

Πρόδοι Ακολουθίες Τράπεζα θεμάτων

4^ο Θέμα

320. (13056) Οι αριθμοί 1, 3, 6, 10, ... και γενικά αυτοί που είναι δυνατόν, αν παρασταθούν με τελείες, να τοποθετηθούν σε μια τριγωνική διάταξη της μορφής που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα λέγονται τριγωνικοί.

•	• • •	• • • • • •	• • • • • • • • • •	•••
1	3	6	10	...

Αποδεικνύεται ότι ο νιοστός τριγωνικός αριθμός δίνεται από τον τύπο

$$T_v = \frac{v(v+1)}{2}, v \in \mathbb{N}^*.$$

α) Να βρείτε τον 10^ο τριγωνικό αριθμό.

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός.

γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου.

Αριθμητική πρόοδος Τράπεζα θεμάτων

321. (1240) Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) με όρους $a_2 = 0, a_4 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $a_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και a_1 ο πρώτος όρος της.

β) Να αποδείξετε ότι ο n -οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $a_n = 2n - 4$, $n \in \mathbb{N}^*$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

322. (1245) **α)** Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί :

$x + 2, (x + 1)^2, 3x + 2$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β) Να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν

i) $x = 1$ ii) $x = -1$.

323. (2.1247) Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της n -οστής σειράς.

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά; **γ)** Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

324. (1249) Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_n) για την οποία ισχύει ότι: $a_1 = 19$ και

$$\alpha_{10} - \alpha_6 = 24.$$

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$.

β) Να βρείτε τον α_{20} .

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.

325. (1256) Οι αριθμοί $A = 1, B = x + 4, \Gamma = x + 8$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (αν).

α) Να βρείτε τη τιμή του x .

β) Αν $x=1$ και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_n) ,

i) να υπολογίσετε τη διαφορά ω .

ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου.

326. (1266) Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\beta x + (\beta^2 - 4) = 0, (1)$ με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = \beta - 2$ και $x_2 = \beta + 2$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 , με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

327. (1282) Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) , για την οποία ισχύει: $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$.

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου.

328. (1292) Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_3 = 9$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

β) Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο n , ώστε να ισχύει $\alpha_n > 30$.

329. (1325) Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_n) ισχύουν: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$.

β) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152.

330. (1326) Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) με διαφορά ω .

α) Να δείξετε ότι: $\frac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2$

β) Αν $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

331. (1328) Σε αριθμητική πρόοδο (α_n) ισχύουν: $\alpha_4 - \alpha_9 = 5$ και $\alpha_1 = 41$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3.

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο n , ώστε $\alpha_n = n$.

332. (1329) Σε αριθμητική πρόοδο (α_n) με διαφορά $\omega = 4$, ισχύει: $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$.

- α) Να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 της προόδου.
 β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

333. (1336) Οι αριθμοί $x + 6, 5x + 2, 11x - 6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο a_1 και διαφορά ω .

- α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega = 4$.
 β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $a_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων.

334. (1343) Σε αριθμητική πρόοδο (a_n) είναι $a_1 = 2$ και $a_5 = 14$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$.
 β) Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77. (Δίνεται: $\sqrt{1849} = 43$).

335. (1344) Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) των θετικών περιττών αριθμών: 1, 3, 5, 7, ...

- α) Να αιτιολογήσετε γιατί η (a_n) είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της.
 β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των n πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους.

336. (1347) Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει a καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7η σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300.

- α) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.
 β) Πόσα καθίσματα έχει κάθε σειρά;

337. (1370) α) Να βρείτε το άθροισμα των n πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων 1, 2, 3, ..., n .

- β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45.

4ο Θέμα

338. (1387) Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η 1η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7η σειρά έχει 28 καθίσματα.

- α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου.
 β) Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου. γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;
 δ) Αν στην 1η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη 2η και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

- i) Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.
- ii) Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές.

339. (1395) Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των 21 € ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις. Θέλοντας να αυξήσει τη πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3 € και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5 € περισσότερο από τον προηγούμενο.

- α)** Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης.
- β)** Αν, για κάθε $n \leq 51$ ο αριθμός a_n εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο n -οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $a_1, a_2, \dots, a_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της
- γ)** Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο 51ος επιβάτης.
- δ)** Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε διαθέτοντας τα εισιτήρια στην τιμή των 21 € ανά εισιτήριο.

(Δίνεται ότι: $\sqrt{10021} = 101$)

340. (1399) Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) , όπου $n \in \mathbb{N}^*$ που αποτελείται από ακέραιους αριθμούς για την οποία ισχύει ότι:

$$a_1 = x, a_2 = 2x^2 - 3x - 4, a_3 = x^2 - 2 \text{ όπου } x \in \mathbb{R}.$$

- α)** Να αποδειχθεί ότι $x = 3$.
- β)** Να βρεθεί ο n -οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014.
- γ)** Να υπολογιστεί το άθροισμα $S = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{15}$.

341. (1411) Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

- α)** Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το νο όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της;
- β)** Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20η κυψέλη; (Μονάδες 6)
- γ)** Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.
 - i)** Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3η κυψέλη;
 - ii)** Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες;

342. (1417) Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει

12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά.

β) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου.

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7η μέχρι και την 14η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

343. (1430) Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών.

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

344. (1453) Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) με διαφορά ω .

α) Να αποδείξετε ότι $a_{20} - a_{10} = 10\omega$.

β) Αν $a_{20} - a_{10} = 30$ και $a_1 = 1$, να αποδείξετε ότι $a_n = 3n - 2$.

γ) Ποιος είναι ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30;

δ) Πόσοι όροι της παραπάνω προόδου είναι μικρότεροι του 60;

345. (1471) Σε αριθμητική πρόοδο είναι $a_2 = \kappa^2$ και $a_3 = (\kappa + 1)^2$, κ ακέραιος με $\kappa > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι αριθμός περιττός.

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $a_1 = 2$, τότε:

i) Να βρείτε τον αριθμό κ και να αποδείξετε ότι $\omega = 7$.

ii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου.

346. (1488) Στην Α' τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλευεται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:

«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x - 1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x + 3$ σειρές με $x + 3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του x

β) Να αποδείξετε η Α' τάξη έχει 90 μαθητές.

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε n ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του n , δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν.

347. (1502) Οι αριθμοί : $x^2 + 5$, $x^2 + x$, $2x + 4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x .

β) Αν $x = 3$ και ο αριθμός $x^2 + 5$ είναι ο 4ος όρος της προόδου, να βρείτε:

i) Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. **ii)** Τον πρώτο όρο της προόδου.

iii) Το άθροισμα $S = a_{15} + a_{16} + a_{17} + \dots + a_{24}$.

348. (1503) Σε μια αριθμητική πρόοδο (a_n) , ο 3ος όρος είναι $a_3 = 8$ και ο 8ος όρος είναι $a_8 = 23$.

α) Να αποδείξετε ότι ο 1ος όρος της αριθμητικής προόδου είναι $a_1 = 2$ και η διαφορά της $\omega = 3$.

β) Να υπολογίσετε τον 31ο όρο της.

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S = (a_1 + 1) + (a_2 + 2) + (a_3 + 3) + \dots + (a_{31} + 31)$

349. (1507) Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_n) με $a_3 = 10$ και $a_{20} = 61$.

α) Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου.

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου

(a_n) , τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$.

350. (12694). Ένα παιχνίδι στον υπολογιστή έχει επίπεδα δυσκολίας. Ένας παίκτης έχει καθορισμένο χρόνο για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο. Στο επίπεδο 1 (το πιο εύκολο επίπεδο) ο παίκτης έχει χρονικό όριο 300 δευτερολέπτων για να το ολοκληρώσει. Στο επίπεδο 4 το χρονικό όριο είναι 255 δευτερόλεπτα. Οι μέγιστοι επιτρεπόμενοι χρόνοι σε κάθε επίπεδο αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. Τι δηλώνει η διαφορά ω στο πλαίσιο του προβλήματος;

β) Το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων. Να βρείτε τον αριθμό των επιπέδων στο παιχνίδι.

γ) Να βρείτε τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι.

δ) Ένας παίκτης ολοκληρώνει το επίπεδο 1 σε 147 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 2 σε 150 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 3 σε 153 και κάθε φορά που ανεβαίνει επίπεδο χρειάζεται 3 επιπλέον δευτερόλεπτα. Μέχρι ποιο επίπεδο θα προλάβει να παίξει; Θα ολοκληρώσει το παιχνίδι;

351. (13171). Το άθροισμα των n πρώτων διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας (a_n) είναι $a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_n = 2n^2 + 3n$, $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 1$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 . **β)** Να αποδείξετε ότι $S_{n-1} = 2n^2 - n - 1$, $n \geq 2$.

γ) Να αποδείξετε ότι $a_n = 4n + 1$, $n \geq 1$.

δ) Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω .

352. (13089) Η Μαρία αγόρασε ένα βιβλίο που το διάβασε δυο φορές γιατί της άρεσε πολύ! Την πρώτη φορά, διάβασε την 1η ημέρα 1 σελίδα, την 2η ημέρα 3 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Τη δεύτερη φορά άλλαξε τρόπο διαβάσματος. Διάβασε την 1η ημέρα 13 σελίδες, την 2η ημέρα 11 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες λιγότερες από την προηγούμενη. Η Μαρία παρατήρησε ότι και τις δυο φορές χρειάστηκε ακριβώς το ίδιο πλήθος ημερών για να διαβάσει το βιβλίο.

α) i. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα την πρώτη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_n) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο α_n , αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.

ii. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα τη δεύτερη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (β_n) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο β_n , αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.

β) Να δείξετε ότι η Μαρία χρειάστηκε 7 ημέρες για να διαβάσει το βιβλίο.

γ) Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο.

δ) Να δείξετε ότι $\alpha_n = \beta_{8-n}$ για κάθε $n = 1, 2, \dots, 7$.

353. (13173) Δίνεται η ακολουθία (α_n) με γενικό τύπο $\alpha_n = 10 + 3n$.

α) i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_n) είναι αριθμητική πρόοδος.

ii. Να βρείτε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

β) Να βρείτε ποιοι όροι της (α_n) βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. Πόσοι είναι οι όροι αυτοί;

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401.

354. (12764) Σε ένα γήπεδο καλαθοσφαίρισης, σε μία από τις κερκίδες του, η οποία διαθέτει 40 σειρές καθισμάτων, στη 10η σειρά υπάρχουν 50 καθίσματα. Μετά την πρώτη σειρά κάθε επόμενη διαθέτει 2 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

α) Αν α_n το πλήθος των καθισμάτων της n -οστής σειράς, τότε να αποδείξετε ότι α_n είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τη διαφορά ω .

β) Να υπολογίσετε το σύνολο των καθισμάτων που διαθέτει η συγκεκριμένη κερκίδα.

γ) Αν για λόγους ασφαλείας σε έναν αγώνα επιτρέπεται να καθίσουν θεατές μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων της κερκίδας, να βρείτε πόσους καθήμενους θεατές θα χωρέσει αυτή η κερκίδα.

355. (12945) Θεωρούμε αριθμητική πρόοδο (α_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha_3 = 8$ και $\alpha_{11} = 32$ και την αριθμητική πρόοδο (β_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ που περιέχει τους περιττούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 56.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$.

β) Να βρείτε αν ο αριθμός β_2 περιέχεται στην πρώτη πρόοδο

γ) Αν το άθροισμα των $2n$ πρώτων όρων της $\varepsilon(\alpha_n)$ ίναι ίσο με το άθροισμα των n πρώτων

όρων της (β_v) να βρείτε τον αριθμό v .

Γεωμετρική πρόοδος

356. (1242)α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: x , $2x+1$, $5x+4$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β) Να βρείτε το λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

- i) $x=1$ ii) $x=-1$

357. (1257) α) Αν οι αριθμοί $4-x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .

β) Αν οι αριθμοί $4-x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4-x$, x , 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

358. (1265) Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0$ (1), με παράμετρο $\beta > 0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = 2\beta$ και $x_2 = \frac{\beta}{2}$.

β) Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1 , β , x_2 , με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

359. (1311) Οι αριθμοί $\kappa-2$, 2κ και $7\kappa+4$, $\kappa \in \mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (a_v) .

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa=4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου.

β) i) Να εκφράσετε το 2ο όρο, τον 5ο και τον 4ο όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του a_1 .

ii) Να αποδείξετε ότι $a_2 + a_5 = 4(a_1 + a_4)$.

360. (1321)α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x , οι αριθμοί $x+4$, $2-x$, $6-x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β) Αν $x=5$ και ο $6-x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, να βρείτε

- i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου. ii) τον πρώτο όρο a_1 της προόδου.

361. (1339) Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (a_v) , για την οποία ισχύει $\frac{a_5}{a_2} = 27$.

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda=3$.

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 .

362. (1360) Σε γεωμετρική πρόοδο (a_v) με θετικό λόγο λ , ισχύει: $a_3=1$ και $a_5=4$.

α) Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο v -οστός όρος της προόδου είναι: $a_v = 2^{v-3}$

363. (12787)**α)** Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$.

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό k ώστε οι αριθμοί $k - 2, k, 2k + 3$ να είναι διαδοχικοί όροι σε μια γεωμετρική πρόοδο.

4ο Θέμα

364. (1392)Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διωλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1ης ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ), στο τέλος της 2ης ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της 3ης ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5ης ημέρας μετά το ατύχημα.

β) Πόσες ημέρες μετά από την στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768 τ.μ.;

γ) Στο τέλος της 8ης ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

365. (1394)Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες;

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 6400, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_v το πλήθος των βακτηρίων v ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($v \leq 5$).

i) Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_v) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.

ii) Να εκφράσετε το πλήθος β_v των βακτηρίων συναρτήσει του v .

iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης;

366. (1435)Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:

Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 1 ευρώ, το 2ο μήνα 2 ευρώ, τον 3ο μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 100 ευρώ, το 2ο μήνα 110 ευρώ, τον 3ο μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α) i) Να βρείτε το ποσό a_v που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το v^o μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

- ii) Να βρείτε το ποσό β_n που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το n^o μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.
 - iii) Να βρείτε το ποσό A_n που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από n μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.
 - iv) Να βρείτε το ποσό B_n που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από n μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.
- β) i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα;
- ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο;

367. (1499) Δίνονται οι αριθμοί 2, x , 8 με $x > 0$.

- α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x , 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;
- β) Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x , 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου;
- γ) Αν (α_n) είναι η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, 11, ... και (β_n) είναι η γεωμετρική πρόοδος 2, 4, 8, 16, ... τότε:
 - i) Να βρείτε το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων της (α_n) .
 - ii) Να βρείτε την τιμή του n ώστε, για το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων της (α_n) να ισχύει: $2(S_n + 24) = \beta_7$

368. (1519) Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα: $\alpha_3 = 4$, $\alpha_5 = 16$ και $\lambda > 0$.

- α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ της προόδου.
- β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_n) , με $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_n) .
- γ) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων (α_n) και (β_n) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση: $S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}$.

369. (12731) Έστω πραγματικοί αριθμοί κ , λ ($\kappa \neq 0$, $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$). Θεωρούμε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}$, κ , $\kappa \cdot \lambda$.

- α) Να αποδείξετε ότι οι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
- β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών είναι πάντα διάφορο του μηδενός.
- γ) Αν οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}$, $\kappa \cdot \lambda$, ($\kappa > 0$, $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$) είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 10x + 16 = 0$, να βρείτε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}$, κ , $\kappa \cdot \lambda$.

370. (12998) Δίνονται οι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου (a_n) :

$$\frac{27\sqrt{3}}{2}, \frac{81}{2}, \frac{81\sqrt{3}}{2}.$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι παραπάνω όροι δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

ii. $\frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^7$

β) Αν $a_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$, να βρεθεί ο ν-οστός όρος της γεωμετρικής προόδου.

γ) Αν $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της

γεωμετρικής προόδου (a_n) είναι ίσο με $\frac{(\sqrt{3})^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}$.

Η Έννοια της Συνάρτησης

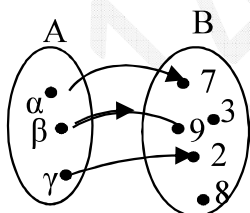
Ορισμός συνάρτησης

Συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B λέγεται μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου B.

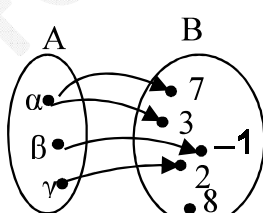
- Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης.
- Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές μιας συνάρτησης f για όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με **f(A)**.
- Αν με μια συνάρτηση f το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, τότε γράφουμε $y = f(x)$.

Το γράμμα x που παριστάνει οποιαδήποτε στοιχείο του A λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το y, που παριστάνει την τιμή της f στο x, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

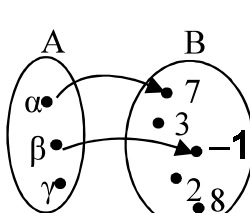
371. Ποιες από τις παρακάτω αντιστοιχίσεις είναι συναρτήσεις και ποιες δεν είναι; Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και ποιο το σύνολο τιμών σε κάθε περίπτωση;



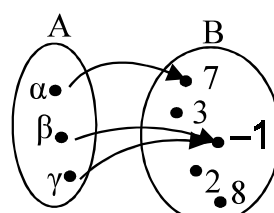
Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4

372. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 3$ β) $g(x) = \frac{x-2}{x-3}$ γ) $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$ δ) $t(x) = \frac{x-1}{x^2 - 5x + 6}$

ε) $h(x) = 2 - \frac{x}{x+2} + \frac{x-1}{x-2}$ στ) $h(x) = x^5 - \frac{1}{x} + \frac{x^3}{x+3}$ ζ) $t(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 3}$

373. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \sqrt{x-2} \quad \beta) g(x) = \sqrt{4-x} - 3x\sqrt{x+2} \quad \gamma) h(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}}$$

$$\delta) t(x) = \frac{\sqrt{|x|-2}}{x-3} \quad \varepsilon) \varphi(x) = \frac{\sqrt{|x|-x}}{|x|-2} \quad \sigma\tau) \sigma(x) = \frac{3x-4}{|x|+x} - \sqrt{x^2+1}$$

374. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \sqrt{x-1} \quad \beta) g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{2-x} \quad \gamma) h(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

$$\delta) t(x) = \frac{\sqrt{|x|-1}}{|x|-2} \quad \varepsilon) \varphi(x) = \frac{\sqrt{3-|x|}}{|x|-1} \quad \sigma\tau) \sigma(x) = \frac{2x+5}{|x|-x} - \sqrt{x^2+9}$$

375. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , για τις οποίες οι παρακάτω συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

$$\alpha) f(x) = \frac{3x^2 + x - 4}{x^2 - 4x + 2\lambda} \quad \beta) f(x) = \frac{x^3 - 8x}{x^2 - 4x - \lambda}$$

376. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 5x$. Ναδειχθεί ότι:

$$\alpha) f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$$

$$\beta) f(3\alpha) = 3f(\alpha)$$

$$\gamma) f(\alpha)f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 25$$

$$\delta) f(|\alpha|) = |f(\alpha)| \quad \text{για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

377. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4$.

$\alpha)$ Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

$\beta)$ Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(6)$.

$\gamma)$ Να αποδείξετε ότι $f(\alpha\beta) + 4f(\alpha + \beta) - 8\alpha\beta = f(\alpha)f(\beta) + 4$.

$\delta)$ Να λύσετε την εξίσωση $f(\alpha + 1) = 8$.

378. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x-2, & x < 0 \\ x^2-2x+4, & x \geq 0 \end{cases}$.

$\alpha)$ Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-3)$, $f(2)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$.

$\beta)$ Να αποδείξετε ότι: $f(-3) + f(2) + f(1) + f(0) - 5 = f(-1)$.

379. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & |x| \geq 1 \end{cases}$. Να υπολογίσετε τα

$$f\left(\frac{1}{2}\right), f(-2), f(-\sqrt{2}), f\left(\frac{\pi}{4}\right), f(1)$$

380. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x| - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 3$.

381. Ένα ορθογώνιο με διαστάσεις x και y cm, έχει περίμετρο 12cm.

α) Να βρείτε την συνάρτηση του εμβαδού του ορθογωνίου σε σχέση με το x .

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της προηγούμενης συνάρτησης.

γ) Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου που έχει εμβαδόν 5cm^2

382. Μια ορθογώνια περιοχή έχει περιφραχτεί από τις τρεις πλευρές της, με συρματόπλεγμα μήκους 100μ. Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος. Αν το μήκος του τοίχου είναι x , να εκφράσετε το εμβαδόν της περιοχής ως συνάρτηση του x .

383. Σύρμα μήκους 20εκ. κόβεται σε δύο κομμάτια με μήκη x και $20-x$ εκ. Με το πρώτο κομμάτι σχηματίζουμε τετράγωνο και με το δεύτερο, ισόπλευρο τρίγωνο.

Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων, ως συνάρτηση του x .

384. Δύο πλοία Π_1 και Π_2 αναχωρούν συγχρόνως από ένα λιμάνι Λ . Το πλοίο Π_1 κινείται ανατολικά με ταχύτητα 15km/h και το Π_2 βόρεια, με ταχύτητα 20km/h .

α) Να βρείτε τις συναρτήσεις θέσεως των Π_1 και Π_2 .

β) Να εκφράσετε την απόσταση $d=(\Pi_1\Pi_2)$ των δύο πλοίων, ως συνάρτηση του χρόνου t .

385. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x , y και υποτείνουσα ίση με 10cm .

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ συναρτήσει του x δίνεται από

$$\text{τον τύπο : } E(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{100 - x^2}, \quad x \in (0,10)$$

β) Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq 25$ για κάθε $x \in (0,10)$.

γ) Για ποια τιμή του $x \in (0,10)$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 25 ; Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο $AB\Gamma$;

Τράπεζα θεμάτων

386. (1244) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x < 0 \\ x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι $f(-1) = f(3)$. β) Να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 0$.

387. (1255) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να δείξετε ότι: $f(2) + f(4) = 0$.

388. (1263) Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη A , μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση: $y = 35 + 0,8x$

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη A μετά από 25 λεπτά;

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη A ;

389. (1283) Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} 8 - x, & \text{αν } x < 0 \\ 2x + 5, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι: $f(-5) = f(4)$

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 9$.

390. (1295) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $f(x) = x^2 + 4x$.

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 32$.

391. (1297) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{5}{2}$.

392. (1354) Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A .

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 3$.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$.

393. (1537) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{5}{2}$.

394. (1372) Δίνεται η συνάρτηση f , με: $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$.

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος.

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 25$.

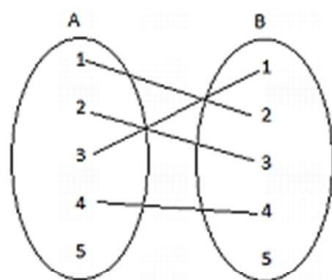
395. (1385) **α)** Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$

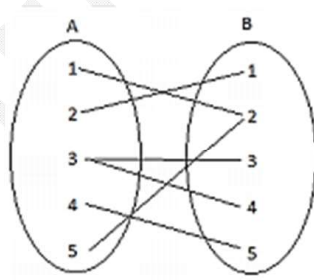
i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = \frac{1}{x-3}$.

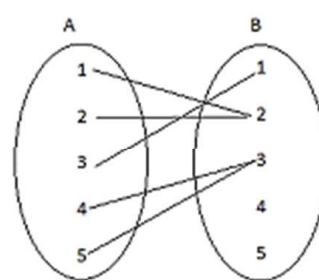
396. (12908). Στα παρακάτω σχήματα δίνονται 3 αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B .



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν παριστάνουν συνάρτηση από το A στο B ενώ του σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το A στο B .

β) Αν η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι η συνάρτηση f ,

i. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

ii. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης f .

iii. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(2)$.

397. (12997) Έχουμε μπροστά μας τη λίστα με τα ονοματεπώνυμα των μαθητών ενός τμήματος της Α' λυκείου ενός Γενικού Λυκείου. Σχηματίζουμε τα σύνολα A , με στοιχεία τα μικρά ονόματα μαθητών της Α' τάξης ενός Γενικού Λυκείου και B με στοιχεία τα επώνυμα μαθητών της Α' τάξης του ίδιου Γενικού Λυκείου. Ορίζουμε την αντιστοίχιση

$f: A \rightarrow B$ σύμφωνα με την οποία αντιστοιχούμε κάθε μικρό όνομα μαθητή στο επώνυμό του και την $g: B \rightarrow A$ με την οποία αντιστοιχούμε σε κάθε επώνυμο μαθητή το μικρό του όνομα.

α) Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση $f: A \rightarrow B$ ορίζει πάντα συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B .

β) Να προσδιορίσετε υπό ποιες προϋποθέσεις η αντιστοίχιση $g: B \rightarrow A$ αποτελεί συνάρτηση από το σύνολο B στο σύνολο A και να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή.

398. (13031) Δίνεται η συνάρτηση G με $G(x) = \frac{2x+3}{x-4}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της G για $x = 2$, $x = 0$, $x = -\frac{1}{2}$.

β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση G .

γ) Να βρείτε την τιμή του x που αντιστοιχίζεται, μέσω της G , στο 3.

399. (13032) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - 3x$, $g(x) = \sqrt{x+5}$.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων f και g .

β) Να δείξετε ότι $f(-1) = g(11)$.

γ) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε $f(x) = g(4)$.

400. (13026) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 2x, & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(\sqrt{2})$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

β) Αν x ρητός, να λύσετε την εξίσωση $[f(x)]^2 = 4x - 1$.

4ο Θέμα

401. (1389) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2 + \kappa x + \lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των κ , λ .

β) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$,

i) να απλοποιήσετε τον τύπο της g .

ii) να δείξετε ότι: $g(a+3) > g(a)$ όταν $a \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

402. (1390) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{x^2 + kx + \lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των k, λ .

β) Για $k = 1$ και $\lambda = -2$,

i) να απλοποιήσετε τον τύπο της g .

ii) να δείξετε ότι: $g(\alpha) \cdot g(\beta) > 0$ όταν $\alpha, \beta \in (-1, 1) \cup (1, 2)$.

403. (1526) Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

- $|1 - 3\alpha| < 2$
- Η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1.

α) Να αποδειχθεί ότι $-\frac{1}{3} < \alpha < 1$.

β) Να αποδειχθεί ότι $|\beta - 3\alpha - 1| < 3$.

γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4(\beta - 2)x + \beta^2}$ έχει πεδίο ορισμού όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

404. (1457) Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Να βρείτε το λ , ώστε η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

405. (1390) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{x^2 + kx + \lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των k και λ .

β) Για $k = 1$ και $\lambda = -2$:

i) Να απλοποιήσετε τον τύπο της g .

ii) Να δείξετε ότι: $g(\alpha) \cdot g(\beta) > 0$, όταν $\alpha, \beta \in (-1, 1) \cup (1, 2)$.

406. (1400) Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x) = 12,5x + 120$ και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), σε διάστημα ενός μηνός, από τη συνάρτηση $E(x) = 15,5x$.

α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος;

- γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση)
- δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

407. (1418) Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d+1)$ cm.

- α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d , το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β.
- β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:
- Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου.
 - Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν.

408. (1441) Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 - 4x + \alpha$ και $g(x) = \alpha x - 5$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

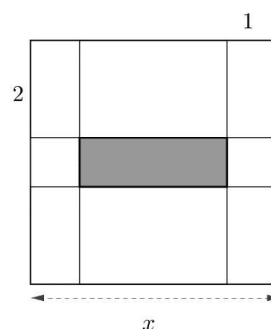
- α) Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του α .
- β) Για $\alpha = 1$,
- να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$
 - να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$

409. (1420) Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \leq x \leq 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).

- α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:
- $$E(x) = (x - 2)(x - 4)$$

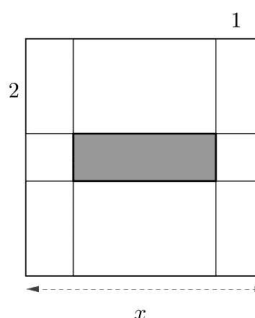
β) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2 .

γ) Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον 24 cm^2 .



410. (1421) Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \leq x \leq 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).

- α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:
- $$E(x) = x^2 - 6x + 8.$$



β) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 24 cm^2 .

γ) Αν το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων είναι το πολύ 35 cm^2 , να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου.

411. (1422) Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}\text{F}$), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.

Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) σε βαθμούς Κέλβιν ($^{\circ}\text{K}$), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) το 273.

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν ($^{\circ}\text{K}$) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}\text{F}$) είναι η:

$$K = \frac{F - 32}{1,8} + 273.$$

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278°K μέχρι 283°K . Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε $^{\circ}\text{F}$.

412. (1467) Αν ένας κάτοικος μιας πόλης Α καταναλώσει x κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 12 + 0,5x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 30 \\ 0,7x + 6, & \text{αν } x > 30 \end{cases}$$

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i) έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό.

ii) έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού.

iii) έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού.

β) Σε μια άλλη πόλη Β το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο: $g(x) = 12 + 0,6x$, για $x \geq 0$.

Ένας κάτοικος της πόλης Α και ένας κάτοικος της πόλης Β κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού, για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλη Β, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

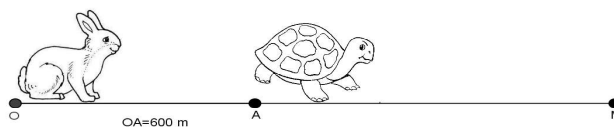
413. (1484) Ο αγώνας δρόμου ανάμεσα στη χελώνα και το λαγό γίνεται σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:

- Η διαδρομή είναι τμήμα ενός ευθύγραμμου δρόμου.

- Ο λαγός ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t = 0$ από ένα σημείο Ο.

- Το τέρμα βρίσκεται σε σημείο Μ με $OM > 600$ μέτρα.

- Η χελώνα ξεκινάει τη στιγμή $t = 0$ με προβάδισμα, δηλαδή από ένα σημείο Α που βρίσκεται μεταξύ του



Ο και του Μ, με $OA = 600$ μέτρα.

Υποθέτουμε ότι, η απόσταση του λαγού από το Ο τη χρονική στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_{\lambda}(t) = 10 t^2$ μέτρα, ενώ η απόσταση της χελώνας από το Ο τη στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_x(t) = 600 + 40t$ μέτρα.

α) Να βρείτε σε πόση απόσταση από το Ο θα πρέπει να βρίσκεται το τέρμα Μ, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα.

β) Υποθέτουμε τώρα ότι η απόσταση του τέρματος Μ από το Ο είναι $OM = 2250$ μέτρα. Να βρείτε:

i) Ποια χρονική στιγμή ο λαγός φτάνει τη χελώνα.

ii) Ποιος από τους δύο δρομείς προηγείται τη χρονική στιγμή $t = 12$ min και ποια είναι τότε η μεταξύ τους απόσταση.

iii) Ποια χρονική στιγμή τερματίζει ο νικητής του αγώνα.

414. (1437) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = |x| - 2$.

γ) Για $x \in A$, να λύσετε την εξίσωση: $(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$.

415. (1495) Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x, y τέτοια, ώστε: $x + y = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ συναρτήσει του x δίνεται

από τον τύπο: $E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x), x \in (0, 10)$

β) Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0, 10)$.

γ) Για ποια τιμή του $x \in (0, 10)$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$; Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο $AB\Gamma$;

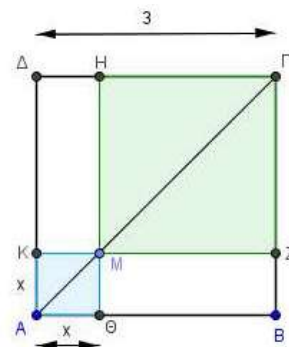
416. (1497) Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο πλευράς $AB = 3$ και το Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου AG . Έστω E το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.

α) Να αποδείξετε ότι $E = 2x^2 - 6x + 9, x \in (0, 3)$.

β) Να αποδείξετε ότι $E \geq \frac{9}{2}$ για κάθε $x \in (0, 3)$.

γ) Για ποια θέση του Μ πάνω στην AG το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος

γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



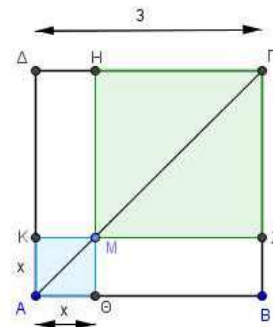
417. (1457) Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Να βρείτε το λ , ώστε η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

418. (1497) Στο επόμενο σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο πλευράς $AB=3$ και το M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου $ΑΓ$. Έστω E το συνολικό εμβαδόν των



σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.

α) Να αποδείξετε ότι $E = 2x^2 - 6x + 9$, $x \in (0, 3)$.

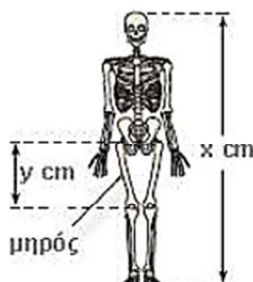
β) Να αποδείξετε ότι $E \geq \frac{9}{2}$, για κάθε $x \in (0, 3)$.

γ) Για ποια θέση του M πάνω στην $ΑΓ$ το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο

με $\frac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

419. (1501) Οι ανθρωπολόγοι

για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του :



$$\text{Γυναίκα: } y = 0,43x - 26$$

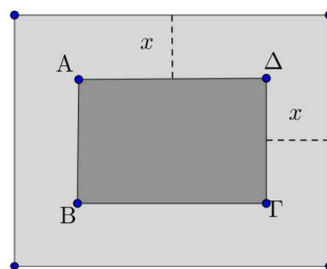
$$\text{Άνδρας: } y = 0,45x - 31$$

α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 38,5 cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας.

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164 cm. Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 42,8 cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους.

420. (1505) Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις 15m και 25m. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x m ($x > 0$), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση: $E(x) = 4x^2 + 80x, x > 0$

β) Να βρεθεί το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E = 500 \text{ m}^2$.

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από 500 m^2 ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

421. (1506) Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο $\Pi = 40 \text{ cm}$. Αν $x \text{ cm}$ είναι το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε :

α) να αποδείξετε ότι $0 < x < 20$.

β) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση:

$$E(x) = 20x - x^2.$$

γ) να αποδείξετε ότι ισχύει $E(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$.

δ) να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40 cm , εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10 cm .

422. (1510) Δυο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα. Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους κ.α.). Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του

ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος $K(v)$ της επιχείρησης, αν γεμίζει v τόνερ το μήνα.

β) Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει τα μηνιαία έσοδα $E(v)$ της επιχείρησης από την πώληση v αριθμού τόνερ το μήνα.

γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση

i) να μην έχει ζημιά.

ii) να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ.

423. (1526) Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

- $|1 - 3\alpha| < 2$

- Η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1 .

α) Να αποδειχθεί ότι $-\frac{1}{3} < \alpha < 1$.

β) Να αποδειχθεί ότι $|\beta - 3\alpha - 1| < 3$.

γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4(\beta - 2)x + \beta^2}$ έχει πεδίο ορισμού όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

424. (13114) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x-1| - |3-3x| + |2x-4|}{2}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = d(x, 2) - d(x, 1)$.

β) Αν τα σημεία A και B παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς 1 και 2, να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $f(x) = 0$ και να προσδιορίσετε τη λύση της.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Γραφική παράσταση Συνάρτησης

Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων λέγεται ένα ζεύγος κάθετων αξόνων $x'x$ και $y'y$ με κοινή αρχή O. Συμβολίζεται με **Oxy**.

Το επίπεδο στο οποίο ορίστηκε το σύστημα αυτό λέγεται **καρτεσιανό επίπεδο**.

Αν επιπλέον οι μονάδες των αξόνων έχουν το ίδιο μήκος το σύστημα Oxy λέγεται **ορθοκανονικό**. Ο οριζόντιος άξονας $x'x$ καλείται **άξονας των τετμημένων** ή **άξονας των x** και ο κατακόρυφος άξονας $y'y$ καλείται **άξονας των τεταγμένων** ή **άξονας των y**.

Σε κάθε σημείο M του καρτεσιανού επιπέδου αντιστοιχίζουμε ένα διατεταγμένο ζευγάρι (x, y) πραγματικών αριθμών που ονομάζονται **συντεταγμένες** του σημείου M. Το σημείο συμβολίζεται με $M(x, y)$. Το x λέγεται **τετμημένη** και το y **τεταγμένη** του σημείου M.

Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα μέρη καθένα που ονομάζονται **τεταρτημόρια** και διακρίνονται σε 1° , 2° , 3° , 4° .

Συμμετρίες

- Το σημείο $M_1(\alpha, -\beta)$ είναι το συμμετρικό του σημείου $M(\alpha, \beta)$ **ως προς τον άξονα $x'x$** . Δηλαδή δύο σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$ έχουν την ίδια τετμημένη και αντίθετες τεταγμένες.
- Το σημείο $M_2(-\alpha, \beta)$ είναι το συμμετρικό του σημείου $M(\alpha, \beta)$ **ως προς τον άξονα $y'y$** . Δηλαδή δύο σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$ έχουν την ίδια τεταγμένη και αντίθετες τετμημένες.
- Το σημείο $M_3(-\alpha, -\beta)$ είναι το συμμετρικό του σημείου $M(\alpha, \beta)$ **ως προς την αρχή**

Ο των αξόνων.

Δηλαδή δύο σημεία συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων έχουν αντίθετες συντεταγμένες.

- Το σημείο $M_4(\beta, \alpha)$ είναι το συμμετρικό του σημείου $M(\alpha, \beta)$ **ως προς την διχοτόμο της $1^\text{ης}$ και $3^\text{ης}$ γωνίας των αξόνων**.

Δηλαδή δύο σημεία συμμετρικά ως προς την διχοτόμο της $1^\text{ης}$ και $3^\text{ης}$ γωνίας των αξόνων «αλλάζουν» τις συντεταγμένες τους.

Απόσταση δύο σημείων

Η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, δίνεται από τον τύπο:

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

425. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ , ώστε τα σημεία $A(\kappa, 4)$ και $B(2, 3\lambda - 2)$, να είναι:

- α) Συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$ β) Συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$.
 γ) Συμμετρικά ως προς την αρχή O των αξόνων.

426. Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(2, 5)$, $B(-1, 4)$ και $\Gamma(0, 1)$, ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

427. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x < 0 \\ x^2 - 2x, & x \geq 0 \end{cases}$. Να βρείτε ποια από τα παρακάτω

σημεία ανήκουν στη γραφική παράσταση της f :

$A(-3, 10)$ $B(2, 0)$ $\Gamma(-2, -7)$ $\Delta(-5, -12)$ $E(3, 5)$

428. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής της παράστασης που έχουν:

- α) τετμημένη: i. -2 ii. 3 β) τεταγμένη: i. 3 ii. 0

429. Να βρείτε τα σημεία στα οποία οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων τέμνουν τους άξονες.

- α) $f(x) = 3x - 6$ β) $f(x) = x^2 - 2x - 8$ γ) $f(x) = \frac{x-2}{x^2+x}$
 δ) $f(x) = \sqrt{x+2}$ ε) $f(x) = \sqrt{x^2-1} + x^4$ στ) $f(x) = |x-1| + 2$

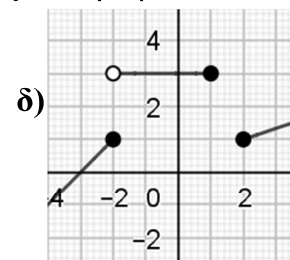
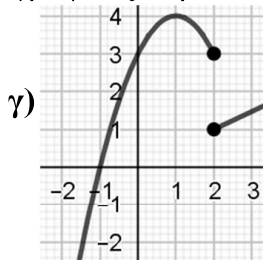
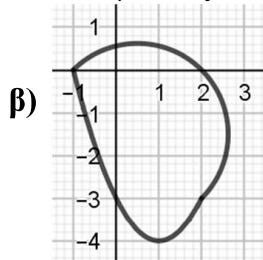
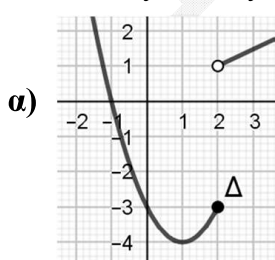
430. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

- α) $f(x) = x^2 + 3x - 2$ και $g(x) = 3x + 2$ β) $f(x) = \frac{6x+12}{x+1}$ και $g(x) = x + 2$

431. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & -2 \leq x < \frac{1}{2} \\ x^2+1 & \frac{1}{2} \leq x < 3 \end{cases}$ Να βρείτε (αν υπάρχουν)

τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες $x'x, y'y$.

432. Ποιες από τις παρακάτω καμπύλες είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων;



433. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

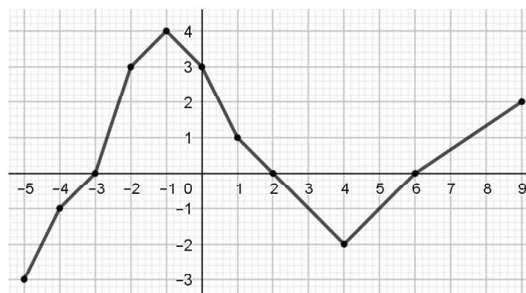
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

β) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(1)$ και $f(f(4))$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -3$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 3$.



434. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να βρείτε:

α) Το πεδίο ορισμού της

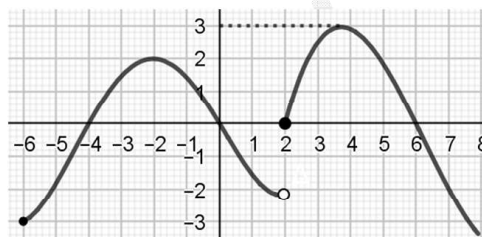
β) Το σύνολο τιμών της.

γ) Τις τιμές $f(0)$, $f(-2)$, $f(2)$, $f(4)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$.

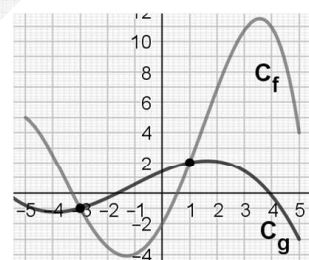
στ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$. **ζ)** Να λύσετε την ανίσωση $-2 \leq f(x) \leq 4$.



435. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g .

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

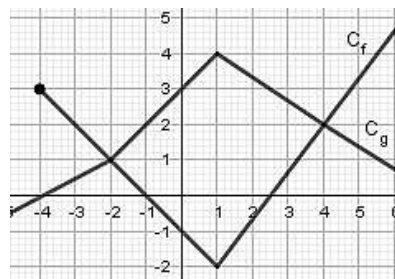
β) Να λύσετε την ανίσωση $g(x) > f(x)$.



436. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g .

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > g(x)$.



Τράπεζα θεμάτων

437. (1259) Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

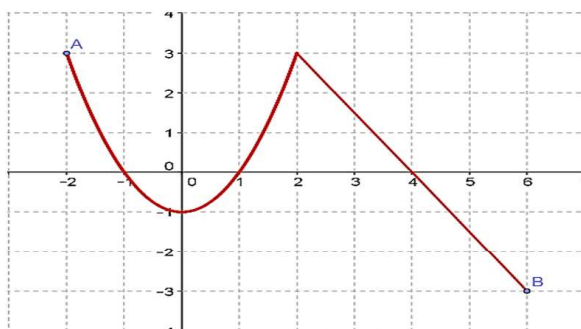
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού a , ώστε το σημείο $M\left(a, \frac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

438. (1299) **α)** Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $A = x^3 - x^2 + 3x - 3$.

- β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{3}{x}$ και $g(x) = x^2 - x + 3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1, 3)$.

439. (1304) Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

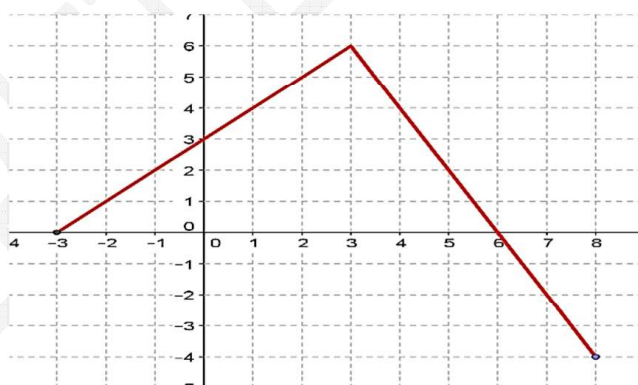


- α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-2	-1		1	2	
y			-1			-3

- γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.
δ) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές.

440. (1305) Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



- α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

- γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.
δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

441. (1307) Δίνεται η συνάρτηση g , με $g(x) = \frac{2x^2 - 4x + \mu}{x + 1}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$,

- α) να δείξετε ότι $\mu = -6$.
β) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
γ) για $\mu = -6$ να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

442. (1345) Δίνεται η συνάρτηση, με $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x' και y' .

443. (1358) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 15$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1) + f(0) + f(1)$.

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες.

444. (12680) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(4,3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $N(-1,-2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

445. (12686) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

446. (12729) Ένα σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή, ώστε η απόστασή του από το έδαφος (μέτρα) σε σχέση με το χρόνο (sec) να φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις.

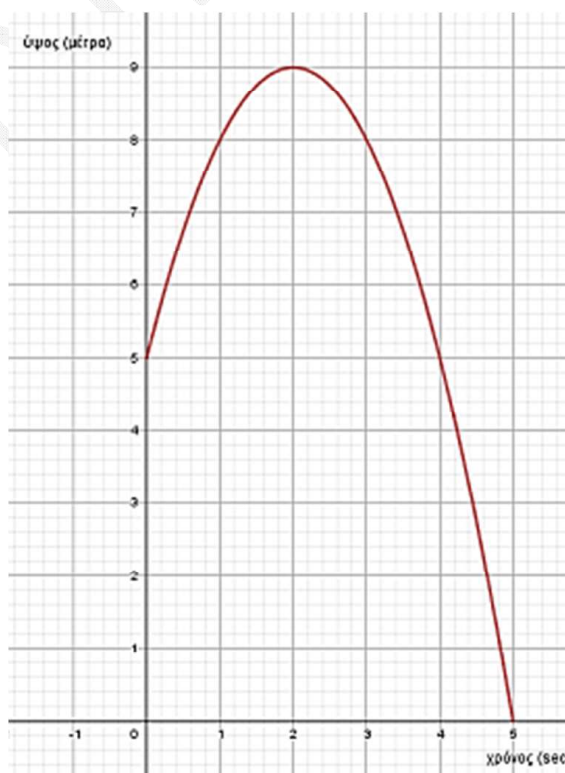
Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α. Από ποιο ύψος εκτελείται η κατακόρυφη βολή;

β. Ποιο το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα και ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό;

γ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα από το έδαφος.

δ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα συναντά το έδαφος.



447. (13322) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{x}{x^2+2} + \sqrt{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

β) Να βρείτε (εφόσον ορίζονται) τις τιμές της συνάρτησης g για $x=1$, $x=-2$, $x=2$.

γ) Τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τον $y'y$ άξονα;

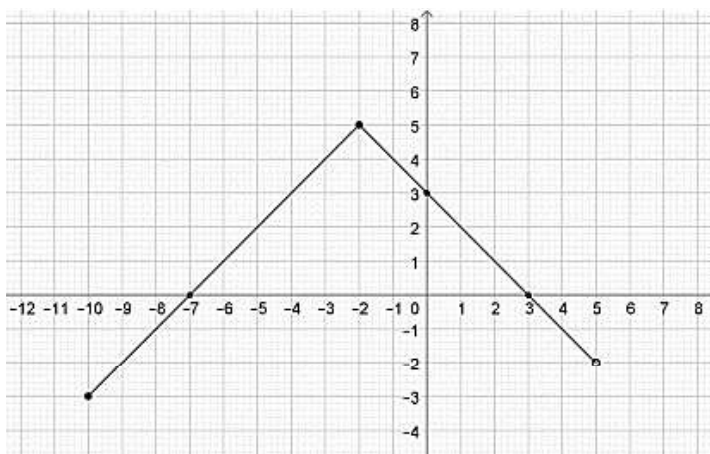
448. (12910) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σύνολο τιμών της $f(A)$.

β) Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$.

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) = 0$.

δ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) < 0$.



4ο θέμα

449. (1393) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3x + 2$ και $g(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε.

β) Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x + a$. Να δείξετε ότι:

i) Αν $a > 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) Αν $a < 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h δεν έχουν κοινά σημεία.

450. (1408) Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2$ και $g(x) = \lambda x + (1 - \lambda)$, $x \in \mathbb{R}$ και λ παράμετρος με $\lambda \neq 0$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο;

Ποιο είναι το σημείο αυτό;

γ) Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g ,

να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει: $(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$

451. (1433) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ax - a + 2$ και $g(x) = x^2 - a + 3$ με $a \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού a .

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

i) Να βρείτε την τιμή του a .

ii) Για την τιμή του a που βρήκατε υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του a οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο σημεία τομής.

452. (1454) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \frac{\alpha}{4}}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α , ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$.

β) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$, τότε

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$.

453. (1470) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = x + \alpha$, με $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Για $\alpha = 1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δυο σημεία.

γ) Για $\alpha > 1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

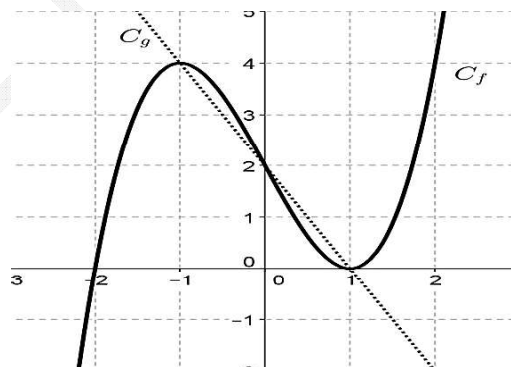
454. (1490) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x) = -2x + 2$. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:

α) τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = -2x + 2$.

β) τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$.

γ) τις τιμές του x , για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g .

δ) τις τιμές του x , για τις οποίες η παράσταση $A = \sqrt{f(x) + 2x - 2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.



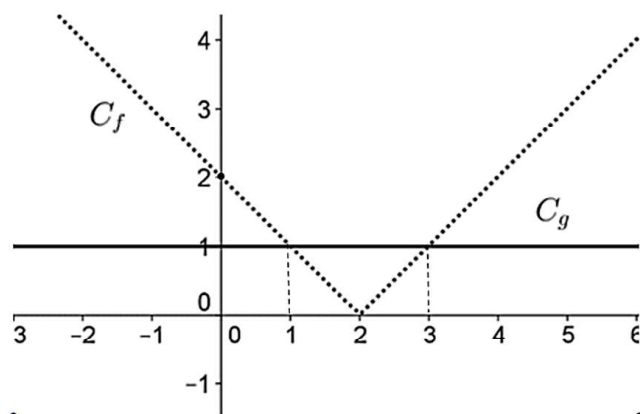
455. (1485) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x-1)^2 - 4$ και $g(x) = |x-1| + 2$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

β) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

456. (1514) Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x) = |x - 2|$ και $g(x) = 1, x \in \mathbb{R}$.



- α) i) Να εκτιμήσετε τα σημεία τομής των C_f και C_g .
 ii) Να εκτιμήσετε τις τιμές του x , για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τη C_g .
 β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.
 γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση $A = \frac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$.

457. (1523) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|}$.

- α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .
 β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \begin{cases} x - 3, & x > 2 \\ -x + 3, & x < 2 \end{cases}$.
 γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της f και να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
 δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$.

458. (1524) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha}{2x - 3}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .
 β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = 2x - \alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .
 γ) Να βρεθεί η τιμή του α αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$.
 δ) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

459. (12788) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)^2, x \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta$.

- α) Να αποδείξετε ότι $f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3}) = 8$.

β) Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f , με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 4$.

γ) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με ώστε να ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$.

Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 2$.

460. (12944) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + \frac{1}{x}$ και $g(x) = x - \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = f(2) + g(2) - f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)$.

β) Να αποδείξετε ότι $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 4$ για οποιοδήποτε αριθμό $x \neq 0$.

γ) Θεωρούμε την ευθεία $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι $|\alpha| \geq 2$.

461. (13027) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \beta$, $g(x) = x + \beta$ όπου $x \in \mathbb{R}$ και β σταθερός πραγματικός αριθμός. Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{3\beta}{2}, -3 - \frac{\beta}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\beta = -1$.

β) Για $\beta = -1$

i) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ με τους άξονες $x'x$, $y'y$.

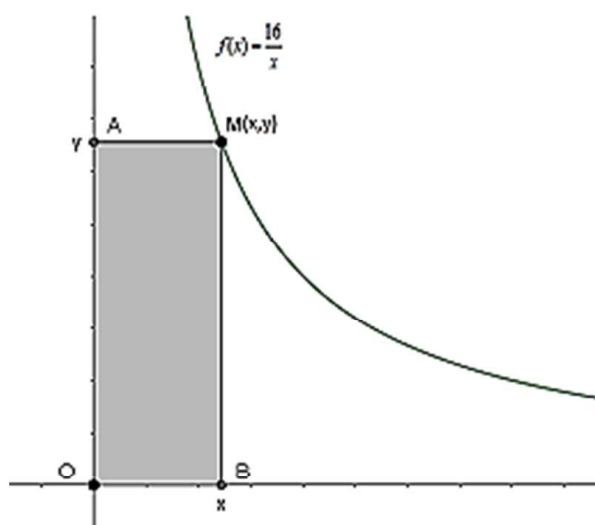
ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$.

iii) Να βρείτε για ποιες τιμές του $k \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) - 2kg(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

462. (13090) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{16}{x}$, $x > 0$. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και έστω A και B οι προβολές του M στους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να δείξετε ότι όλα τα ορθογώνια $OAMB$ που προκύπτουν για τις διάφορες θέσεις του σημείου M έχουν εμβαδόν 16 τετραγωνικές μονάδες, ενώ η περιμέτρός τους δίνεται, σε μονάδες μήκους, από τη συνάρτηση

$\Pi(x) = 2x + \frac{32}{x}$, $x > 0$ όπου x η τετμημένη του M .



- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M ώστε το ορθογώνιο OAMB να έχει περίμετρο 20 μονάδες μήκους.
- γ) Αν M' είναι το σημείο της γραφικής παράστασης της f ώστε το ορθογώνιο OAM'B να είναι τετράγωνο τότε:
- Να δείξετε ότι το M' έχει τετμημένη 4.
 - Να δείξετε ότι το τετράγωνο OAM'B έχει τη μικρότερη περίμετρο από όλα τα ορθογώνια OAMB, δηλαδή ότι $\Pi(x) \geq \Pi(4)$ για κάθε $x > 0$.

463. (13030) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$ και $g(x) = |x + 3|$. Να βρείτε:

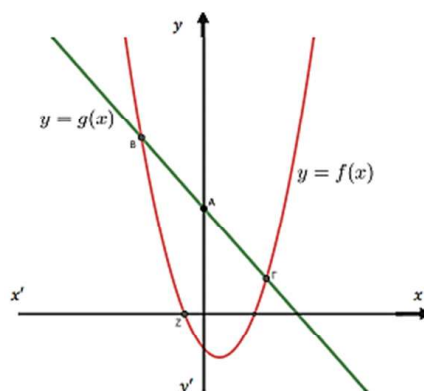
- τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.
- τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g .
- τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g .

464. (12941) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{9 - x^2}{3 - |x|}$.

- Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση f.
- Για τις τιμές του x που ορίζεται η συνάρτηση f να δείξετε ότι $f(x) = 3 + |x|$.
- Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες.
- Αν $g(x) = 3 - x^2$ να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

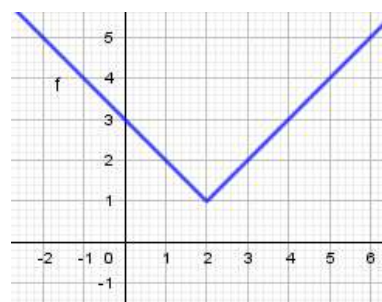
465. 12628. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x - 1$ και $g(x) = 3 - x$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στο διπλανό σχήμα.

- Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ, Z.
- Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$ που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση της $y = g(x)$.
- Αποδείξτε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α, η απόσταση των αριθμών $f(a)$ και $-g(a)$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι τουλάχιστον 1.



466. (12914) Έστω η ευθεία ε: $y = c$, με παράμετρο $c \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x) = |x - 2| + 1$, η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται στο διπλανό σχήμα.

- Με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ η ευθεία ε και η γραφική παράσταση της f έχουν κοινά σημεία;
- Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος α) i).



β) Έστω ότι η ευθεία ε έχει με τη γραφική παράσταση της f δυο κοινά σημεία A, B . Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων είναι $A(3-c, c)$ και $B(c+1, c)$.

γ) i. Αν A, B τα σημεία του ερωτήματος β), με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του c το μήκος του τμήματος AB είναι $(AB) \leq 2$;

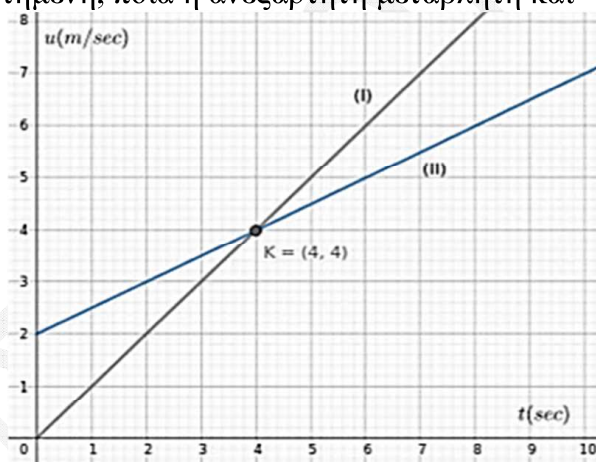
ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ) i).

467. (12999) Ένα όχημα, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει ταχύτητα, η οποία δίνεται από τη σχέση $u = u_0 + a \cdot t$, όπου u η ταχύτητα του οχήματος τη χρονική στιγμή t και a η σταθερή επιτάχυνσή του στη διάρκεια της κίνησης, ενώ u_0 η αρχική ταχύτητα της κίνησής του.

α) Αν η παραπάνω σχέση αποτελεί συνάρτηση της ταχύτητας του οχήματος ως προς το χρόνο, να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη, ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή και ποιο το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής.

β) Ένα όχημα A , που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ξεκινά από θέση ηρεμίας και τη χρονική στιγμή 4 sec έχει ταχύτητα 4 m/sec , ενώ ένα άλλο όχημα B , που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει αρχική ταχύτητα 2 m/sec .

Οι παρακάτω ευθείες (I), (II) στο διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου περιγράφουν τις ταχύτητες των δύο οχημάτων.



i) Ποια από τις δύο ευθείες (I), (II) περιγράφει την ταχύτητα του οχήματος A και ποια την ταχύτητα του οχήματος B ;

ii) Να προσδιορίσετε ποιο από τα οχήματα A, B κινείται ταχύτερα για κάθε χρονική στιγμή $t \text{ sec}$, $t \in [3, 5]$.

iii) Αν ένα όχημα Γ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2 m/sec και επιτάχυνση μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του οχήματος A , να σχεδιάσετε στο παραπάνω διάγραμμα μία ευθεία, η οποία θα μπορούσε να περιγράψει την κίνησή του.

468. (13120) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x - 4\lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για $\lambda \neq 0$ να βρείτε το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το συμμετρικό του σημείου $A(4, 4)$ ως προς τον άξονα $x'x$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

δ) Για $\lambda = -1$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

469. (13313) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^7 - x}{x^3 - x}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .
 β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. γ) Να δείξετε ότι $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ για κάθε $x \in A$.
 δ) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει λύση στο A .

470. (13168) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 2\lambda x + \gamma$ με $x \in \mathbb{R}$ και παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0, -1)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

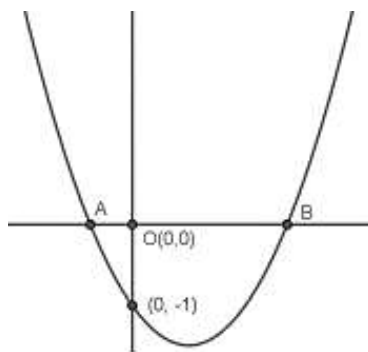
i. $\gamma = -1$

ii. Η γραφική παράσταση της f δεν είναι κάτω από την ευθεία $y = -\lambda^2 - 1$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία A και B με συντεταγμένες

$$A(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0) \text{ και } B(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0).$$

γ) Να αποδείξετε ότι η απόσταση των A και B είναι μεγαλύτερη ή ίση του 2 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.



471. (13479) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |3x - 12| - |2x - 8| - 3|x^2 - 16|$. Αν $|x| \leq 4$, τότε:

α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f χωρίς τις απόλυτες τιμές.

β) Αν $f(x) = 3x^2 - x - 44$.

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

ii. Αν το σημείο $M(\mu + 1, -20)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να βρείτε την ακέραια τιμή του μ .

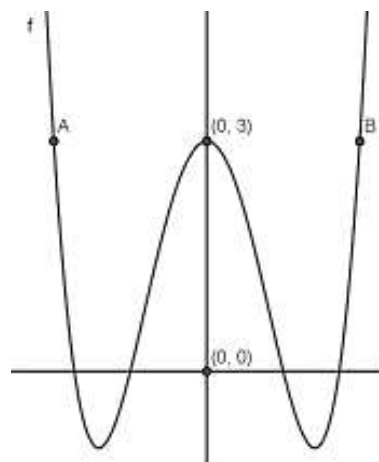
472. (13454) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = ax^4 - 4x^2 + \gamma$ η οποία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

α) Να δείξετε ότι $\gamma = 3$.

β) Αν $A(\alpha^2 - 3, 3)$ και $B(5 - 3\alpha, 3)$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f , όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και να γράψετε τον τύπο της f .

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

δ) Με τη βοήθεια του σχήματος και την απάντηση του ερωτήματος γ), να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.



Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$

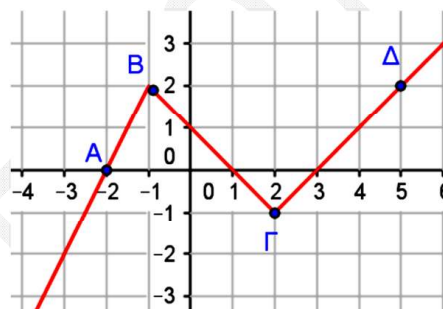
473. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

- α) $A(2, -1)$ και $B(4, 3)$ β) $A(3, 2)$ και $B(-5, 2)$ γ) $A(1, 3)$ και $B(1, -2)$

474. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < -1 \\ -2, & -1 \leq x < 1 \\ 3x-3, & x \geq 1 \end{cases}$.

475. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = |x-3| - 2|x+1| + x$

476. Η πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να βρείτε την f .



477. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 4$ να βρεθεί η απόσταση (AB), όπου A, B τα σημεία

τομής με τους άξονες της ευθείας $(\varepsilon) \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$.

Τράπεζα θεμάτων

478. (1283)α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της.

γ) Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση.

479. (1293) Η θερμοκρασία T σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση:

$$T(x) = 15 + 25 \cdot x, \text{ όταν } 0 \leq x \leq 200.$$

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290°C . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440°C ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

480. (1294) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(0) = 5 \text{ και } f(1) = 3.$$

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 5$.

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

481. (1301) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g τέμνονται σε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε.

β) Αν A , O , B είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου $O(0,0)$, να αποδείξετε ότι A , B είναι συμμετρικά ως προς το O .

482. (1302) Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{2x^2 - 6|x|}{2|x| - 6}$.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = |x|$, για κάθε $x \in A$.

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$.

483. (12631) Στο διπλανό σύστημα

συντεταγμένων έχουμε χαράξει δυο ευθείες,

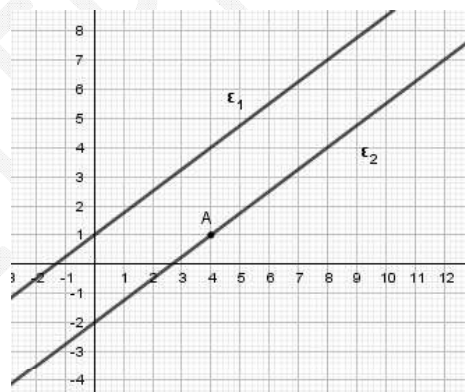
την (ϵ_1) με εξίσωση $y = \frac{3}{4}x + 1$ και την (ϵ_2) που

διέρχεται από το σημείο $A(4, 1)$ και είναι παράλληλη στην (ϵ_1) .

α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ϵ_2) .

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ_2) .

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ϵ_2) με τους άξονες.



484. (12856) Δίνεται ευθεία $\epsilon: y = ax + 5$. Αν η ευθεία $\delta: y = -3x - 6$ είναι παράλληλη στην (ϵ) , τότε:

α) i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας ϵ .

ii. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ϵ με τον άξονα $x'x$;

β) Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία ϵ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

485. (12684) Η ευθεία (ϵ_1) έχει εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x - 2$ και μια ευθεία (ϵ_2) διέρχεται από το σημείο $A(-4, 1)$ και είναι παράλληλη στην (ϵ_1) .

α) Να γράψετε την κλίση της ευθείας (ϵ_1) και το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα $y'y$.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ϵ_2) με τον άξονα $x'x$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ_2) . Ποια είναι τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τους άξονες;

486. (12730) Δίνεται η ευθεία $y = ax + \beta$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και β αν η γραφική παράσταση της f σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° και διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$.

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και κ αν η ευθεία $y = \lambda x + \kappa$ είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x + 3$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2.

487. (12630) Δίνεται η ευθεία $y = ax + \beta$, η οποία έχει κλίση -2 και διέρχεται από το σημείο (1,1).

α) Να βρείτε τις τιμές των a και β .

β) Να βρείτε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον άξονα $y'y$.

γ) Να χαράξετε σε σύστημα συντεταγμένων την παραπάνω ευθεία.

488. (12939) Έστω η ευθεία $\varepsilon_1: y = ax + \beta$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $A(0, -6)$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(-3, 0)$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και β .

β) Να βρείτε την ευθεία ε_2 που είναι παράλληλη με την ε_1 και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων

489. (13033) Δίνεται η ευθεία (ε): $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

α) i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε).

ii. Είναι οξεία ή αμβλεία η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον $x'x$ άξονα;

β) Να εξετάσετε ποια από τα σημεία $A(6, 1)$, $B(-2, 3)$ και $\Gamma(8, 0)$ είναι σημεία της ευθείας (ε).

γ) Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο $(k, 5)$ να είναι σημείο της ευθείας (ε).

490. (13178) Δίνεται το σημείο $M(3, 4)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και από το $O(0, 0)$.

β) Δίνεται το σημείο $N(-3, \lambda)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ το οποίο ανήκει στην ευθεία OM .

i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii. Αν $N(-3, -4)$ να εξετάσετε αν τα σημεία M, N , είναι συμμετρικά ως προς το O .

491. (13054) Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = (3\alpha + 4)x - 4$ και $\varepsilon_2: y = (3 - 4\alpha)x + 4$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Αν $\alpha = 1$, να βρείτε:

i. Τις εξισώσεις των ευθειών.)

ii. Το είδος της γωνίας που σχηματίζει καθεμιά από τις ευθείες με τον άξονα xx' .

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

492. (13318) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = -x + \sqrt{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0), f(\sqrt{2}), f(-\sqrt{2}), [f(-\sqrt{2})]^2$.

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

493. (13400) Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = -x + 2$.

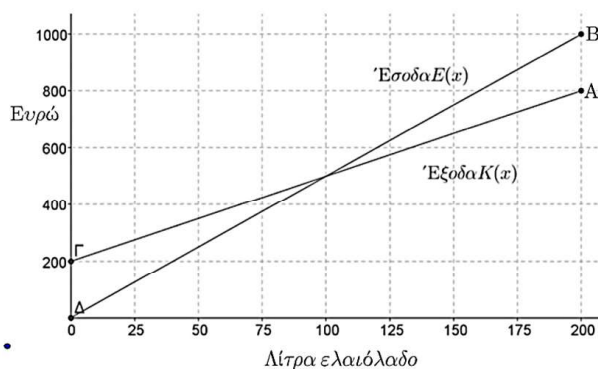
- α)** Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.
- β)** Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.
- γ)** Να σχεδιάσετε την ευθεία ε .

4ο Θέμα

494. (1398) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x + 2$ και $g(x) = 4x^2 - 9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

- α)** Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$.
- β)** Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$.
- γ)** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.
- δ)** Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το $A(0, 3)$ και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox .

495. (1386) Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο. Στο διπλανό παραπάνω σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα $K(x)$ και τα έσοδα $E(x)$ από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.



- α)** Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του.
- β)** Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας;
- γ)** Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά;
- δ)** Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $K(x)$ και $E(x)$ και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος (γ).

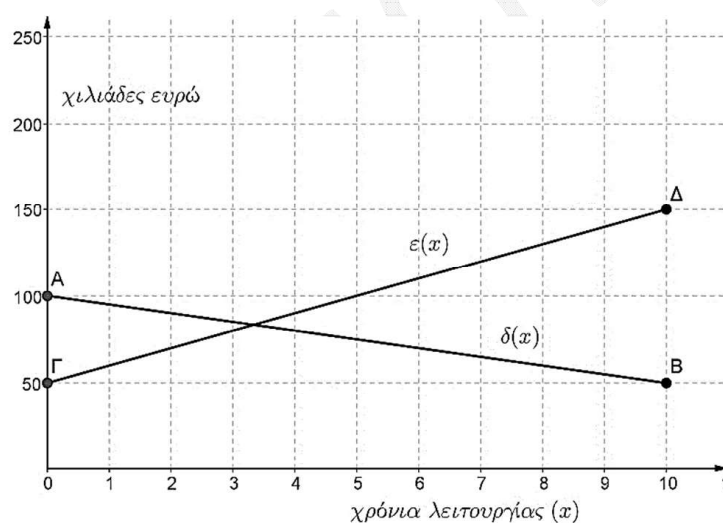
496. (1403) Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.

- α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β)** Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.
- γ)** Αν A και B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα A και B .

497. (1410) Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

- α)** Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες.
- β)** Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.
- i)** Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι: $f(x) = 30 - \frac{3}{4}x$.
- ii)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β(i), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.
- γ)** Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

498. (1434) Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(0,100)$ και $B(10,50)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\delta(x)$ των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ με $\Gamma(0,50)$ και $\Delta(10,150)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων $\varepsilon(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τα έξοδα τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας.

- β) i)** Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων $\delta(x)$, $\varepsilon(x)$ και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές.
- ii)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των τμημάτων AB και ΓΔ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος.

499. (1444) Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f , με

$$f(x) = (\lambda + 1)x^2 - (\lambda + 1)x + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- α)** Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ , η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$.
- β)** Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
- γ)** Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2, 0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο.
- δ)** Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από

τον άξονα $x'x$.

500. (1446) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.

γ) Έστω $M(x, y)$ σημείο της C_f . Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει: $|2x - 1| < 3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.

501. (1447) Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{αν } x < 0 \\ x + 2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

β) i) Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y = 3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού a , η ευθεία $y = a$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Για τις τιμές του a που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = a$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

502. (1449) Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = x^2 - 2x$ και $g(x) = 3x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g .

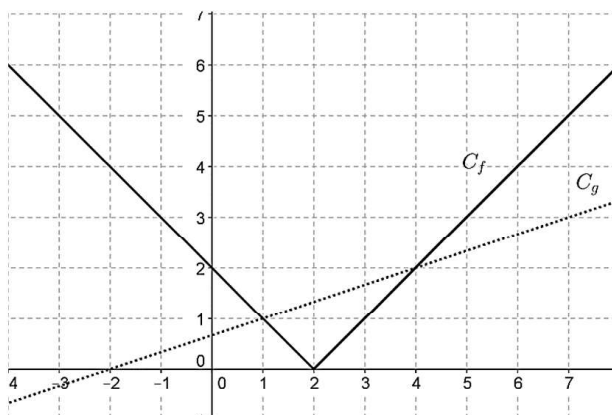
γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y = a$, $a < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f .

503. (1468) Στο διπλανό σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x) = |x - 2|$ και

$$g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, x \in \mathbb{R}.$$

α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g .

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α).



γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g .

δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση: $K = \sqrt{3|2-x|-(x+2)}$.

504. (1479) Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο: $y = 60 + 0,20x$, όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400 Km ;

β) Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος, για μία ημέρα, πλήρωσε 150 ευρώ;

γ) Μία άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο $y = 80 + 0,10x$ όπου, όπως προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε.

δ) Αν $f(x) = 60 + 0,20 \cdot x$ και $g(x) = 80 + 0,10 \cdot x$ είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ).

505. (1496) Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία TAXI με το όνομα 'RED' χρεώνει 1 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,6 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Μια άλλη εταιρεία TAXI με το όνομα 'YELLOW' χρεώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,4 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

α) i) Αν $f(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία 'RED' για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)	0	2	8
$f(x)$ (ευρώ)			

ii) Αν $g(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία 'YELLOW' για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)			
$g(x)$ (ευρώ)	2	3,2	4,8

β) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f , g και τους τύπους τους $f(x)$, $g(x)$.

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας 'RED' είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

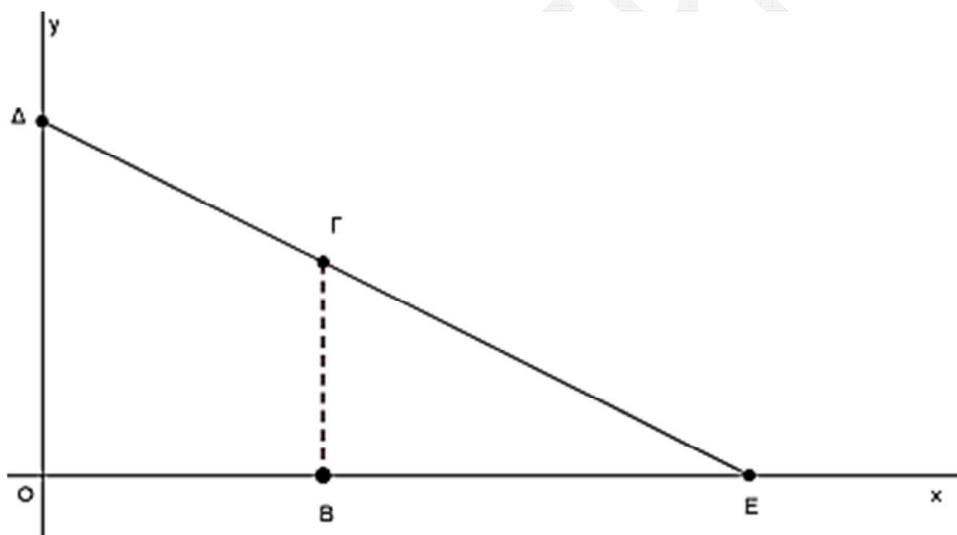
δ) Αν δυο πελάτες Α και Β μετακινηθούν με την εταιρεία 'RED' και ο πελάτης Α διανύσει 3 χιλιόμετρα παραπάνω από τον Β, να βρείτε πόσο παραπάνω θα πληρώσει ο Α σε σχέση με τον Β.

506. (12689) Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από το ελικοδρόμιο και το ύψος του $Y_1(t)$, σε μέτρα, από την επιφάνεια της θάλασσας τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση: $Y_1(t) = 150 + 50t$, $t \in [0,5]$.

Τα επόμενα πέντε λεπτά κινείται σε σταθερό ύψος και στη συνέχεια κατεβαίνει αργά για δέκα λεπτά ακόμα, μέχρι να επιστρέψει στο ελικοδρόμιο. Το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας τα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση: $Y_2(t) = 650 - 25t$.

- α) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας βρίσκεται το ελικοδρόμιο;
 β) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας πετάει το ελικόπτερο από το 5^ο μέχρι το 10^ο λεπτό της κίνησής του;
 γ) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $Y_2(t)$, και να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η απόσταση του ελικοπτερου από τη θάλασσα είναι 250 μέτρα.
 δ) i. Στα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του, πόσα μέτρα ανεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;
 ii. Στα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του πόσα μέτρα κατεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;

507. (12728) Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων, Δ είναι ένα σημείο στον $y'y$ άξονα, Ε ένα σημείο του $x'x$ άξονα και Ο είναι η αρχή των αξόνων.



Η εξίσωση της ευθείας ΔΕ είναι: $y + \frac{1}{2}x = 4$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Ε και Δ.
 Ένα σημείο $\Gamma(t, y_\Gamma)$ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ και Β ένα σημείο του $x'x$ άξονα, τέτοιο ώστε ΒΓ να είναι παράλληλη στον $y'y$ άξονα.
 β) Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές η τετμημένη t του σημείου Γ και να δείξετε ότι $y_\Gamma = 4 - \frac{1}{2}t$.

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $E(t) = 4t - \frac{1}{2}t^2$ εκφράζει το εμβαδόν του τραpezίου

ΟΒΓΔ και να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής στο πλαίσιο του προβλήματος.

δ) Αν το εμβαδόν του τραpezίου ισούται με 9, 75 τετραγωνικές μονάδες, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Γ.

508. (12921) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2|x|x - 2$ και η ευθεία ε :

$$y = 2x - \kappa^2, \kappa \in \mathbb{R}.$$

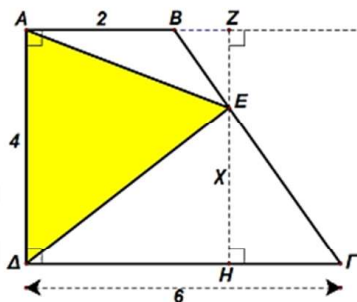
α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου κ .

γ) Για $\kappa = -3$ να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με την γραφική παράσταση της f .

δ) Αν A και B τα σημεία τομής του ερωτήματος γ), να βρείτε την απόσταση (AB).

509. (12834) Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ώστε $AB=2$, $A\Delta=4$, $\Gamma\Delta=6$, ενώ η $A\Delta$ είναι κάθετη στην AB και επίσης κάθετη στην $\Gamma\Delta$. Το σημείο E μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θέση επί του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$ και ονομάζουμε x την απόσταση του E από την $\Gamma\Delta$.

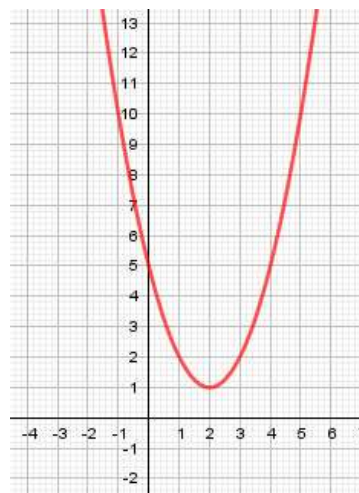


α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου $A\Delta E$ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = -2x + 12$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης;

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\Sigma = f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{2}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + f\left(\frac{4}{16}\right) + \dots + f\left(\frac{64}{16}\right)$.

510. (13091) Στο διπλανό παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 4x + 5$.



α) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 7$ και στη συνέχεια να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας.

β) i. Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο β) i.

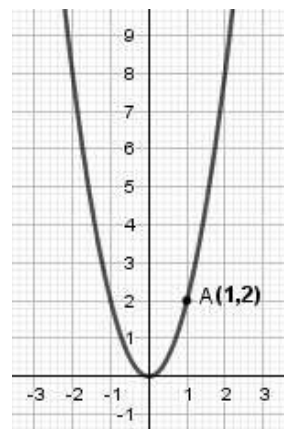
γ) Έστω ότι μια ευθεία $y = \lambda$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 , με $x_1 < x_2$. Να δείξετε ότι $x_1 + x_2 = 4$.

511. (12942) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = ax^2$, $x \in \mathbb{R}$ με παράμετρο a .

α) Αν το σημείο $A(1, 2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να δείξετε ότι τιμή της παραμέτρου είναι $a = 2$.

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $(1, 6)$ και έχει κλίση $\lambda = 2$.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες



και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε.

γ) i. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 2x + 4$.

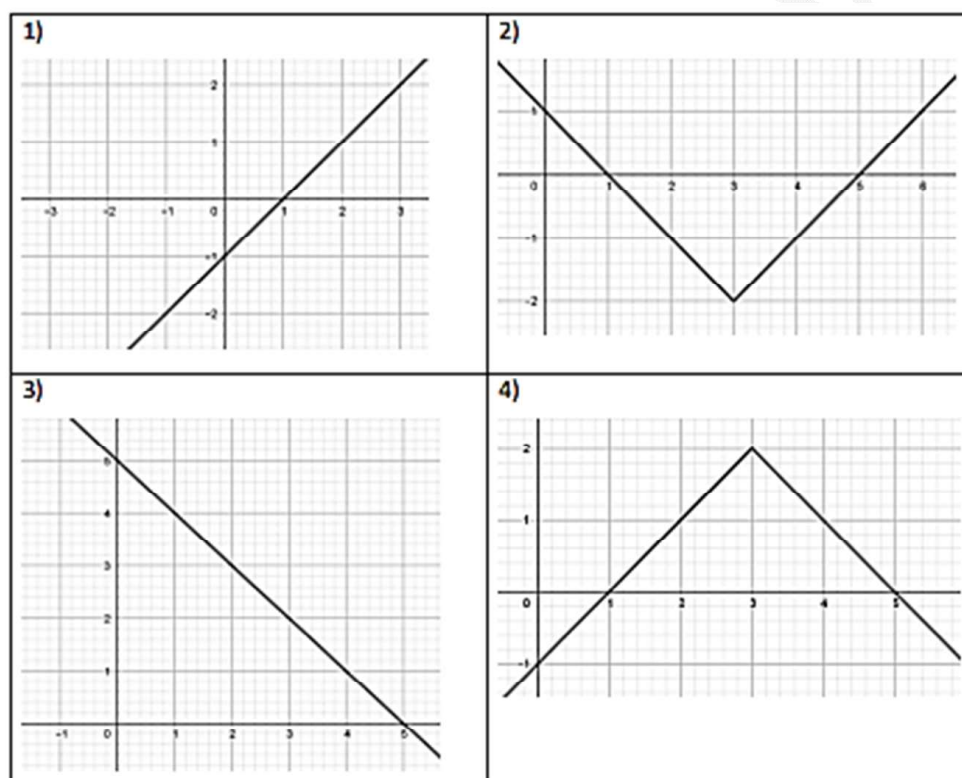
ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση του προηγούμενου ερωτήματος.

512. (12681) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x - 3| + 4 - (|6 - 2x| + 2)$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2 - |x - 3|$.

β) Αφού δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{αν } x < 3 \\ 5 - x, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$, να επιλέξετε το σωστό και να

αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Η γραφική παράσταση της f είναι:



γ) i. Στο σχήμα με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f να σχεδιάσετε την ευθεία $y = -1$ και με τη βοήθειά της να λύσετε την ανίσωση $2 - |x - 3| > -1$.

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

513. (13055) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$ και η ευθεία

$$y = 2x + \beta, \beta \in \mathbb{R}.$$

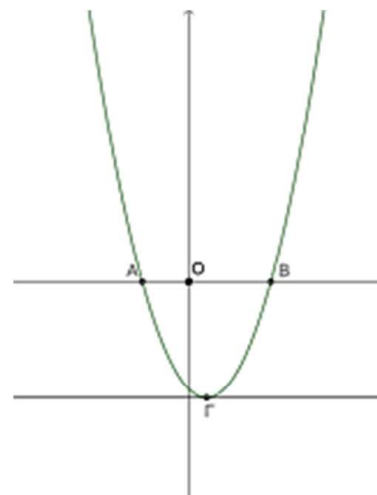
α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $f(2 + x) = f(2 - x)$.

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = f(3,52) - f(0,52) + f(3,48) - f(0,48)$.

γ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση C_f της f έχει κοινά σημεία με την ευθεία, όταν $\beta = -5$.

δ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του β , ώστε η C_f να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία.

514. (13314) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 3$. Αν $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$, $\Gamma(\gamma, \delta)$ σημεία της γραφικής παράστασης της f όπως φαίνεται στο σχήμα και η παράλληλη από το Γ στον $x'x$ έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα κοινό σημείο, τότε:



α) Να δείξετε ότι $\alpha = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $\beta = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

β) Να δείξετε ότι $f(\sqrt{2}) < 0$.

γ) Να δείξετε ότι $\frac{1-\sqrt{13}}{2} < \sqrt{2} < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

δ) Να βρείτε τις τιμές των γ και δ .

515. (12682) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - (x-1)^2$ και $g(x) = |x-1| + 2$, με $x \in \mathbb{R}$.

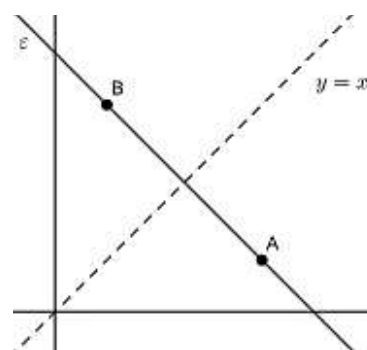
α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

β) Να αποδείξετε ότι $g(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 1 \\ -x+3, & x < 1 \end{cases}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της

παράσταση C_g .

γ) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g .

516. (13298) Τα σημεία A και B είναι σημεία του 1^{ου} τεταρτημόριου και είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο $y = x$ της 1^{ης} και 3^{ης} γωνίας των αξόνων, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Αν $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$ να γράψετε τη σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες του σημείου A με τις συντεταγμένες του σημείου B .

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε που διέρχεται από τα A και B έχει κλίση $\alpha = -1$.

γ) Αν επιπλέον τα σημεία A και B έχουν συντεταγμένες $(4, \kappa^2 - 3\kappa + 1)$ και $(\kappa - 2, 4)$ αντίστοιχα, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\kappa = 3$ και να προσδιορίσετε τα σημεία A και B .

ii. Για $\kappa = 3$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε .

517. (13367) Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = (\omega^2 - 6\omega + 8)x + 2$, όπου $\omega \in \mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές του $\omega \in \mathbb{R}$ να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x' .

β) Αν ο αριθμός ω είναι ακέραιος και η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ είναι αμβλεία τότε:

- i.** Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$.
- ii.** Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.
- iii.** Να σχεδιάσετε την ευθεία ε .

518. (13475) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x+1)^2 - (x-1)^2 + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 4x + 1, x \in \mathbb{R}$.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $g(x) = |4x + 1|$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $1 \leq g(x) \leq 3$.

δ) Να αποδείξετε ότι αν ο αρνητικός αριθμός α είναι λύση της ανίσωσης του προηγούμενου ερωτήματος, τότε και ο αριθμός $\alpha + 1$ είναι επίσης λύση της.

Επαναληπτικά Διαγωνίσματα

1ο Διαγώνισμα

Θέμα Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στη κόλλα σας τη λέξη

Σωστό ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν $a \cdot \beta \geq 0$, τότε $|a + \beta| = |a| + |\beta|$.

β) Για κάθε πραγματικό αριθμό a , ισχύει ότι $\sqrt{a^2} = a$.

γ) Υπάρχει συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(1,3)$.

δ) Αν οι συντελεστές a και γ της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ είναι ετερόσημοι, τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.

ε) Για κάθε τιμή των πραγματικών αριθμών a, β , ισχύει ότι $\sqrt{a^2 + \beta^2} = a + \beta$.

μονάδες 10

A2. Να αποδείξετε ότι: $|a \cdot \beta| = |a| \cdot |\beta|$ για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$.

μονάδες 15

Θέμα Β

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{(\sqrt{2} - 5)^2} - \sqrt{(2 - \sqrt{2})^2}$ και $\beta = \sqrt{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 2$.

μονάδες

6

B2. Να αποδείξετε ότι $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{5} - \sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{5} + \sqrt{a}} = a$.

μονάδες

6

Αν $a < x < 2\beta$, να αποδείξετε ότι :

B3. $|x - \alpha| + |x - 2\beta| = 1$

B4. $x^3 - 2\beta x^2 < 3\alpha x - 6\alpha\beta$

μονάδες 7+6

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

μονάδες 7

Γ2. Αν x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των σημείων που η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$, να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $x_1 + x_2 = x_1^2 x_2^2 + 2$.

μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε τη τιμή του λ για την οποία η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,3)$.

μονάδες 6

Γ4. Για $\lambda = 3$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f

βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 - 4$.

μονάδες 5

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = (\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda$.

Δ1. Έστω $\lambda \neq -2$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου $g(x)$ και να λύσετε την ανίσωση

$$\Delta < 0.$$

μονάδες 6

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η συνάρτηση $h(x) = \sqrt{g(x)}$ έχει πεδίο

ορισμού το $\mathbb{R}$.

μονάδες 6

Δ2. α) Να βρείτε την ακέραια λύση της εξίσωσης $\sqrt{\lambda^2 + 2\lambda + 1} = |3\lambda + 5|$

β) Για $\lambda = -2$ να λύσετε την ανίσωση: $|g(x)| > 2$.

μονάδες 3+3

Δ3 α) Να βρείτε την ακέραια λύση της εξίσωσης $(2\lambda + 5)^4 - 27(2\lambda + 5) = 0$

β) Για $\lambda = -1$, να λύσετε την εξίσωση $|g(x)| = (\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda$.

μονάδες 3+4

2ο Διαγώνισμα

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στη κόλλα σας τη λέξη

Σωστό ή Λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

α. Η απόσταση δύο αριθμών α και β ισούται με $\alpha - \beta$.

β. Αν $\alpha \geq 0$, τότε: $(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu = \alpha$.

γ. Η εξίσωση $ax^2 + 2x - \alpha = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

δ. Κάθε κατακόρυφη ευθεία μπορεί να έχει με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f δύο κοινά σημεία.

ε. Αν $A(\alpha, \beta)$ είναι ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου, το συμμετρικό του ως προς τον άξονα $x'x$ είναι το σημείο $\Delta(\alpha, -\beta)$.

μονάδες 5x2

A2. Να αποδείξετε ότι αν η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$, έχει δύο πραγματικές

και άνισες ρίζες x_1, x_2 τότε το άθροισμα των ριζών $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a}$ και το

$$\text{γινόμενο τους } x_1 x_2 = \frac{\gamma}{a}.$$

μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

B1. Να διατυπώσετε την γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων:

α. $|x + 3|$

β. $|x - 5|$

μονάδες 5

B2. Αν $-3 < x < 5$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = |x + 3| + |x - 5|$.

μονάδες 10

B3. Να λυθεί η ανίσωση: $7\frac{|x-5|}{2} - 2\frac{|2x-10|}{3} < 26$

μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+1}$.

Γ1. Να βρεθούν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες. μονάδες 10

Γ2. Να δείξετε ότι $[f(7) - f(17)][f(49) + f(71) - f(31)] = -14$ μονάδες 5

Γ3. Να μετατρέψετε την παράσταση $\frac{4}{5-f(2)}$ σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή.

μονάδες 5

Γ4. Να δείξετε ότι $\sqrt{(2-f(4))^2} + \sqrt{(3-f(4))^2} = 1$ μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - (\lambda + 2)x + \lambda$.

Δ1. Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$. μονάδες 10

Δ2. Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ να βρείτε τη τιμή του λ για την οποία ισχύει ότι $4x_1^2x_2 + 4x_1x_2^2 + 1 = 0$.

μονάδες 5

Δ3. Για $\lambda=3$, να βρείτε για ποια x η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. μονάδες 10

3ο Διαγώνισμα**ΘΕΜΑ Α**

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στη κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\sqrt{x^2} = x$

2. Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ τότε $\alpha=0$ ή $\beta=0$

3. Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες όταν $\Delta < 0$

4. Εάν η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1, x_2 τότε το άθροισμα τους $x_1 + x_2 = \frac{\beta}{\alpha}$

5. Ισχύει: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$ για κάθε $\theta > 0$.

Μονάδες $2 \times 5 = 10$

A2. Να αποδείξετε ότι: $|a \cdot \beta| = |a| \cdot |\beta|$ για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

1. Να γράψετε τι εκφράζουν γεωμετρικά οι παραστάσεις $|x|$ και $|x - 3|$.

Μονάδες 6

2. Να λυθεί η εξίσωση: $|x| - \frac{4|-x| - 8}{3} = \frac{|6x|}{2}$.

Μονάδες 9

3. Αν $B = |2x - 6| + |x - 3| - 5$ να λυθεί η ανίσωση: $1 < B < 4$ και να γραφεί η λύση της υπό μορφή διαστήματος.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (\lambda + 3)x + \frac{5\lambda + 7}{2}$

1. Να γράψετε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$

Μονάδες 10

2. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει διπλή ρίζα

Μονάδες 5

3. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο πραγματικές άνισες ρίζες.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{2x^2 - 8\lambda x + 15\lambda}{3x - 9}$ της οποίας η γραφική παράσταση

διέρχεται από το σημείο $A(2, -2)$.

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

2. Να δείξετε ότι $\lambda = 2$

Μονάδες 5

Για $\lambda = 2$

3. Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 5

4. Αν $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - x - \frac{4}{3}$ να βρεθεί για ποια x η γραφική παράσταση της g είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 10