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$.

ii) να βρείτε το λ .

206. (1439) Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, με $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

γ) Αν $\lambda < 0$, τότε:

i) το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) να αποδείξετε ότι $|x_1 + x_2| \geq 2x_1x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου.

207. (1451) Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1).

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$.

208. (1452) α) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1).

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$.

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β .

209. (1456) Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για

ποιες τιμές του λ ισχύει: $d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)}$.

210. (1460) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ με β, γ πραγματικούς αριθμούς. Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1 + x_2| = 4$, τότε:

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β .

β) Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$.

γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ (1). Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

211. (1463) Δίνεται η εξίσωση: $\alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0$, όπου α, β δύο θετικοί αριθμοί.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 - \beta^2)^2$.

β) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών α, β , ώστε η εξίσωση να έχει δυο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε, ως συνάρτηση των α, β .

γ) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = \frac{\alpha}{\beta}$ και $x_2 = \frac{\beta}{\alpha}$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \geq 4.$$

212. (1469) Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή.

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ .

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

213. (1474) Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

γ) Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Για κάθε $\lambda > 0$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, να

$$\text{αποδείξετε ότι } \sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

214. (1475) Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, με $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

γ) Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{x_1 + x_2}{2}$ και 1.

215. (1478) **α)** Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο $\Pi = 34 \text{ cm}$ και διαγώνιο $\delta = 13 \text{ cm}$.

i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = 60 \text{ cm}^2$.

ii) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

iii) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 40 cm^2 και διαγώνιο 8 cm .

216. (1491) Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 x_2)^{24} = 0.$$

ii) Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2$

217. (1492) Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της

$$\text{εξίσωσης: } x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0, \lambda \in (0, 4).$$

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ .

ii) το εμβαδόν E του ορθογωνίου.

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda \in (0, 4)$.

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

218. (1493) Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της

$$\text{εξίσωσης } x^2 - 2x + \lambda(2 - \lambda) = 0 \text{ με } \lambda \in (0, 2).$$

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου.

ii) το εμβαδόν E του ορθογωνίου συναρτήσει του λ .

β) Να αποδείξετε ότι $E \leq 1$, για κάθε $\lambda \in (0, 2)$.

γ) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

219. (1504) Τα σπίτια τεσσάρων μαθητών, της Άννας, του Βαγγέλη, του Γιώργου και της Δήμητρας βρίσκονται πάνω σε έναν ευθύγραμμο δρόμο, ο οποίος ξεκινάει από το σχολείο τους. Οι

αποστάσεις των τεσσάρων σπιτιών από το σχολείο,



s_A, s_B, s_Γ και s_Δ αντίστοιχα, ικανοποιούν τις σχέσεις: $s_A < s_B$, $s_\Gamma = \frac{s_A + 3s_B}{4}$ και

$$|s_\Delta - s_A| = |s_\Delta - s_B|.$$

Στον παρακάτω άξονα, το σχολείο βρίσκεται στο σημείο O και τα σημεία A, B, παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών της Άννας και του Βαγγέλη αντίστοιχα.

α) Να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα τα σημεία Γ και Δ, που παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών του Γιώργου και της Δήμητρας. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Αν επιπλέον, οι τιμές των αποστάσεων s_A, s_B σε Km ικανοποιούν τις σχέσεις

$$s_A + s_B = 1,4 \text{ και } s_A \cdot s_B = 0,45 \text{ τότε:}$$

i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς s_A, s_B .

ii) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις s_A , s_B , s_Γ και s_Δ .

220. (1508) Δίνονται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

β) Να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 = 2$

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, τότε :

i) Να δείξετε ότι $x_1 - x_2 = 4$

ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 την τιμή του λ .

221. (1509) Δίνονται η εξίσωση: $ax^2 - (a^2 - 1)x - a = 0$, με παράμετρο $a \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (a^2 + 1)^2$.

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι $p_1 = a$ και $p_2 = -\frac{1}{a}$.

γ) Να βρεθούν οι τιμές του a ώστε $|p_1 - p_2| = 2$.

222. (12940) Έστω α, β θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\alpha - \beta = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.

β) Αν $A = \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} \right)^2$ να αποδείξετε ότι :

i. $A = 2\alpha + 2\beta$

ii. $A > 4\sqrt{\alpha\beta}$.

γ) Αν επιπλέον $\alpha\beta = 6$ να βρείτε τους αριθμούς α και β .

Οι ανισώσεις $\alpha x + \beta > 0$ και $\alpha x + \beta < 0$

Είναι: $\alpha x + \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha x > -\beta$

- Αν $\alpha > 0$, τότε: $\alpha x > -\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha x}{\alpha} > -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x > -\frac{\beta}{\alpha}$.
- Αν $\alpha < 0$, τότε: $\alpha x > -\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha x}{\alpha} < -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x < -\frac{\beta}{\alpha}$.

Αν $\alpha = 0$, τότε η ανίσωση γίνεται $0 \cdot x > -\beta$ και

- αν $\beta \geq 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ενώ
- αν $\beta < 0$ είναι αδύνατη.

Ανισώσεις με απόλυτα

$$1. |x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta, \theta > 0$$

$$2. |x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta \text{ ή } x > \theta, \theta > 0$$

223. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η τιμή της παράστασης

$$A = (x - 3)^2 - (x - 1)(x + 1), \text{ βρίσκεται στο διάστημα } [4, 16].$$

224. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $(\lambda - 1)x > 0$

β) $\lambda x \geq 3x$

γ) $\lambda x < 2x$

δ) $2\lambda x \leq x$

Τράπεζα Θεμάτων

2^ο Θέμα

225. (1357) Δίνονται οι ανισώσεις: $3x - 1 < x + 9$ και $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

β) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων.

226. (1533) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + \lambda - 2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

β) Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δυο ρίζες x_1, x_2 , να προσδιορίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1$.

4^ο Θέμα

227. (1404) Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + (2\lambda + 3)x + \lambda - 2 = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι: $\Delta = 12\lambda + 25$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \neq -2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο των ριζών $P = x_1 x_2$.

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση: $(x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_1 x_2 + 3)^2 = 0$.

228. (1423) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δυο άνισες ρίζες.

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ , οι δυο άνισες ρίζες της εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(-2, 4)$.

Ανισώσεις με απόλυτα

229. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $|x - 1| \leq 4$

β) $|x + 1| > 2$

γ) $|x - 3| < -2$

δ) $|x| \geq -5$

ε) $|x - 5| \leq 0$

στ) $|x - 2| > 0$

ζ) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} \leq 5$

η) $\sqrt{x^2 + 10x + 25} \geq 3$

230. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $3|x + 2| - 6 < 0$

β) $2|x - 3| - 12 > 0$

γ) $5 - |x| \geq 0$

δ) $5|x| + 20 > 0$

ε) $3|x| + 9 < 0$

στ) $3|-x| - 6 < 0$

η) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} \leq 6$

θ) $5d(x, 2) - |4 - 2x| - 6 \leq d(2, x)$

ι) $|10 - 4x| + 2 > d(2x, 5) + 6$

231. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha) \frac{2|2x-1|+11}{4} - \frac{4-|2x-1|}{2} > \frac{|1-2x|}{3}$$

$$\beta) \frac{|x-2|+1}{2} - \frac{3-|x-2|}{3} > \frac{1}{3}$$

232. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

$$\alpha) |x-2|-3 < 1$$

$$\beta) |x-1|-2 \geq 3$$

$$\gamma) |x|-3 \leq 1$$

$$\delta) |5-|x-1|| \geq 3$$

$$\epsilon) |x+2|-3 < 4$$

$$\sigma\tau) |3-2x|-1 > 4$$

233. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha) 1 \leq |x| \leq 4$$

$$\beta) 2 < |x-3| \leq 5$$

$$\gamma) 1 \leq |x-3| < 6$$

$$\delta) 2 \leq |1-3x| \leq 9$$

234. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) |3x-6| = 3x-6$$

$$\beta) |2-x| = x-2$$

$$\gamma) |4-x| = 4-x$$

$$\delta) |x-5| = 5-x$$

235. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) |x-2|-3 = |x-2|-3$$

$$\beta) |x+1|-5 = 5-|x+1|$$

$$\gamma) |5-|2x-3|| = 5-|2x-3|$$

236. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha) |x| \geq x$$

$$\beta) |x| > x$$

$$\gamma) |x| \leq x$$

$$\delta) |x| < x$$

$$\epsilon) |x| \geq -x$$

$$\sigma\tau) |x| > -x$$

$$\zeta) |x| \leq -x$$

$$\eta) |x| < -x$$

237. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha) |x-2| > |x+6|$$

$$\beta) |x+4| \leq |x-4|$$

$$\gamma) |3x-1| < 3d(x, 2)$$

238. α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0$ (1)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1| < 2$ (2)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

239. Έστω A και B τα σημεία που παριστάνουν σε έναν άξονα τους αριθμούς -4 και 6 και M το μέσο του τμήματος AB .

α) Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο M ;

β) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x-6| \leq |x+4|$ και να βρείτε τις λύσεις της.

γ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το συμπέρασμά σας

240. Έστω A και B τα σημεία που παριστάνουν σε έναν άξονα τους αριθμούς 2 και 6 και M το μέσο του τμήματος AB .

α) Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο M ;

β) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $|x-2| + |x-6| = 4$ και να βρείτε τις λύσεις της.

γ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το συμπέρασμά σας.

Τράπεζα θεμάτων

2^ο Θέμα

241. (1243) α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| \geq 5$.

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β).

242. (1253) α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 5| < 4$.

β) Αν κάποιος αριθμός a επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{9} < \frac{1}{a} < 1.$$

243. (1272) Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $d(x, -2) < 1$. Να δείξετε ότι:

α) $-3 < x < -1$

β) $x^2 + 4x + 3 < 0$.

244. (1284) α) Να λύσετε την ανίσωση $|x + 4| \geq 3$.

β) Αν $a \geq -1$, να γράψετε την παράσταση $A = ||a + 4| - 3|$ χωρίς απόλυτες τιμές. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

245. (1330) α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών: i) $|2x - 3| \leq 5$ ii) $|2x - 3| \geq 1$

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

246. (1331) α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0$ (1)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| < 2$ (2)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

247. (1355) α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 5| < 2$

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2 - 3x| > 5$

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

248. (1365) α) Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x - \frac{1}{2}\right| < 4$

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x + 5| \geq 3$.

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος.

249. (1367) α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x - 4| = 3|x - 1|$

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|3x - 5| > 1$.

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

250. (12909) Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x - 3| < 5$.

α) Να δείξετε ότι $x \in (-2, 8)$.

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x - 3| < 5$.

γ) Αν A το σύνολο που έχει στοιχεία τις ακέραιες τιμές του x που βρήκατε στο β) ερώτημα και B το σύνολο με $B = \{-3, -2, -1, 0, 3, 4\}$, να παραστήσετε τα σύνολα $A \cup B$ και $A \cap B$ με αναγραφή των στοιχείων τους.

251. (13025) α) Να λύσετε την ανίσωση $-\frac{3-2x}{7} \geq 5$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $|-x - 1| \leq 23$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

4ο Θέμα

252. (1406) Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - (a+1)x + 4 + a$, $a \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = (a-1)^2 - 16$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του a το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ) Αν το τριώνυμο έχει ρίζες x_1, x_2 , τότε:

i) Να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 x_2$ των ριζών του συναρτήσει του a

ii) Να αποδείξετε ότι: $d(x_1, 1) \cdot d(x_2, 1) = 4$

253. (1416) Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda = 0$.

β) Έστω $\lambda \neq 0$.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε.

ii) Αν $x_1 = -1$ και $x_2 = -1 + \frac{2}{\lambda}$ είναι οι δυο ρίζες της εξίσωσης (1), να προσδιορίσετε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει $|x_1 - x_2| > 1$.

254. (1472) α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 3| \leq 5$

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x - 3|$

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x - 3| \leq 5$.

δ) Να βρείτε το πλήθος των ακέραιων αριθμών x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x| - 3| \leq 5$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

255. (1473)α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = a$, με παράμετρο $a \in \mathbb{R}$.

- i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = a$ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.
- ii) Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε.

β) Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

- i) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)} - 2 \leq 2$.

256. (1521)α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x - 4| < 2$.

β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.

- i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.
- ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19.

257. (13474) Δίνονται οι ανισώσεις $|x - 1| \leq \sqrt{3}$ (1) και $3 - \frac{x+4}{2} < 0$ (2)

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1).

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2).

δ) Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί α, β είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2)

τότε και ο αριθμός $\frac{3\alpha + 4\beta}{7}$ είναι επίσης κοινή λύση τους.

Ανισώσεις 2ου βαθμού

Παραγοντοποίηση και Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου

Αν $\Delta > 0$, τότε $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$ και το πρόσημο των τιμών της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	ομόσημο	ετερόσημο	ομόσημο	

Αν $\Delta = 0$, τότε: $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2$ και το πρόσημο των τιμών της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	$-\beta / 2\alpha$	$+\infty$
$f(x)$	ομόσημο του α	ομόσημο του α	

Αν $\Delta < 0$, τότε $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2} \right]$ και το πρόσημο των τιμών της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	ομόσημο του α	

Παραγοντοποίηση τριωνύμου

258. Να παραγοντοποιήσετε τα παρακάτω τριώνυμα:

- α) $x^2 - 3x + 2$ β) $3x^2 + 5x + 2$ γ) $-3x^2 - 3x + 18$ δ) $9x^2 - 24x + 16$
 ε) $x^2 + x + \frac{1}{4}$ στ) $x^2 - 9|x| + 18$ ζ) $2x^2 + 5xy - 3y^2$ η) $x^2 + 3xy + 2y^2$

Τράπεζα θεμάτων

2^ο Θέμα

259. (1250) Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}$.

- α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$.
 β) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K .

260. (1264) Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + \lambda x - 5$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $x_0 = 1$, να προσδιορίσετε την τιμή του λ .
 β) Για $\lambda = 3$, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

261. (1273) Δίνεται το τριώνυμο $-x^2 + (\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = (\sqrt{3} + 1)^2$.
 β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

Δευτεροβάθμιες ανισώσεις

262. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

- α) $3x^2 + 7x + 2 > 0$ β) $-3x^2 + 7x - 4 > 0$ γ) $x^2 + x - 2 \leq 0$ δ) $-x^2 + 5x - 6 \geq 0$
 ε) $x^2 + x \leq 2$ στ) $2x^2 + 40 \geq 18x$ ζ) $x^2 + 16 > 8x$ η) $3x^2 - 12x + 12 \geq 0$
 θ) $9x^2 + 4 \leq 12x$ ι) $x^2 - 3x + 5 \leq 0$ κ) $2x^2 - 12x + 18 < 0$ λ) $-5x^2 + 4x - 1 < 0$

263. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

- α) $3x^2 \geq 12x$ β) $x^2 \leq 2x$ γ) $-2x^2 + 3x > 0$ δ) $\frac{x^2}{2} \leq 4x$ ε) $3x^2 - 12 \geq 0$
 στ) $9 - x^2 < 0$ ζ) $-4x^2 + 1 > 0$ η) $3 > x^2$ θ) $-9x^2 \leq -16$

264. Αφού λύσετε την ανίσωση $x^2 + 3x - 4 < 0$, να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων:

$$A = (-36,879)^2 + 3 \cdot (-36,879) - 4 \quad B = 36,879^2 + 3 \cdot 36,879 - 4$$

$$\Gamma = (-0,9898)^2 + 3 \cdot (-0,9898) - 4 \quad \Delta = (0,9898)^2 + 3 \cdot 0,9898 - 4$$

265. Αφού βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 6x + 8$, να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων:

$$A = (\sqrt[3]{3})^2 - 6 \cdot \sqrt[3]{3} + 8 \quad B = \pi^2 - 6\pi + 8 \quad \Gamma = (-983)^2 + 6 \cdot 983 + 8$$

266. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|x^2 - 6x - 7| = x^2 - 6x - 7$ **β)** $|x^2 - 2x - 3| = 2x + 3 - x^2$ **γ)** $|x^2 - x - 2| \leq x^2 - x - 2$

267. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $|2x - 3| > |x + 2|$ **β)** $|x - 1| \leq |3x - 2|$ **γ)** $x^4 - 5x^2 + 4 > 0$ **δ)** $x^4 - 10x^2 + 9 \leq 0$
ε) $x^2 - 7|x| + 8 < 0$ **στ)** $x^2 - 4|x| + 3 > 0$

268. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + \lambda + 3 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση:

α) έχει ρίζες άνισες **β)** έχει ρίζες ίσες **γ)** είναι αδύνατη

269. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ρίζες πραγματικές και άνισες:

α) $(\lambda + 5)x^2 - 2(1 - \lambda)x + 1 = 0, \lambda \neq -5$ **β)** $(1 - \lambda)x^2 - 3(\lambda - 1)x + 6 = \lambda$

270. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ρίζες άνισες για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ .

α) $x^2 - (\lambda + 2)x + 2\lambda - 3 = 0$ **β)** $2x^2 - 4\lambda x + 7\lambda - 1 = 0$

271. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισώσεις αληθεύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

α) $x^2 + 6\lambda x + 9\lambda^2 + 4 > 0$ **β)** $x^2 - 5\lambda x + 6\lambda^2 + 1 > 0$ **γ)** $-x^2 + 3\lambda x - 3\lambda^2 - \lambda - 5 < 0$

272. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι παρακάτω παραστάσεις διατηρούν σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

α) $x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda - 1 > 0$ **β)** $4x^2 + 4(\lambda + 2)x + 8\lambda + 1 > 0$ **γ)** $\lambda x^2 + (3\lambda - 1)x + \lambda - 3 < 0$

Τράπεζα θεμάτων

2^ο Θέμα

273. (1271) Δίνονται οι ανισώσεις: $-x^2 + 5x - 6 < 0$ (1) και $x^2 - 16 \leq 0$ (2).

α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2).

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

274. (1277) α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 10x + 21 < 0$.

β) Δίνεται η παράσταση: $A = |x - 3| + |x^2 - 10x + 21|$.

i) Για $3 < x < 7$, να δείξετε ότι: $A = -x^2 + 11x - 24$.

ii) Να βρείτε τις τιμές του $x \in (3, 7)$, για τις οποίες ισχύει $A=6$.

275. (1279) α) Να λύσετε την ανίσωση: $3x^2 - 4x + 1 \leq 0$.

β) Αν α, β δυο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{3\alpha + 6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης.

276. (1291) α) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$.

β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

γ) Να τοποθετήσετε το $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

277. (1300) α) Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση: $B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$.

278. (1306) Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

279. (1346) Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $S^2 - P - 2 \geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1).

280. (1350) α) Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x - 5| \leq 3$ και $2x^2 - x - 1 \geq 0$.

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α). (Μονάδες 9)

281. (1356) Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του.

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες: $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{1}{\sqrt{2}}$ και $\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι λύσεις της ανίσωσης $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

282. (1363) α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x+1|}{3} - \frac{|x+1|+4}{5} = \frac{2}{3}$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$.

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος.

283. (12722). Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x - 3$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του $f(x)$.

β) Να επιλύσετε την ανίσωση $-2f(x) < 0$.

284. (12976). α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - x - 1$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $x(1 - 2x) \leq -1$.

285. (13321) α) Να λύσετε την εξίσωση $x^4 - 16 = 0$. (1)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 3x \leq 0$. (2)

γ) Να εξετάσετε εάν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι και λύσεις της ανίσωσης (2).

4ο Θέμα

286. (1391) Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Για ποιες τιμές του λ το παραπάνω τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες.

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \neq 0$, ώστε: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda \leq 0$.

287. (1396) Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $\lambda = 5$ η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει και άλλη τιμή του λ ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες.

δ) Αν $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5$, να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες.

288. (1397) Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$, συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

γ) Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $f(0) \cdot f(k) \cdot f(\mu)$ όπου k, μ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε: $x_1 < k < x_2 < \mu$.

289. (1402) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda + 5 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι: $\Delta = 4\lambda^2 - 12\lambda - 16$.
- β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
- γ) Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 και $d(x_1, x_2)$ είναι η απόσταση των x_1, x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $d(x_1, x_2) = \sqrt{24}$.

290. (1409) Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση: $y = 60t - 5t^2$

- α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;
- β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος $y = 175$ m;
- γ) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m.

291. (1424) Δίνονται οι ανισώσεις: $|x - 2| < 3$ και $x^2 - 2x - 8 \leq 0$.

- α) Να βρείτε τις λύσεις τους.
- β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1, 4]$.
- γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

292. (1425) Δίνονται οι ανισώσεις: $2 \leq |x| \leq 3$ και $x^2 - 4x < 0$.

- α) Να βρείτε τις λύσεις τους.
- β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2, 3]$.
- γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

293. (1426) Δίνονται οι ανισώσεις: $|x + 1| \leq 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

- α) Να λύσετε τις ανισώσεις.
- β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1)$.
- γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι: $\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$.

294. (1432) α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 5x + 6$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

β) Δίνεται η εξίσωση $\frac{1}{4}x^2 + (2 - \lambda)x + \lambda - 2 = 0$ (1) με παράμετρο λ .

- ι) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί.

295. (1436) α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0 < \alpha < 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς: $0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1+\alpha} < 1 + \sqrt{\alpha}$

296. (1438) Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \frac{1}{\sqrt{S-P}}$, όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο

των ριζών της εξίσωσης (1) αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ .

297. (1442) α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς: $0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

ii) Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha, \alpha^2, \frac{\alpha + \alpha^2}{2}$.

298. (1450) Δίνεται η εξίσωση: $(x-2)^2 = \lambda(4x-3)$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης, στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες,

i) να υπολογίσετε τα $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$.

ii) να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3)$ είναι ανεξάρτητη του λ δηλαδή σταθερή.

299. (1455) Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$.

300. (1458) Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε :

i) να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$

ii) να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς

$$f(x_2), f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), f(x_2 + 1).$$

301. (1461) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης.

γ) Για $\lambda > 2$, να αποδείξετε ότι:

i) Οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

ii) $x_1 + 4x_2 \geq 4$.

302. (1462) Δίνεται το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ με ρίζες τους αριθμούς 1 και 2.

α) Χρησιμοποιώντας τους τύπους για το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών του τριωνύμου, να αποδείξετε ότι: $\gamma = 2a$ και $\beta = -3a$.

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x \in (1, 2)$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $a < 0$

ii) να λύσετε την ανίσωση $\gamma x^2 + \beta x + a < 0$.

303. (1465) Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + kx - 4$, με παράμετρο $k \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του k , το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β δυο πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου:

$$\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta).$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

304. (1480) Δίνονται οι εξισώσεις $x^2 - 3x + 2 = 0$ (1) και $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (2).

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (1).

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (2).

γ) Να βρείτε τριώνυμο της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$ που οι ρίζες του να είναι κάποιες από τις ρίζες της εξίσωσης (2) και επιπλέον, για κάθε αρνητικό αριθμό x , να έχει θετική τιμή.

305. (1481) Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 + \beta x + \beta^2$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

β) i) Αν $\beta \neq 0$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου;

ii) Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $\beta = 0$.

γ) Με τη βοήθεια της απάντησής στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

306. (1483) Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2x - 8$.

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x

β) Αν $k = -\frac{8889}{4444}$, είναι η τιμή της παράστασης: $k^2 - 2k - 8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης: $\mu^2 - 2|\mu| - 8$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

307. (1486) Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 6x + \lambda - 3$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

γ) Αν $3 < \lambda < 12$, τότε :

i) να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες..

ii) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του τριωνύμου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

308. (1487) α) i) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου: $x^2 + 9x + 18$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$.

β) i) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x .

ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18$.

309. (1494) α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 5x - 6 < 0$.

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5\frac{46}{47} - 6$ και να

αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

γ) Αν $\alpha \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

310. (1500) Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 6x + \lambda - 7$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

β) i) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος

$S = x_1 + x_2$ των ριζών και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο

$P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7 < \lambda < 16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες. Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) i) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $x^2 - 6|x| + \lambda = 7$ (1)

έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

ii) Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda = 3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

311. (1511) Δίνεται η ανίσωση: $|x + 1| < 4$ (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

γ) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x \geq 0$.

312. (1512) Δίνεται η ανίσωση: $|x - 1| \leq 3$ (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

γ) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x \geq 0$.

313. (1513) Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του x .

β) Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου: $f(2,999) \cdot f(-1,002)$.

γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού: $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$.

314. (1517) **α)** Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x$ (1)

β) Δίνονται δύο αριθμοί κ, λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση: $(\lambda - 1)(\kappa - 1) < 0$.

i) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ, λ . **ii)** Να δείξετε ότι: $|\kappa - \lambda| \geq \frac{3}{2}$.

315. (1518) Δίνεται πραγματικός αριθμός α , που ικανοποιεί τη σχέση: $|\alpha - 2| < 1$

α) Να γράψετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του α .

β) Θεωρούμε στη συνέχεια το τριώνυμο: $x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4}$.

i) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να προσδιορίσετε το πρόσημό της.

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4} > 0$

316. (1520) **α)** Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + x - 6 < 0$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x - \frac{1}{2}\right| > 1$.

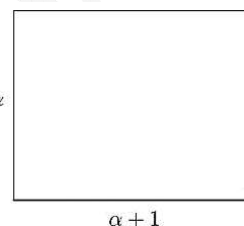
γ) Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές

α και $\alpha + 1$ όπου ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| > 1$. Αν για

το εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $E < 6$, τότε:

i) Να δείξετε ότι: $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.



317. (1522) **α)** Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α , β διαφορετικούς από το 0 με $\alpha < \beta$ για τους οποίους ισχύει $(\alpha^2 - 3\alpha + 2)(\beta^2 - 3\beta + 2) < 0$.

Να αποδείξετε ότι ισχύει $|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$.

318. (13176) Δίνονται οι ανισώσεις $|x - 1| < 2$ και $x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1, 1] \cup [2, 3)$.

γ) i. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με

$\rho_1, \rho_2 \in (-1, 1]$, είναι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση;

ii. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με

$\rho_1 \in (-1, 1]$ και $\rho_2 \in [2, 3)$, είναι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση;

319. (13174) Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{-x^2 + 4|x| - 3}{|x| - 1}$ και $B = \frac{x^2 - 4|x| + 4}{|x| - 2}$.

α) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζονται οι παραστάσεις A και B ;

β) Να δείξετε ότι $A = 3 - |x|$ και $B = |x| - 2$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $B - A < 2d(x, 4) - 5$.