

Γεωμετρία



3ο Κεφάλαιο: Τρίγωνα

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

1ο κριτήριο: Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

2ο κριτήριο: Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

3ο κριτήριο: Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:

- Δύο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.
- Μία πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.

Ισοσκελές τρίγωνο

Ένα τρίγωνο λέγεται ισοσκελές όταν έχει δύο πλευρές του ίσες.

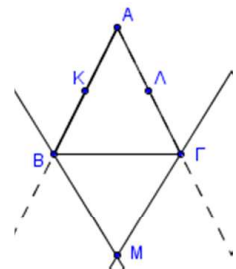
Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ισχύουν τα εξής:

- Οι γωνίες που αντιστοιχούν στη βάση του είναι ίσες.
- Το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του είναι διχοτόμος και διάμεσος του τριγώνου.

1553. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών B και Γ τέμνονται στο σημείο M και K, Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των AB και $A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές με $MB = M\Gamma$.

β) $MK = M\Lambda$



1565. Έστω δύο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και $A'B'\Gamma'$ ($A'B' = A'\Gamma'$).

α) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $AB = A'B'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

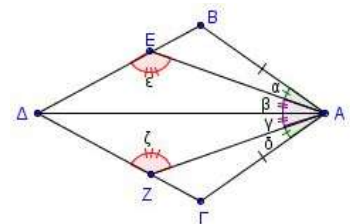
β) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

1582. Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{\alpha} = \hat{\delta}$, $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ και

$AB = A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

β) Οι γωνίες ϵ και ζ είναι ίσες.

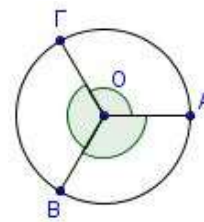


1588. Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε τρεις ίσες διαδοχικές γωνίες $\angle AOB$, $\angle BO\Gamma$ και $\angle \Gamma O A$.

α) Να αποδείξετε ότι η προέκταση της ακτίνας AO διχοτομεί τη γωνία $\angle BO\Gamma$.

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις πλευρές του.

γ) Αν με κέντρο το O και ακτίνα OK όπου K το μέσο της ακτίνας OA , γράψουμε έναν άλλο κύκλο που θα τέμνει τις OB , $O\Gamma$ στα σημεία Λ και M αντίστοιχα, τότε τα τόξα KM και AB είναι ίσα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

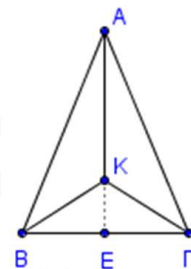


1591. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και K εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο, ώστε $KB = K\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι: τα τρίγωνα BAK και $KA\Gamma$ είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι η AK είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle B A \Gamma$.

γ) Η προέκταση της AK τέμνει την $B\Gamma$ στο E . Να αποδείξετε ότι η KE είναι διάμεσος του τριγώνου $BK\Gamma$.

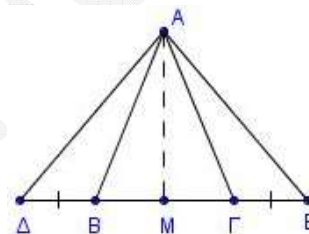


1592. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ και προς τα δύο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B}_{εξ} = \hat{\Gamma}_{εξ}$

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.

γ) Η διάμεσος AM του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι και διάμεσος του τριγώνου $A\Delta E$.



1598. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA τριγώνου $AB\Gamma$, παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $A E = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι ίσα.

β) Αν AM είναι η διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και η προέκταση της AM τέμνει την $E\Delta$ στο Z , να δείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και ABM είναι ίσα.

$$\text{ii. } Z\Delta = \frac{E\Delta}{2}.$$

1601. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και σημείο M εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο, ώστε $MB = M\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα BAM και $M A \Gamma$ είναι ίσα.

β) Η AM είναι διχοτομεί τη γωνία $\angle B M \Gamma$.

1621. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και στις ίσες πλευρές AB , $A\Gamma$

παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ και $A E = \frac{1}{3}A\Gamma$. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$,

να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα.

β) τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $M E \Gamma$ είναι ίσα.

γ) το τρίγωνο $\Delta E M$ είναι ισοσκελές.

1627. Δίνεται γωνία $\alpha O \gamma$ και η διχοτόμος της $O\delta$. Θεωρούμε σημείο M της $O\delta$ και σημεία A και B στις ημιευθείες $O\alpha$ και $O\gamma$ αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $OA = OB$. Να αποδείξετε ότι:

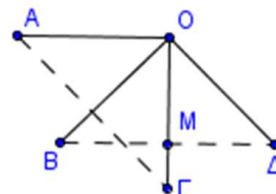
α) $MA = MB$

β) Η $O\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας AMB .

1632. Αν $\widehat{AOB} = \widehat{BO\Gamma} = \widehat{\Gamma O\Delta}$ και $OA = OB = O\Gamma = O\Delta$, να αποδείξετε ότι:

α) $AG = BD$

β) το M είναι μέσο του BD , όπου M το σημείο τομής των τμημάτων $O\Gamma$ και BD .



1648. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA (προς το A) θεωρούμε τα σημεία E και Δ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $A\Delta = AE$. Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = \Gamma\Delta$

β) $BD = \Gamma E$

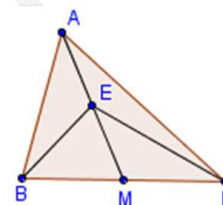
γ) $\widehat{\Delta B\Gamma} = \widehat{E\Gamma B}$

1660. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσο της διαμέσου του AM .

Αν $B\Gamma = 2BE$, να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{AEB} = \widehat{EM\Gamma}$

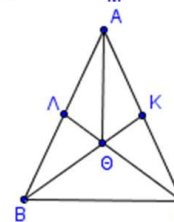
β) $AB = E\Gamma$.



1664. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τις διαμέσους του BK και $\Gamma\Lambda$ οι οποίες τέμνονται στο Θ . Να αποδείξετε ότι:

α) Οι διάμεσοι BK και $\Gamma\Lambda$ είναι ίσες.

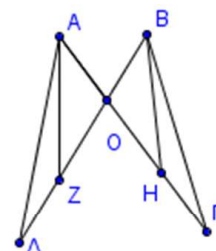
β) Τα τρίγωνα $AB\Theta$ και $A\Gamma\Theta$ είναι ίσα.



1674. Δίνονται τα τμήματα $A\Gamma = B\Delta$ που τέμνονται στο σημείο O έτσι ώστε $OA = OB$ και σημεία H και Z στα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $OH = OZ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{AOZ} = \widehat{BOH}$.

β) $AZ = BH$



12635. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M είναι το μέσο της βάσης του $B\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB , $A\Gamma$ προς τα B, Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $M\Delta E$ είναι ίση με τη γωνία $ME\Delta$.

12636. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M είναι το μέσο της βάσης $B\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB , $A\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $B\Delta$, ΓE αντίστοιχα ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $M\Delta E$ είναι ίση με τη γωνία $ME\Delta$.

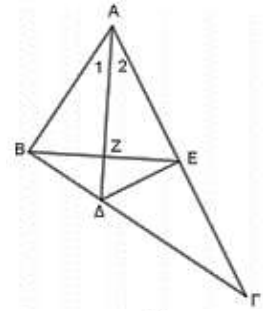
γ) Αν η ΑΜ τέμνει την ΔΕ στο σημείο Ζ να αποδείξετε ότι η ΑΖ είναι κάθετη στην ΔΕ.

12705. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε $ΑΓ = 2ΑΒ$. Η διχοτόμος του ΑΔ τέμνει την διάμεσο ΒΕ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΒ = ΑΕ = \frac{ΑΓ}{2}$.

β) $ΔΒ = ΔΕ$.

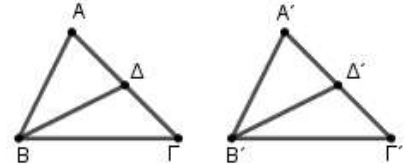
γ) $ΑΖ \perp ΒΕ$



13518. Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' του σχήματος με $ΑΓ = Α'Γ'$ και $ΑΒ = Α'Β'$. Αν οι διάμεσοι ΒΔ και Β'Δ' είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{A} = \hat{A}'$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα.



13826. Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ του σχήματος έχουν

$ΑΒ = ΓΔ = ΑΚ = ΓΛ$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.

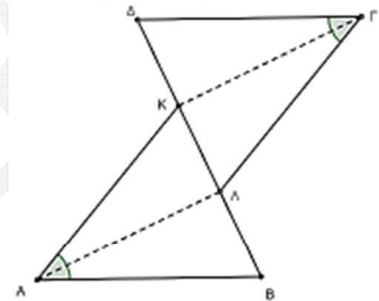
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ είναι ίσα και ότι έχουν $ΒΚ = ΔΛ$.

β) Έστω ότι Λ και Κ είναι τα μέσα των ΒΚ και ΔΛ αντίστοιχα:

i. Να εξετάσετε αν τα τμήματα ΒΛ, ΑΚ και ΚΔ είναι ίσα.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Να αποδείξετε ότι οι ΑΛ και ΓΚ είναι κάθετες στην ευθεία ΚΛ.



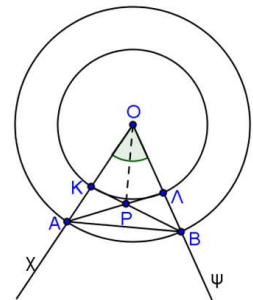
4ο Θέμα

1725. Δίνεται οξεία γωνία xOψ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ_1) και (O, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Οx στα σημεία Κ, Α και την Οψ στα Λ, Β αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΛ = ΒΚ$

β) Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισοσκελές, όπου Ρ το σημείο τομής των ΑΛ, ΒΚ.

γ) Η ΟΡ διχοτομεί τη γωνία xOψ.



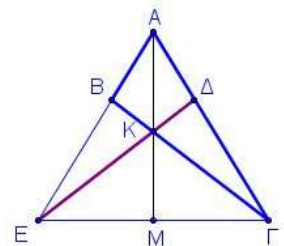
1846. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$. Στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε $ΑΕ = ΑΓ$. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $ΑΔ = ΑΒ$. Αν τα τμήματα ΔΕ και ΒΓ τέμνονται στο Κ και η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΕΓ στο Μ, να αποδείξετε ότι:

α) $ΒΓ = ΔΕ$

β) $ΒΚ = ΚΔ$

γ) Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας Α.

δ) Η ΑΜ είναι μεσοκάθετος της ΕΓ.



Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

1532. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και οι διχοτόμοι του $B\Delta$ και ΓE . Αν $EH \perp B\Gamma$ και $\Delta Z \perp B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

- α)** Τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και ΓBE είναι ίσα. **β)** $EH = \Delta Z$

1545. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE . Να αποδείξετε ότι:

- α)** Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και ΓEB είναι ίσα. **β)** $A\Delta = AE$

1546. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και το μέσο M της βάσης του $B\Gamma$. Φέρουμε τις αποστάσεις MK και ML του σημείου M από τις ίσες πλευρές του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι:

- α)** $MK = ML$ **β)** Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας KML .

1547. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Από το μέσο M της βάσης του $B\Gamma$ φέρουμε κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α)** $M\Delta = ME$ **β)** το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

1568. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE που αντιστοιχούν στις πλευρές του $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α)** Αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, τότε τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα.
β) Αν τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.

1569. Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά ίσο τμήμα $M\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

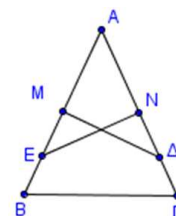
- α)** Τα τρίγωνα ABM και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα.
β) Τα σημεία A και Δ ισαπέχουν από την πλευρά $B\Gamma$.

1571. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $B\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας B . Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ και έστω Z το σημείο στο οποίο η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την προέκταση της BA (προς το A). Να αποδείξετε ότι:

- α)** $AB = BE$ **β)** Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ZEB είναι ίσα.

1656. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και $M\Delta$, NE οι μεσοκάθετοι των πλευρών του AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

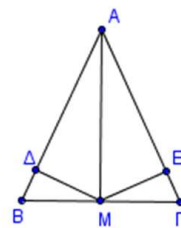
- α)** Αν $M\Delta = NE$ τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές
β) Αν $AB = A\Gamma$ τότε $M\Delta = NE$.



1657. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και από σημείο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και AG αντίστοιχα.

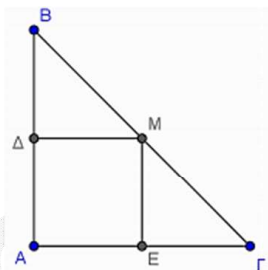
Να αποδείξετε ότι:

- α)** Αν $M\Delta = ME$, τότε τα τρίγωνα $AM\Delta$ και AME είναι ίσα.
β) Αν $AB = AG$ και M το μέσο του $B\Gamma$, τότε $M\Delta = ME$.



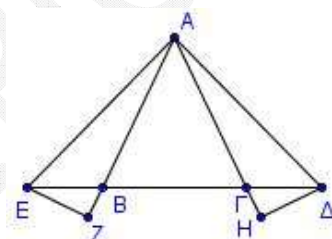
1658. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και AG αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α)** Αν $M\Delta = ME$ τότε:
 i. τα τρίγωνα $B\Delta M$ και ΓEM είναι ίσα.
 ii. το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
β) Αν $AB = AG$ τότε $M\Delta = ME$.



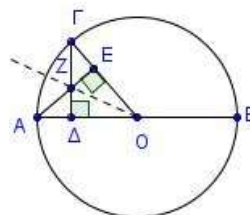
1659. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $\Gamma\Delta = BE$. Από το Δ φέρουμε ΔH κάθετη στην ευθεία AG και από το E φέρουμε EZ κάθετη στην ευθεία AB . Να αποδείξετε ότι:

- α)** $A\Delta = AE$ **β)** $EZ = \Delta H$



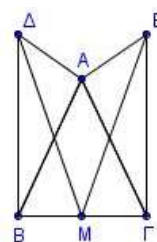
1677. Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε διάμετρο AB και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν AE κάθετο στην OG και $\Gamma\Delta$ κάθετο στην AO να αποδείξετε ότι:

- α)** Το τρίγωνο ΔOE είναι ισοσκελές.
β) Η OZ διχοτομεί τη γωνία $AO\Gamma$ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου AG .



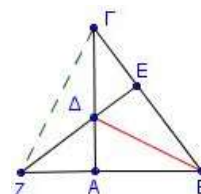
1698. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = AG$). Στα σημεία B και Γ της $B\Gamma$ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της $B\Gamma$ τα τμήματα $B\Delta \perp B\Gamma$ και $\Gamma E \perp B\Gamma$ τέτοια, ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Αν M το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

- α)** τα τρίγωνα $B\Delta M$ και ΓEM είναι ίσα,
β) $A\Delta = AE$.

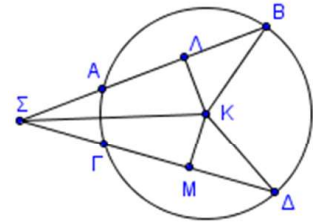


1705. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος του $B\Delta$. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ που τέμνει την προέκταση της AB (προς το A) στο Z . Να αποδείξετε ότι:

- α)** $BE = AB$ **β)** το τρίγωνο $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές.



2816. Από εξωτερικό σημείο Σ κύκλου (K, ρ) θεωρούμε τις τέμνουσες ΣAB και $\Sigma \Gamma \Delta$ του κύκλου για τις οποίες ισχύει ότι $\Sigma B = \Sigma \Delta$. Τα $ΚΛ$ και $ΚΜ$ είναι αποστήματα των χορδών AB και $\Gamma \Delta$ αντίστοιχα.

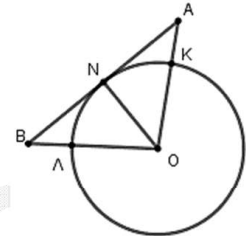


α) Να αποδείξετε ότι:

- i. τα τρίγωνα $ΚΒΣ$ και $ΚΔΣ$ είναι ίσα. ii. $ΚΛ = ΚΜ$

β) Να αιτιολογήσετε γιατί οι χορδές AB και $\Gamma \Delta$ είναι ίσες.

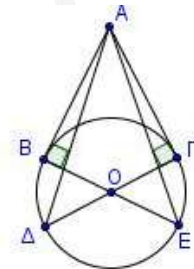
1676. Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο N του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του N θεωρούμε σημεία A και B , τέτοια ώστε $NA = NB$. Οι OA και OB τέμνουν τον κύκλο στα K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές.

β) Το σημείο N είναι μέσο του τόξου $ΚΛ$.

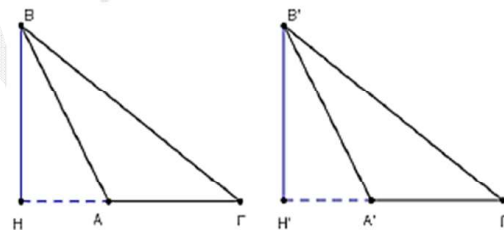
1684. Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Από σημείο εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB και $ΑΓ$. Τα σημεία E και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των B και Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα ABE και $ΑΓΔ$ είναι ίσα.

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $ΑΓΕ$ είναι ίσα.

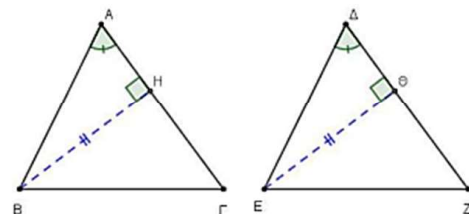
12149. Δίνονται τα αμβλυγώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $A'B'\Gamma'$ ($\hat{A}' = 90^\circ$) με $\gamma = \gamma'$ και $\beta = \beta'$. Αν τα ύψη BH και $B'H'$ των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ αντίστοιχα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:



α) $B\hat{A}H = B'\hat{A}'H'$.

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

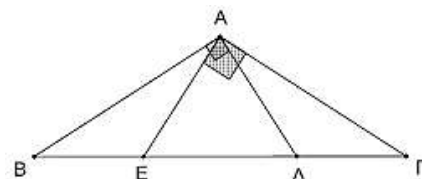
13517. Δίνονται δύο οξυγώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ με $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $A\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{E}Z$. Αν τα ύψη τους BH και $E\Theta$ είναι ίσα τότε να αποδείξετε ότι:



α) $AB = \Delta E$.

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα.

13533. Δίνεται ισοσκελές και αμβλυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Η κάθετη στην AB στο σημείο A τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ και η κάθετη στην $A\Gamma$ στο σημείο A τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:



α) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.

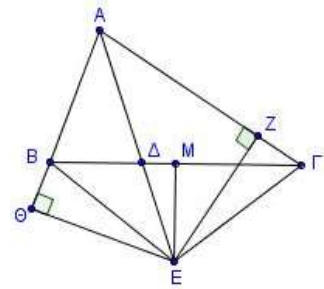
β) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

γ) $BE = \Gamma \Delta$.

4ο Θέμα

1707. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος, η κάθετη από το μέσο M της $B\Gamma$ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου AD στο σημείο E . Αν Θ, Z είναι οι προβολές του E στις AB, AG , να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
 β) Τα τρίγωνα ΘBE και ZGE είναι ίσα.
 γ) $\hat{A}\Gamma E + \hat{A}\beta E = 180^\circ$.

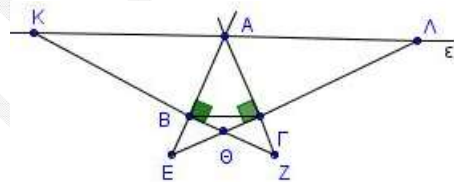


1724. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις πλευρές AG και AB αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = AG$, τότε τα ύψη BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

- α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση Π αιτιολογώντας την απάντησή σας.
 β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της Π και να αποδείξετε ότι ισχύει.
 γ) Να διατυπώσετε την πρόταση Π και την αντίστροφή της ως ενιαία πρόταση.

1875. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, και την ευθεία ϵ της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας A . Η κάθετη στη πλευρά AB στο B τέμνει την ϵ στο K και την ευθεία AG στο Z . Η κάθετη στη πλευρά AG στο Γ τέμνει την ϵ στο Λ και την ευθεία AB στο E .



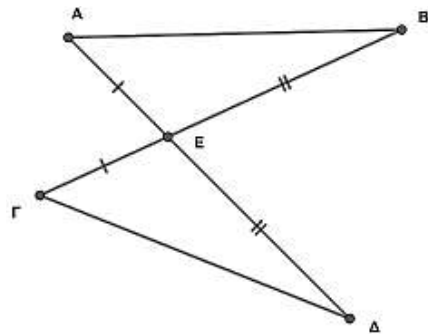
α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $AZ = AE$ ii. $AK = AL$

β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η $A\Theta$ είναι διχοτόμος της γωνίας A του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Θ το σημείο τομής των KZ, EL . Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

13839. Τα ευθύγραμμα τμήματα AD και $B\Gamma$ τέμνονται στο σημείο E έτσι ώστε $AE = GE$ και $BE = ED$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και $\Gamma\Delta E$ είναι ίσα.
 β) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις EH και $E\Theta$ του σημείου E από τις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$, αντίστοιχα, είναι ίσες.
 γ) Αν οι προεκτάσεις των AB και $\Gamma\Delta$ προς τα A και Γ αντίστοιχα τέμνονται στο Z , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.



Βασικοί γεωμετρικοί τύποι

Κύκλος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα να απέχουν μια ορισμένη απόσταση από ένα σταθερό σημείο.

Μεσοκάθετος τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.

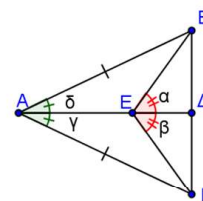
Διχοτόμος γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

1587. Αν για το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) του σχήματος ισχύουν $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ και $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α) Τα τρίγωνα AEB και AEG είναι ίσα.

β) Το τρίγωνο $ΓΕΒ$ είναι ισοσκελές.

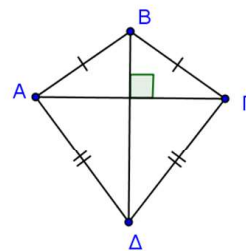
γ) Η ευθεία AD είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.



1624. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta\Gamma$. Οι διαγώνιοι $A\Gamma$, $B\Delta$ του τετράπλευρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα. Να αποδείξετε ότι:

α) Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος των γωνιών B και Δ του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$.

β) Η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$.



1558. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές.

β) Οι γωνίες $A\hat{I}B$ και $A\hat{I}\Gamma$ είναι ίσες.

γ) Η ευθεία AI είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.

1574. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ . Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά $B\Gamma$ την κάθετο ΔE , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

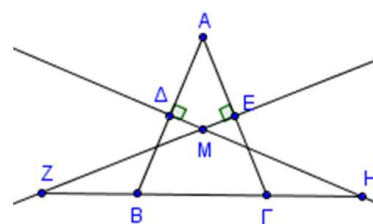
α) Τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα.

β) Η ευθεία $\Gamma\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος AE .

1578. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Οι μεσοκάθετοι των ίσων πλευρών του τέμνονται στο M και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση $B\Gamma$ στα Z και H .

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $\Delta B\Gamma$ και $E\Gamma\Delta$.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MZH είναι ισοσκελές.

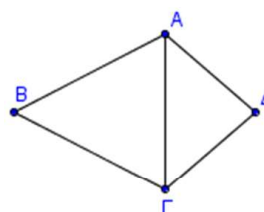


1585. Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$

β) Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

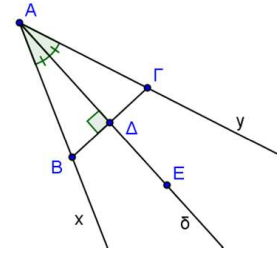
γ) Η ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$.



1670. Δίνεται γωνία $\alpha A \gamma$ και η διχοτόμος της $A\delta$. Από τυχαίο σημείο B της Ax φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την $A\delta$ στο Δ και την $A\gamma$ στο Γ . Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = A\Gamma$

β) Το τυχαίο σημείο E της $A\delta$ ισαπέχει από τα B και Γ .



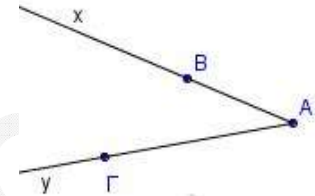
1688. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το χάρτη μιας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Ax και Ay παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία B και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια.

Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:

α) ισαπέχει από τα δύο πλατάνια. **β)** ισαπέχει από τα δύο ποτάμια.

γ) ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.



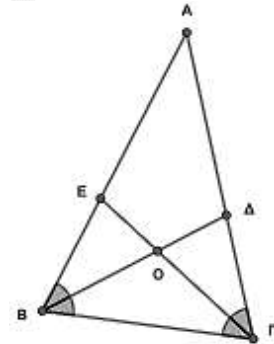
4ο Θέμα

13854. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Οι διχοτόμοι $B\Delta$ και ΓE των γωνιών B και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο σημείο O .

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

β) Από τα σημεία E και Δ φέρνουμε κάθετες EL και ΔK στις πλευρές $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $\Delta K = EL$.

γ) Να εντοπίσετε και να σχεδιάσετε σημείο Z της πλευράς $B\Gamma$ που η απόστασή του από το σημείο E να ισούται με την απόσταση των σημείων Δ και K αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.



Ανισοτικές σχέσεις

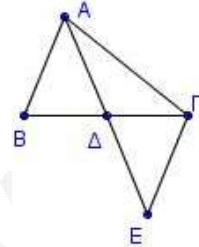
- Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.
- Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία.
- Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.
- Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους (τριγωνική ανισότητα).
- Αν δύο πλάγια τμήματα είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου και αντίστροφα.
- Από σημείο εκτός ευθείας φέρουμε το κάθετο και δύο πλάγια τμήματα.
 - Το κάθετο τμήμα είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο.
 - Αν τα δύο πλάγια τμήματα είναι άνισα, τότε και οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος της κάθετης είναι ομοιοτρόπως άνισες και αντίστροφα.

1540. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ . Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά $B\Gamma$ την κάθετο ΔE , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

- α)** $A\Delta = \Delta E$ **β)** $A\Delta < \Delta B$

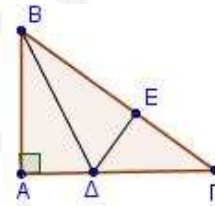
1573. Στο διπλανό σχήμα, η $A\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και το E είναι σημείο στην προέκταση της $A\Delta$, ώστε $\Delta E = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

- α)** $AB = \Gamma E$
β) $A\Delta < \frac{AB + A\Gamma}{2}$



1646. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία A . Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B , η ΔE είναι κάθετη στην $B\Gamma$ και η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας B . Να αποδείξετε ότι:

- α)** $A\Delta = \Delta E$ **β)** $A\Delta < \Delta\Gamma$ **γ)** $A\Gamma > AB$

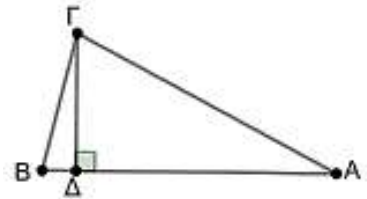


12417. Έστω δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, r) , με $R=3$, $r=2$ και $K\Lambda=4$. Να αποδείξετε ότι:

- α)** Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, r) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω A και B .
β) $K\hat{A}\Lambda > A\hat{\Lambda}K$

13844. Στο διπλανό σχήμα ισχύει ότι $B\Delta < A\Delta$, $AB = A\Gamma$ και $A\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$.

- α)** Να αποδείξετε ότι $A\Gamma > B\Gamma$.
β) Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$;
 Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

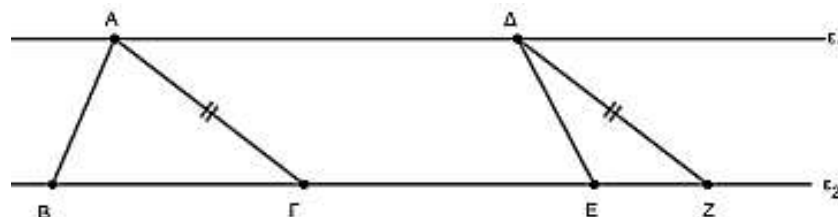


4ο Θέμα

1749. Θεωρούμε δύο σημεία A και B τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία ϵ , τέτοια ώστε η ευθεία AB δεν είναι κάθετη στην ϵ . Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία ϵ .

- α)** Αν η BA' τέμνει την ευθεία ϵ στο σημείο O , να αποδείξετε ότι:
 i. Η ευθεία ϵ διχοτομεί τη γωνία $A\hat{O}A'$.
 ii. Οι ημιευθείες OA και OB σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία ϵ .
β) Αν K είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία ϵ , να αποδείξετε ότι:
 i. $KA = KA'$ ii. $KA + KB > AO + OB$

13751. Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο, ενώ το ΔEZ είναι αμβλυγώνιο με $\hat{E} > 90^\circ$. Ισχύει επίσης ότι $A\Gamma = \Delta Z$.



- α) i. Να σχεδιάσετε τα ύψη των τριγώνων από τις κορυφές A και Δ ονομάζοντας τα AH και ΔΘ αντίστοιχα.
 ii. Να αποδείξετε ότι $H\Gamma = \Theta Z$.
 β) Να δικαιολογήσετε γιατί $EZ < B\Gamma$.

Σχετική θέση ευθείας και κύκλου- Εφαπτόμενα τμήματα

Θεωρούμε έναν κύκλο (O, R) μια ευθεία $x'x$ και την απόσταση $\delta = OA$ του κέντρου O από την $x'x$.

Αν $\delta > R$, τότε η $x'x$ δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο

και λέγεται εξωτερική ευθεία του κύκλου.

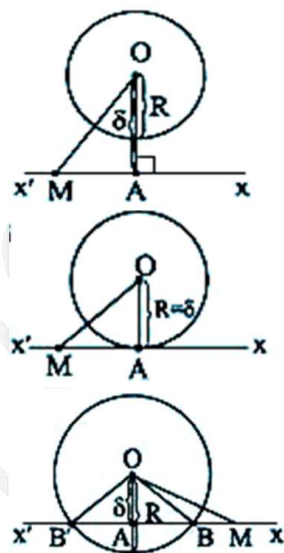
Αν $\delta = R$, τότε η $x'x$ έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A. Το σημείο A λέγεται σημείο επαφής της ευθείας με τον κύκλο.

Αν $\delta < R$, τότε η $x'x$ έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο. Στην περίπτωση αυτή η ευθεία $x'x$, λέγεται τέμνουσα του κύκλου και τα κοινά της σημεία με το κύκλο λέγονται σημεία τομής της με τον κύκλο.

Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

Η διακεντρική ευθεία:

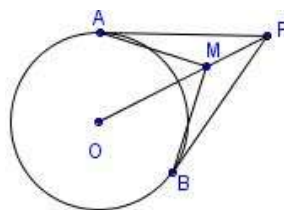
- (i) είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής,
 (ii) διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.



1617. Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB. Αν M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος OP, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα.

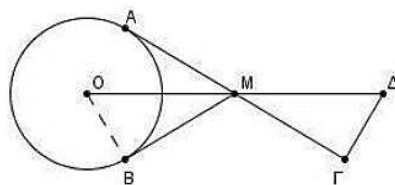
β) $\widehat{MAO} = \widehat{MBO}$.



1620. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) και τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB. Προεκτείνουμε την AM κατά τμήμα $M\Gamma = MA$ και την OM κατά τμήμα $M\Delta = OM$.

α) Να αποδείξετε ότι $MB = M\Gamma$.

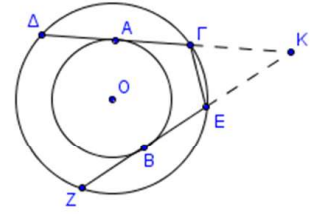
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OMB και MΓΔ είναι ίσα.



1667. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O και ακτίνες ρ και R ($\rho < R$). Οι χορδές $\Delta\Gamma$ και ZE του κύκλου (O, R) εφάπτονται στον κύκλο (O, ρ) στα σημεία A και B αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = ZE$

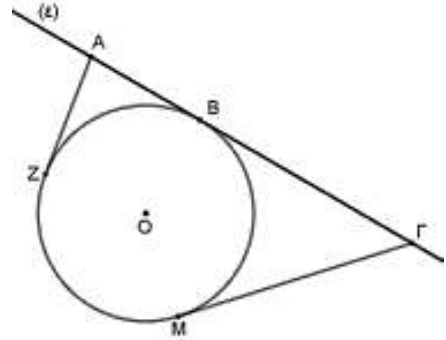
β) Αν οι $\Delta\Gamma$ και ZE προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $KE\Gamma$ είναι ισοσκελές.



13817. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο B του κύκλου φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ϵ) . Θεωρούμε στην ευθεία (ϵ) δύο σημεία A και Γ εκατέρωθεν του B έτσι ώστε $BA < B\Gamma$ και από τα σημεία αυτά, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AZ και ΓM στον κύκλο.

α) Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = AZ + M\Gamma$.



13758. Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 3)$ και $(\Lambda, 8)$. Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων, αιτιολογώντας την απάντησή σας, όταν:

α) $K\Lambda = 13$ **β)** $K\Lambda = 2$ **γ)** $K\Lambda = 5$ **δ)** $K\Lambda = 11$ **ε)** $K\Lambda = 9$

13759. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 6$. Έστω d η απόσταση του κέντρου O του κύκλου από μια ευθεία (ϵ) . Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου και της ευθείας (ϵ) στις εξής περιπτώσεις:

α) $d = 3$ **β)** $d = 6$ **γ)** $d = 9$

4ο Θέμα

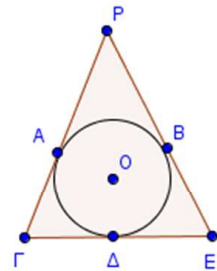
1751. Έστω ότι ο κύκλος (O, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου $P\Gamma E$ στα σημεία A, Δ και B .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $P\Gamma = \Gamma\Delta + AP$ **ii.** $P\Gamma - \Gamma\Delta = PE - \Delta E$

β) Αν $A\Gamma = BE$, να αποδείξετε ότι

i. Το τρίγωνο $P\Gamma E$ είναι ισοσκελές.
ii. Τα σημεία P, O και Δ είναι συνευθειακά.



1752. Θεωρούμε κύκλο κέντρου O και εξωτερικό σημείο του P . Από το P φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Η διακεντρική ευθεία PO τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ . Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα PA και PB στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $P\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές. **β)** $\Gamma A = \Delta B$.

γ) η περίμετρος του τριγώνου $P\Gamma\Delta$ είναι ίση με $PA + PB$.

Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα δύο κύκλων λέγεται διάκεντρος των δύο κύκλων και συμβολίζεται με δ .

Θεωρούμε δύο κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) με $R > \rho$. Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του (K, R) , αν και μόνο αν $\delta < R - \rho$.

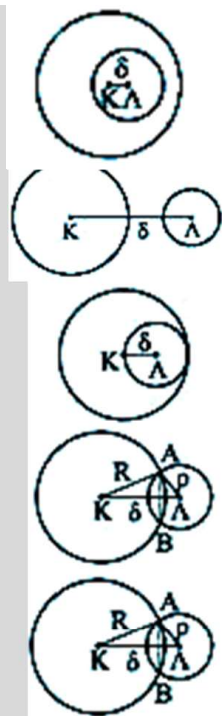
Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) βρίσκεται ο ένας στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν $\delta > R + \rho$.

Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, δηλαδή έχουν ένα κοινό σημείο και ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του (K, R) , αν και μόνο αν $\delta = R - \rho$.

Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, δηλαδή έχουν ένα κοινό σημείο και ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν $\delta = R + \rho$. Το κοινό σημείο δύο εφαπτόμενων κύκλων λέγεται σημείο επαφής και είναι σημείο της διακέντρου.

Οι κύκλοι τέμνονται, δηλαδή έχουν δύο κοινά σημεία, αν και μόνο αν $R - \rho < \delta < R + \rho$. Το ευθύγραμμο τμήμα AB που ενώνει τα κοινά σημεία λέγεται κοινή χορδή των δύο κύκλων.

Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.



2ο Θέμα

13757. Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 2)$ και $(\Lambda, 5)$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου KL , αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

β) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου KL , αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.

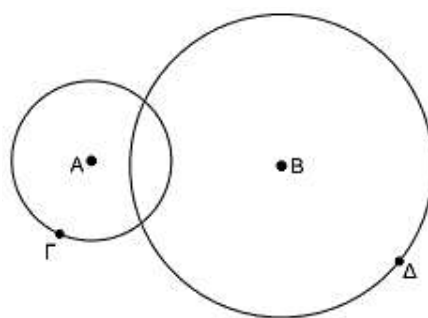
γ) Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου KL , αν ο κύκλος $(K, 2)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $(\Lambda, 5)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου KL , αν οι κύκλοι τέμνονται; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

13836.α) Στο διπλανό σχήμα για τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) ισχύει $\rho < R$.

Να αποδείξετε ότι $BD - AG < AB < AG + BD$.

β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B , τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το A του χάρτη και 5 από το B του χάρτη. Ποια είναι τα σημεία του χάρτη στα οποία μπορεί να είναι κρυμμένος ο θησαυρός;



13835. Τα σημεία A , K και Λ δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το σημείο A απέχει 4 από το K και 5 από το Λ .

α) Να αποδείξετε ότι $1 < KL < 9$. **β)** Να βρείτε ένα σημείο B του επιπέδου διαφορετικό από το A , που να απέχει 4 από το K και 5 από το Λ .



4ο Θέμα

13823.α) Στο διπλανό σχήμα για τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) ισχύει $\rho < R$ και $AB = 6$.

i. Να αποδείξετε ότι $BK - A\Gamma < AB < BK + A\Gamma$.

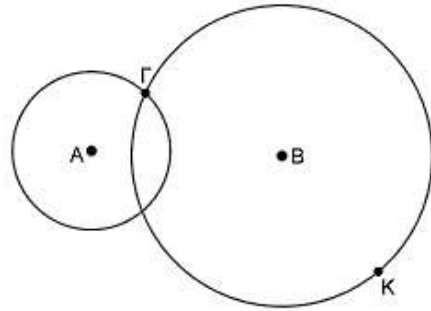
ii. Παρακάτω γράφονται οι ιδιότητες 1 και 2. Ποιο σημείο από τα K και Γ έχει την ιδιότητα 1, ποιο την ιδιότητα 2 και ποιο έχει και τις δύο;

Ιδιότητα 1: «Το σημείο απέχει R από το B.»

Ιδιότητα 2: «Το σημείο απέχει ρ από το A.»

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το A του χάρτη και 2 από το B του χάρτη. Μπορεί να είναι σωστή η πληροφορία που δίνει ο χάρτης για να βρει κανείς το θησαυρό;



13846. Δίνεται το διπλανό σχήμα με τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) με $R > \rho$. Επίσης $AB = 9$.

α) Να αποδείξετε ότι $R + \rho < 9$.

β) Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο KΛM με KΛ να είναι ίση με ρ και η πλευρά ΛM να είναι ίση με R. Να περιγράψετε τον τρόπο που το σχεδιάσατε και να αποδείξετε ότι η τρίτη πλευρά του είναι μικρότερη από 9.

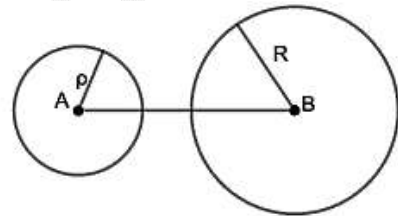
γ) Έστω το τρίγωνο KΛM που σχεδιάσατε στο β)

ερώτημα. Πόσα σημεία του επιπέδου έχουν και τις δύο ιδιότητες I1 και I2 που περιγράφονται παρακάτω;

I1: «Η απόσταση των σημείων από το K είναι ίση με ρ ».

I2: «Η απόσταση των σημείων από το M είναι ίση με R».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



4ο Κεφάλαιο: Παράλληλες ευθείες

- Δυο ευθείες e_1 και e_2 που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται παράλληλες ευθείες.
- Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.
- Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.
- **Αίτημα παραλληλίας:** Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο παράλληλη προς αυτή.
- Αν δυο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

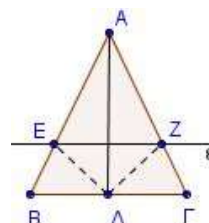
Οι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.
Οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

- Αν δύο διαφορετικές ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες προς μια τρίτη ευθεία ε , τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.
- Αν μια ευθεία τέμνει μία από δύο παράλληλες ευθείες τότε θα τέμνει και την άλλη.
- Αν δυο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.
- Δυο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες, μία προς μία, είναι ίσες αν είναι και οι δυο οξείες ή αμβλείες, ενώ είναι παραπληρωματικές αν η μία γωνία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.
- Οι διχοτόμοι δυο εντός εναλλάξ γωνιών είναι παράλληλες.
Οι διχοτόμοι δυο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών είναι κάθετες.

Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου

- Ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές ενός τριγώνου λέγεται **περιγεγραμμένος** κύκλος του. Το κέντρο του λέγεται **περίκεντρο**.
Οι τρεις μεσοκάθετοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο το οποίο είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.
- Ο κύκλος που βρίσκεται στο εσωτερικό ενός τριγώνου και εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του λέγεται **εγγεγραμμένος** κύκλος του τριγώνου. Το κέντρο του λέγεται **έγκεντρο**.
Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.
- Οι τρεις διχοτόμοι ενός τριγώνου τέμνονται σε σημείο το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται στη μία πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των δύο άλλων. Ο κύκλος αυτός λέγεται **παρεγγεγραμμένος** και το κέντρο του **παράκεντρο** του τριγώνου.

- 1544.** Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρουμε τη διχοτόμο $A\Delta$ και μια ευθεία (ε) παράλληλη προς τη $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- α)** Το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές.
β) Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $AZ\Delta$ είναι ίσα.



- 1597.** Στις προεκτάσεις των πλευρών BA (προς το A) και ΓA (προς το A) τριγώνου $AB\Gamma$, παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:
- α)** Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι ίσα. **β)** $\Delta E \parallel B\Gamma$

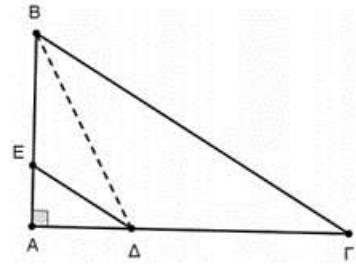
1594. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Έστω Δ σημείο της πλευράς AG τέτοιο, ώστε η διχοτόμος DE της γωνίας ADB να είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $\hat{E}\Delta B = \hat{\Delta}B\Gamma$ και $\hat{E}\Delta A = \hat{\Gamma}$.

ii) Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β) Αν $\hat{A}\Delta B = 60^\circ$ να υπολογίσετε τη γωνία Γ .

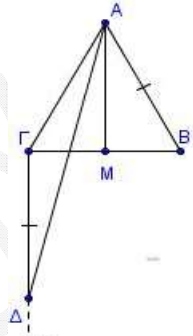


1595. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και η διάμεσός του AM . Φέρουμε ημιευθεία $\Gamma\chi \perp B\Gamma$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $\Gamma\Delta = AB$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta A\Gamma$ είναι ίση με τη $\hat{\Gamma}\Delta A$.

β) Να αποδείξετε ότι:

i) $\Gamma\Delta // AM$ ii) Η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας MAG .

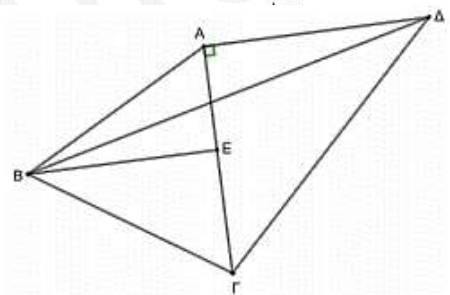


12710. Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του BE . Εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ με υποτείνουσα τη $\Gamma\Delta$ έτσι, ώστε τα σημεία B και Δ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας AG . Να αποδείξετε ότι:

α) $BE // A\Delta$.

β) οι γωνίες $E\Delta B$ και $A\Delta B$ είναι ίσες.

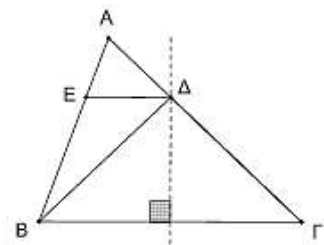
γ) το τρίγωνο $BA\Delta$ είναι ισοσκελές.



13534. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά AG στο σημείο Δ και η παράλληλη από το Δ προς τη $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

β) η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}\Delta B$.

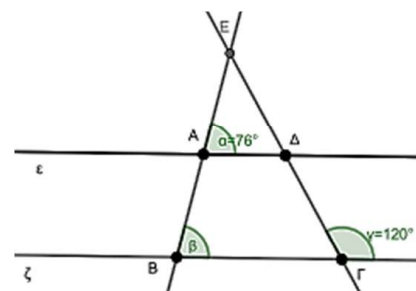


13741. Στο σχήμα που ακολουθεί οι ευθείες ϵ και ζ είναι παράλληλες. Αν είναι $\hat{\alpha} = 76^\circ$ και $\hat{\gamma} = 120^\circ$, να υπολογίσετε :

α) Τη γωνία $\hat{\beta}$.

β) Τις γωνίες του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$.

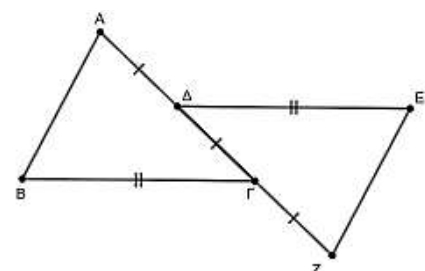
γ) Τη γωνία $\hat{E}$ του τριγώνου EAD .



13748. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε το μέσο Δ της πλευράς AG . Φέρουμε τμήμα ΔE ίσο και παράλληλο με την πλευρά $B\Gamma$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

Προεκτείνουμε την AG προς το μέρος του Γ και παίρνουμε σημείο Z τέτοιο ώστε $\Gamma Z = \Delta\Gamma$. Να

αποδείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα ABΓ και ZEΔ είναι ίσα.

β) $AB \parallel EZ$

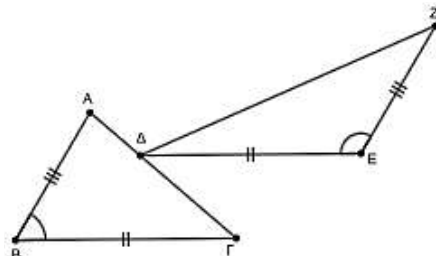
13752. Σε τρίγωνο ABΓ με $\hat{B} < 90^\circ$ θεωρούμε τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΓ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ ίσο και παράλληλο με την πλευρά ΒΓ και από το σημείο Ε φέρουμε τμήμα ΕΗ ίσο και παράλληλο με την πλευρά ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Ένας μαθητής κάνει τους παρακάτω διαδοχικούς συλλογισμούς. Να χαρακτηρίσετε Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) κάθε έναν από αυτούς.

1. Οι γωνίες $\hat{\Delta EZ}$ και $\hat{AB\Gamma}$ είναι γωνίες με πλευρές παράλληλες.
2. Οπότε $\hat{\Delta EZ} = \hat{AB\Gamma}$.
3. Τα τρίγωνα ΔΕΗ και ABΓ είναι ίσα.
4. Το τμήμα ΔΗ είναι ίσο με το τμήμα ΑΓ.

β) Να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς σας (Σ ή Λ) που αφορούν τους ισχυρισμούς 2. και 3.

γ) Αν στα δεδομένα παραλείψουμε τη συνθήκη $\hat{B} < 90^\circ$, να συγκρίνετε τα τμήματα ΑΓ και ΔΗ για τα διάφορα είδη της γωνίας $\hat{B}$ και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

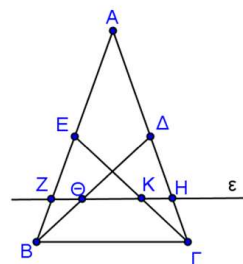


4ο Θέμα

1744. Στο ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB = AG$) φέρουμε τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ. Μια ευθεία ε παράλληλη στη βάση ΒΓ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Ζ και Η αντίστοιχα και τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ στα σημεία Θ και Κ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

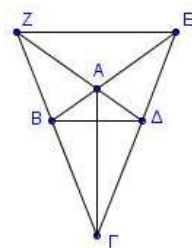
α) $BZ = GH$

β) τα τρίγωνα ΖΒΘ και ΗΚΓ είναι ίσα.

γ) $ZK = H\Theta$.

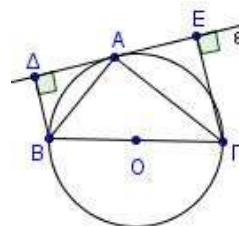
1793. Δίνεται τετράπλευρο ABΓΔ με $AB = AD$ και $GB = GD$. Αν Ε το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΒΑ και ΓΔ και Ζ το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔΑ και ΓΒ, να αποδείξετε ότι:

α) Η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΓΔ.

β) $\Gamma Z = \Gamma E$.γ) $EZ \parallel BD$.

1809. Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο, με διάμετρο ΒΓ. Από σημείο Α του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη (ε) του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABΓ. Από τα σημεία Β και Γ φέρουμε τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ κάθετα στην ευθεία (ε).

α) Να αποδείξετε ότι οι ΒΑ και ΓΑ είναι διχοτόμοι των γωνιών ΔΒΓ και ΕΓΒ.

β) Αν ΑΖ είναι ύψος του τριγώνου ABΓ, να αποδείξετε ότι: $AD = AE = AZ$.γ) Να αποδείξετε ότι: $BD + GE = BG$.

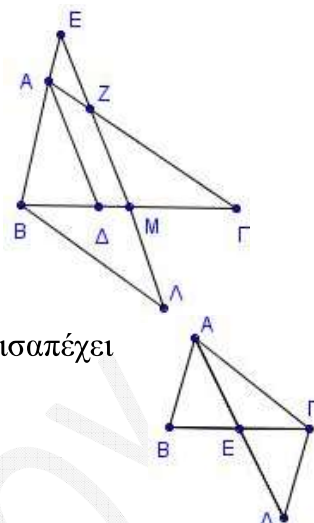
1818. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, η διχοτόμος του $A\Delta$ και ευθεία ε παράλληλη από το B προς την $A\Gamma$.

Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην $A\Delta$ η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Z , την ευθεία ε στο σημείο Λ και την προέκταση της BA στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AEZ και $B\Lambda E$ είναι ισοσκελή.

β) $B\Lambda = \Gamma Z$

γ) $AE = A\Gamma - B\Lambda$.



1890. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών A, B, Γ, Δ και E και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωρίο E ισαπέχει από τα χωριά B, Γ και επίσης από τα χωριά A και Δ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η απόσταση των χωριών A και B είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ .

ii. αν οι δρόμοι AB και $\Gamma\Delta$ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν.

iii. τα χωριά B και Γ ισαπέχουν από το δρόμο $A\Delta$.

β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου $A\Gamma$ που ισαπέχει από τα χωριά A και Δ .

13822. Δίνονται οι ευθείες (ε) και (ψ) .

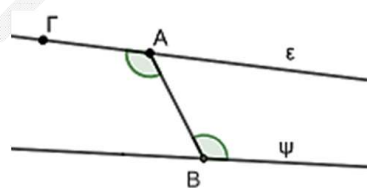
α) Αν η γωνία $\widehat{B\Lambda\Gamma}$ είναι μεγαλύτερη από την $\widehat{A\hat{B}\psi}$:

i. Να αποδείξετε ότι $\widehat{B\Lambda\varepsilon} + \widehat{A\hat{B}\psi} < 180^\circ$.

ii. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε και ψ τέμνονται. Σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η AB βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί;

β) Να διατυπώσετε την πρόταση που αποδείχθηκε στο α) για τις εντός και εναλλάξ γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται από τρίτη και το σημείο τομής των ευθειών αυτών.

γ) Αν ισχύει $\widehat{B\Lambda\Gamma} < \widehat{A\hat{B}\psi}$, τότε σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η AB βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί;



13843. Έστω ότι οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ εφάπτονται στον κύκλο (O, R) στα άκρα μιας διαμέτρου του AB . Να αποδείξετε ότι:

α) οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ είναι παράλληλες.

β) οι διχοτόμοι των γωνιών $B\Lambda x$ και $A\hat{B}y$ τέμνονται σε σημείο M .

γ) το σημείο M είναι το μέσο του ημικυκλίου AB .

δ) αν η διχοτόμος της γωνίας $B\Lambda x$ τέμνει την $y'y$ στο σημείο Γ και η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}y$ τέμνει την $x'x$ στο σημείο Δ , τότε $M\Gamma = M\Delta$.

Άθροισμα γωνιών τριγώνου

1. Το άθροισμα γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.
2. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.
3. Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες ίσες, μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.
4. Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.
Δυο αμβλείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.
Δυο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες αλλά η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία είναι παραπληρωματικές.
5. Το άθροισμα των γωνιών κυρτού n -γώνου είναι $2n - 4$ ορθές.
6. Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού n -γώνου είναι 4 ορθές.

1541. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ . Φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = AB$

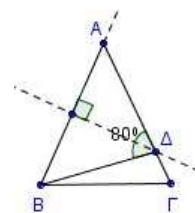
β) Αν επιπλέον $B\hat{\Delta}A = 55^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Gamma\Delta E$.

1552. Ένας μαθητής της Α' Λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία $xO\psi$. Στη συνέχεια με κέντρο τη κορυφή O της γωνίας σχεδιάζει δύο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές Ox και $O\psi$ της γωνίας στα σημεία A και B αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ, Δ . Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;

1554. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο $\hat{A}_{εξ} = 2\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$. Φέρουμε τη μεσοκάθετο της πλευράς AB , η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο Δ και σχηματίζεται γωνία $A\Delta B$ ίση με 80° .

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.

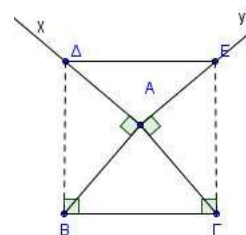
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.



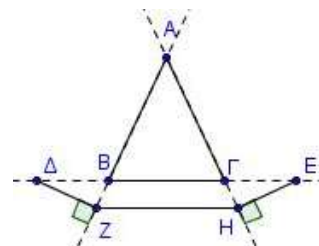
1556. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Φέρουμε εκτός του τριγώνου τις ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$. Οι κάθετες στην πλευρά $B\Gamma$ στα σημεία B και Γ τέμνουν τις Ax και Ay στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

β) Αν η γωνία $B\hat{A}\hat{\Gamma}$ είναι ίση με 80° , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Delta A E$.



1572. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημεία Δ και E στην ευθεία $B\Gamma$ τέτοια, ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Έστω $\Delta Z \perp AB$ και $EH \perp A\Gamma$.

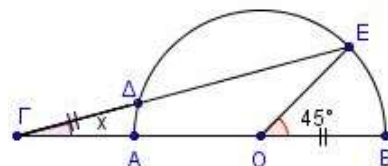


α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $BZ = \Gamma H$.
- ii. Το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές.

β) Αν $\hat{A} = 50^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AZH .

1576. Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB προεκτείνουμε την AB προς το μέρος του A και παίρνουμε ένα σημείο Γ . Θεωρούμε E ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος ΓE με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα $\Gamma\Delta$ ισούται με το OB και $\widehat{BOE} = 45^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{\Gamma}O = x$.

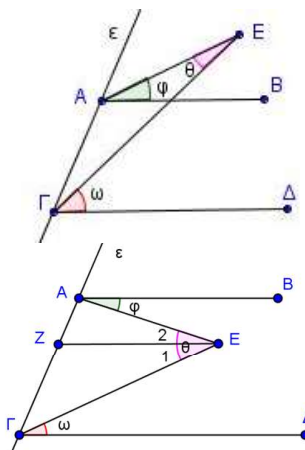


1590. Δίνεται ευθεία ϵ του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ καθώς και ένα τυχαίο σημείο E βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ϵ . Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το E είναι εκτός των τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$, τότε:

$$\hat{\omega} = \hat{\varphi} + \hat{\theta}.$$

β) Αν το E είναι ανάμεσα στα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ και $EZ \parallel AB$, τότε να αποδείξετε ότι $\hat{\theta} = \hat{\varphi} + \hat{\omega}$.



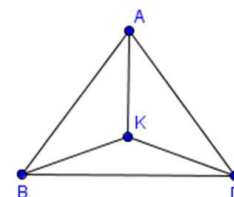
1593. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με

$\hat{A} = 80^\circ$. Έστω K σημείο της διχοτόμου της γωνίας A , τέτοιο, ώστε $KB = KA = K\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BKA και ΓKA είναι ίσα.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες ABK και $A\Gamma K$.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $BK\Gamma$.

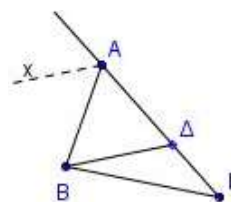


1596. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Έστω Ax η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας $\hat{A}_{\epsilon\zeta} = 120^\circ$. Από την κορυφή B φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Ax , η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Δ .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $\hat{A}\hat{B}\Delta = 60^\circ$
- ii. το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.
- iii. $\Delta\Gamma = A\Gamma - AB$

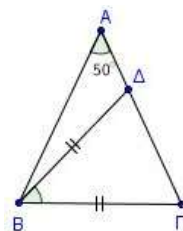
β) Αν η γωνία $B\Delta A$ είναι διπλάσια της $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta\Gamma$.



1602. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} = 50^\circ$. Έστω Δ σημείο της πλευράς $A\Gamma$, τέτοιο, ώστε $BD = B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες B και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta B\Gamma = \hat{A}$.

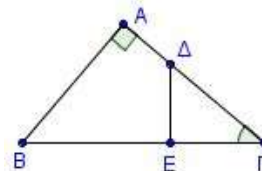


1603. Θεωρούμε ορθογώνιο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς $A\Gamma$ και $DE \perp B\Gamma$.

Να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.

β) τις γωνίες του τετράπλευρου $A\Delta EB$.



1604. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} = 40^\circ$. Στην προέκταση της ΓB (προς το B) παίρνουμε τμήμα $B\Delta$ τέτοιο, ώστε $B\Delta = AB$. Να υπολογίσετε

α) τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) τη γωνία $\Delta \hat{A} \Gamma$.

1605. Θεωρούμε ορθογώνιο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Έστω $A\Delta$ η

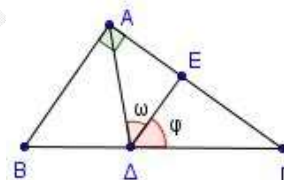
διχοτόμος της γωνίας A και $DE \parallel AB$.

Αν $\hat{B} = \hat{\Gamma} + 20^\circ$,

α) Να υπολογίσετε:

i. τις γωνίες B και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.

ii. τις γωνίες ω και ϕ . **β)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

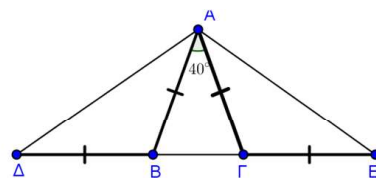


1607. Στο διπλανό σχήμα ισχύουν $\Delta B = BA = A\Gamma = \Gamma E$ και $B\hat{A}\Gamma = 40^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E = 110^\circ$.

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.

γ) Το τρίγωνο $\Delta A E$ είναι ισοσκελές.



1623. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 80^\circ$, $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$ και έστω $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας A .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες B και Γ .

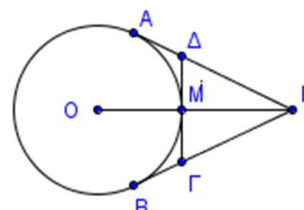
β) Φέρνουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην AB , που τέμνει την $A\Gamma$ στο E .

Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\Delta E$ και $E\Delta \Gamma$.

1636. Δίνεται κύκλος κέντρου O και από ένα σημείο P εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Το τμήμα PO τέμνει τον κύκλο στο M και η εφαπτομένη του κύκλου στο M τέμνει τα PA και PB στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $P\Delta \Gamma$ είναι ισοσκελές.

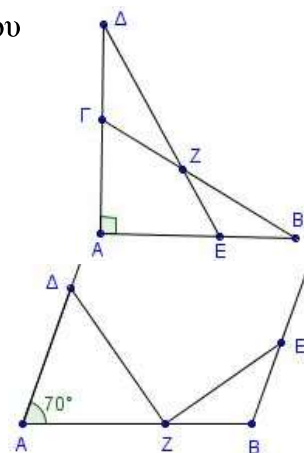
β) Αν $A\hat{P}B = 40^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία AOB .



1639. Στα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ (γωνία A ορθή) του διπλανού σχήματος ισχύει $\hat{B} = \hat{\Delta} = 30^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου $AEZ\Gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\Gamma Z\Delta$ και EBZ είναι ισοσκελή.

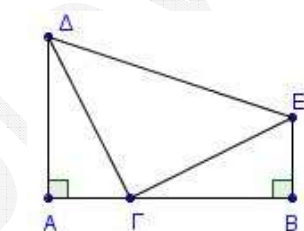


1640. Στο διπλανό σχήμα, οι $A\Delta$, BE είναι παράλληλες.

Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = AZ$, $BE = BZ$ και $\hat{A} = 70^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $A\Delta Z$ και BZE .

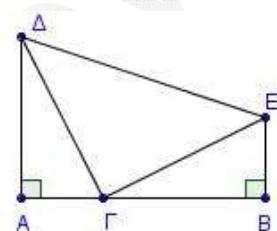
β) Να αποδείξετε ότι $\Delta Z E = 90^\circ$.



1641. Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες A, B είναι ορθές και επιπλέον $A\Delta = B\Gamma$ και $A\Gamma = BE$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $B\Gamma E$ είναι ίσα.

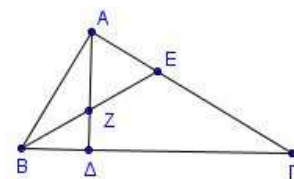
β) Αν $E\hat{\Gamma}B = 40^\circ$, τότε το τρίγωνο $\Delta\Gamma E$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.



1645. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = 60^\circ$.

β) Αν το ύψος $A\Delta$ και η διχοτόμος BE τέμνονται στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο.

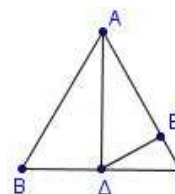


1661. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και η διάμεσός του $A\Delta$ τέτοια, ώστε $B\hat{A}\Delta = 30^\circ$. Θεωρούμε σημείο E στην $A\Gamma$ τέτοιο, ώστε $A\Delta = AE$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$.

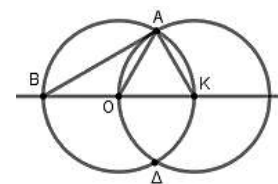
γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $E\Delta\Gamma$.



1673. Δίνονται δυο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) με $OK = \rho$, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και Δ .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAK είναι ισόπλευρο.

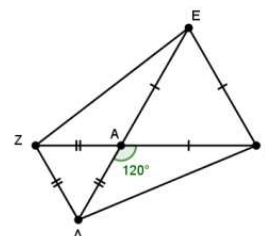
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου BAK .



1682. Έστω τρίγωνο $AB\Delta$ με $\hat{A} = 120^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα AEB και $AZ\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AEZ και $AB\Delta$ είναι ίσα.

β) Το τμήμα ΔZ είναι παράλληλο στο BE .



1693. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας A . Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς την AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο E .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

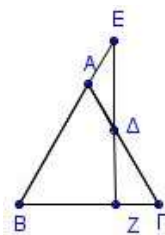
β) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\Delta E$.

γ) Αν η γωνία B είναι 20° μεγαλύτερη από τη γωνία Γ, να υπολογίσετε τη γωνία ΕΔΓ.

1689. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε σημείο Ε στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς ΑΓ, ώστε $AE = AD$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ.

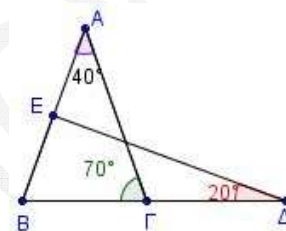
β) Αν Ζ είναι το σημείο τομής της προέκτασης της ΕΔ (προς το Δ) με την ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ΕΖ είναι κάθετη στην ΒΓ.



1699. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$.

α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ.

β) Αν $\hat{A} = 75^\circ + \hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.



1700. Στο διπλανό σχήμα να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

β) η γωνία ΑΕΔ είναι ορθή.

12640. Στο κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ, οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο. Αν η γωνία του Γ ισούται με 100° , η γωνία του Δ ισούται με 140° και η γωνία του Ε ισούται με 80° τότε, να υπολογίσετε:

α) το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B}$.

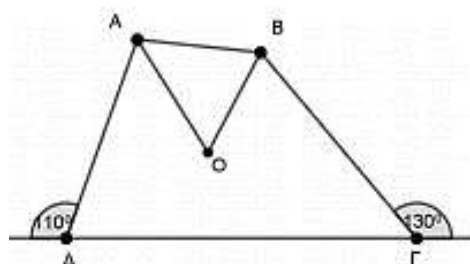
β) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.

12644. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, η εξωτερική γωνία της Γ, ισούται με 130° και η εξωτερική γωνία της Δ ισούται με 110° . Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο τότε, να υπολογίσετε:

α) τα μέτρα των γωνιών Γ και Δ του τετραπλεύρου.

β) το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B}$.

γ) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.



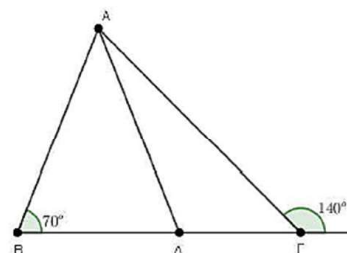
12704. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 70^\circ$ και $\hat{\Gamma}_{\text{εξωτ}} = 140^\circ$.

Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε εσωτερικό σημείο Δ, ώστε $AD = AB$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{BAD} = 40^\circ$

β) $\hat{ADG} = 110^\circ$

γ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



12707. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 70^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 55^\circ$.

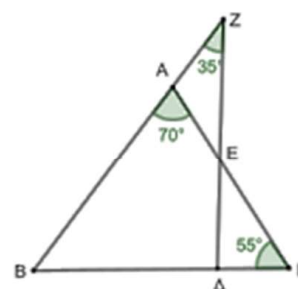
Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το σημείο Α και

παίρνουμε στην προέκταση σημείο Ζ ώστε $\hat{BZD} = 35^\circ$, όπου Δ εσωτερικό σημείο της ΒΓ.

Η ΖΔ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

β) $\hat{ZDB} = 90^\circ$.

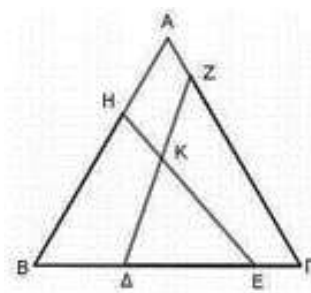


γ) το τρίγωνο AZE είναι ισοσκελές.

12708. Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ. Στις πλευρές BΓ και ΓΑ θεωρούμε σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα ώστε $BE = ΓΖ$. Στις πλευρές ΑΒ και ΓΒ θεωρούμε σημεία Η και Δ αντίστοιχα ώστε $BH = ΓΔ$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΖ και ΕΗ τέμνονται στο σημείο Κ το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) $EH = ΔΖ$ και $\widehat{BHE} = \widehat{ΓΔΖ}$.

β) τα τρίγωνα ΒΕΗ και ΚΕΔ έχουν ίσες γωνίες μία προς μία.



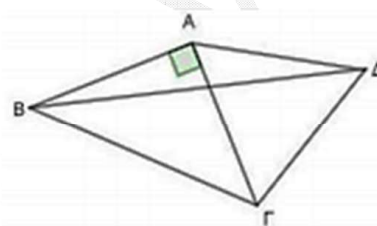
12709. Δίνεται το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο

ΑΒΓ με $AB = ΑΓ$ και $\widehat{Α} = 90^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών Β, Γ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.

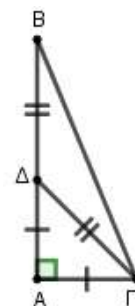
γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΑΒΔ.



13442. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{Α} = 90^\circ$. Στην πλευρά του ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $BD = ΔΓ$ και $ΑΔ = ΑΓ$.

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{ΑΔΓ} = 45^\circ$.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{Β}$.



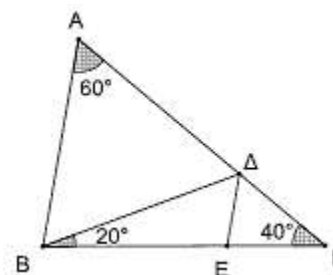
13443. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{Α} = 60^\circ$ και $\widehat{Γ} = 40^\circ$. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ, ώστε $\widehat{ΓΒΔ} = 20^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.

β) Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

i. $\widehat{ΒΔΕ} = 60^\circ$.

ii. Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ΒΔΓ}$.

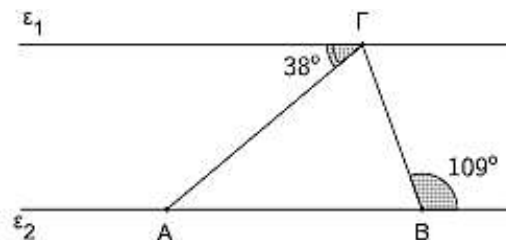


13535. Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ϵ_1 διέρχεται από την κορυφή Γ του τριγώνου ΑΒΓ και είναι παράλληλη στην ευθεία ϵ_2 που ορίζεται από τις κορυφές του Α και Β.

Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:

α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

β) να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και να εξηγήσετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.

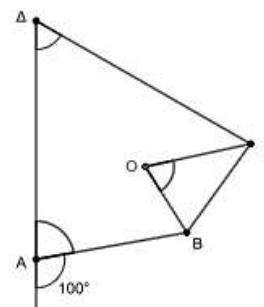


13619. Θεωρούμε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος με $\hat{A}_{εξ} = 100^\circ$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 220^\circ$.

Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο O , τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

β) Να αποδείξετε ότι $\hat{BO\Gamma} = 70^\circ$.

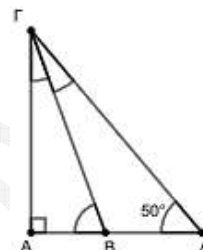


13654. Στο ακόλουθο σχήμα είναι

$\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{AB\Gamma} - \hat{A\Gamma B} = 50^\circ$ και $\hat{A\Delta\Gamma} = 50^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες $\hat{AB\Gamma}$ και $\hat{A\Gamma B}$ του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι η ΓB είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A\Gamma\Delta}$.



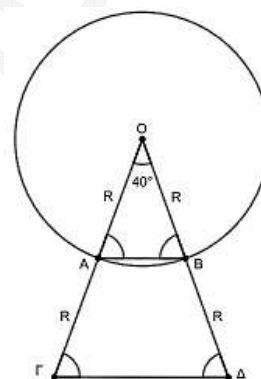
13687. Σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα R θεωρούμε επίκεντρη

γωνία $\hat{AOB} = 40^\circ$. Προεκτείνουμε τις ακτίνες OA και OB κατά τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $A\Gamma = OA$ και $B\Delta = OB$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{OAB} = \hat{OBA} = 70^\circ$.

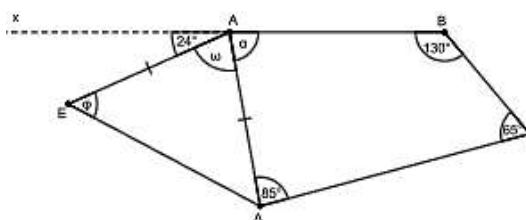
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{O\Gamma\Delta}$ και $\hat{O\Delta\Gamma}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$.



13749. Στο παρακάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta E$ είναι ένα πεντάγωνο στο οποίο η διαγώνιος $A\Delta$ είναι ίση με την πλευρά AE και η ημιευθεία Ax είναι προέκταση της BA προς το A . Να υπολογίσετε δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

α) Τη γωνία $\hat{\alpha}$ **β)** Τη γωνία $\hat{\omega}$ **γ)** Τη γωνία $\hat{\phi}$.



4ο Θέμα

1708. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 50^\circ$, το

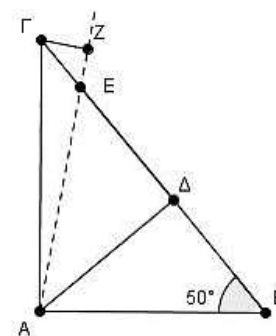
ύψος του $A\Delta$ και σημείο E στην $\Delta\Gamma$ ώστε $\Delta E = B\Delta$. Το σημείο Z είναι η προβολή του Γ στην AE .

α) Να αποδείξετε ότι:

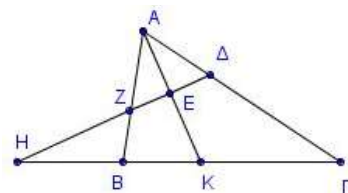
i. Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

ii. $\hat{\Gamma\hat{A}E} = 10^\circ$.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $Z\Gamma E$.

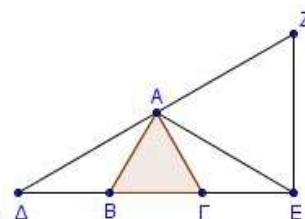


1792. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Φέρουμε τη διχοτόμο του AK και σε τυχαίο σημείο της E φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο AK , η οποία τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Z και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της ΓB στο σημείο H . Να αποδείξετε ότι:



- α) $\widehat{Z\Delta\Gamma} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$ β) $ZK = K\Delta$ γ) $\widehat{ZH\Gamma} = \frac{\widehat{B} - \widehat{\Gamma}}{2}$

1819. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $B\Delta = B\Gamma$, ενώ στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $\Gamma E = B\Gamma$. Φέρουμε την κάθετη στην $E\Delta$ στο σημείο E , η οποία τέμνει την προέκταση της ΔA στο Z .



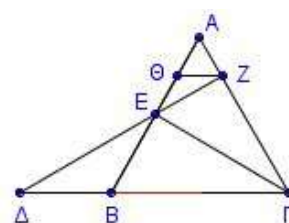
- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $\Gamma A E$ και $B\Delta A$.
β) Να αποδείξετε ότι η ΓZ είναι μεσοκάθετος του AE .
γ) Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma Z$.

1828. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του ΓE . Στην προέκταση της ΓB

προς το B , θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$. Αν η

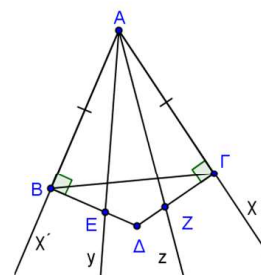
ευθεία ΔE τέμνει την $A\Gamma$ στο Z και $Z\Theta \parallel B\Gamma$:

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο $A\Theta Z$ είναι ισόπλευρο.
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Theta E Z$.
γ) Να αποδείξετε ότι $AE = 2\Theta Z$.
δ) Να αποδείξετε ότι $3AB = 4\Theta B$.



1849. Στις πλευρές Ax' και Ax γωνίας $x'Ax$ θεωρούμε σημεία B και Γ ώστε $AB = A\Gamma$. Οι κάθετες στις Ax' και Ax στα σημεία B και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο Δ . Αν οι ημιευθείες Ay και Az χωρίζουν τη γωνία $x'Ax$ σε τρεις ίσες γωνίες και τέμνουν τις $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

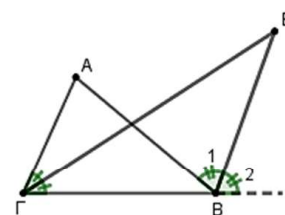
- α) Το τρίγωνο EAZ είναι ισοσκελές.
β) Το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $x'Ax$.
γ) Οι γωνίες $\Gamma B\Delta$ και $\Gamma A\Delta$ είναι ίσες.



1851. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η προέκταση της διχοτόμου της γωνίας Γ και της εξωτερικής γωνίας του B ,

τέμνονται στο E . Δίνεται ότι $\widehat{A\hat{B}E} = 70^\circ = 2\widehat{\Gamma E B}$.

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Gamma B E$ είναι ισοσκελές.
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.



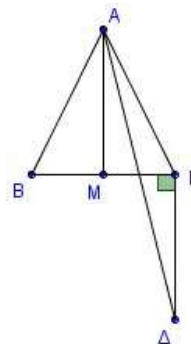
1888. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρνουμε $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$ με $\Gamma\Delta = AB$ (A, Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$). Να αποδείξετε ότι:

α) $AM \parallel \Gamma\Delta$

β) η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $MA\Gamma$.

γ) $\widehat{\Delta A\Gamma} = 45^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}$

δ) $A\Delta < 2AB$



11882. Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Delta E$ και ΔZH είναι ορθογώνια με ορθές γωνίες

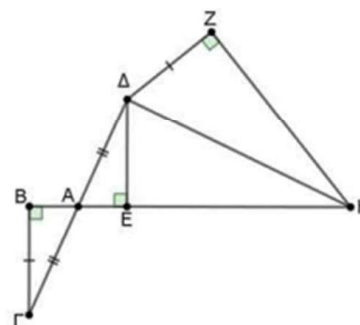
$\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{A\Delta E}$ και $\widehat{\Delta ZH}$, αντίστοιχα. Επίσης $A\Gamma = A\Delta$ και $B\Gamma = \Delta Z$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα ευθύγραμμα τμήματα $B\Gamma$ και ΔE είναι ίσα.

β) Η ΔH είναι διχοτόμος της γωνίας $E\widehat{H}Z$.

γ) Αν, επιπλέον, οι $A\Delta$ και ΔH είναι κάθετες, τότε

$$\widehat{A\Delta E} = \frac{\widehat{E\widehat{H}Z}}{2}.$$

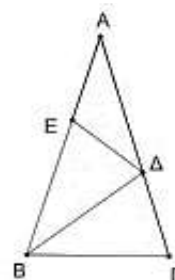


13537. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, σημείο Δ της πλευράς $A\Gamma$, ώστε $A\Delta = B\Delta = B\Gamma$ και σημείο E της πλευράς AB , ώστε $AE = \Gamma\Delta$.

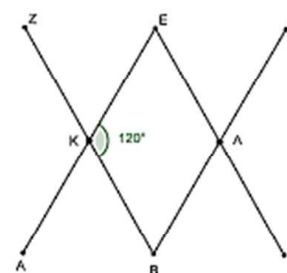
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\widehat{\Gamma} = 2\widehat{A}$ ii. $\widehat{A} = 36^\circ$ iii. Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές

β) Στην προέκταση της ΔE προς το E θεωρούμε σημείο Z , ώστε $\Delta Z = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.



13697. Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα AE , BZ , $B\Delta$ και ΓE αναπαριστούν τέσσερις ίσους ράβδους μήκους 40 cm οι οποίες αποτελούν μέρη μιας κρεμάστρας τοίχου. Οι ράβδοι συνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε ανά δύο απέναντι να είναι παράλληλες, δηλαδή $AE \parallel B\Delta$ και $BZ \parallel \Gamma E$, και ανά δύο να έχουν κοινό μέσο, δηλαδή K κοινό μέσο των AE , BZ και Λ κοινό μέσο των $B\Delta$, ΓE . Έστω ότι η μία από τις γωνίες που σχηματίζουν οι τεμνόμενες ράβδοι AE και BZ με κορυφή το κοινό τους μέσο K , η γωνία $B\widehat{K}E$, είναι ίση με 120° .



α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{AKB} = \widehat{KBL} = \widehat{BL\Gamma} = 60^\circ$.

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι τα τρίγωνα AKB και $BL\Gamma$ είναι ίσα και ισόπλευρα. Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία.

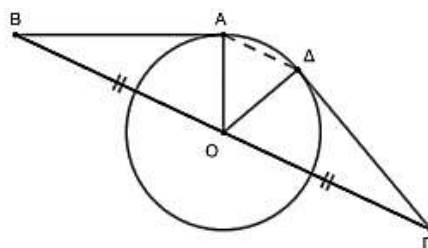
13499. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $AB < A\Gamma$ και AH το ύψος προς την υποτείνουσα. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία Δ και E τέτοια ώστε $\Delta B = AB$ και

$\Gamma E = \Gamma A$. Αν ΔZ και $E\Theta$ είναι οι αποστάσεις των Δ και E από τις πλευρές $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma}\Delta\Delta = \hat{\Delta}\Delta H$ και $\hat{E}\Delta B = \hat{H}\Delta E$

β) $\Delta E = \Delta Z + E\Theta$.

13750. Από σημείο B εξωτερικό ενός κύκλου (O, R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα BA . Ενώνουμε το σημείο B με το κέντρο O του κύκλου και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα $OG = BO$. Από το σημείο Γ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα $\Gamma\Delta$, όπως στο σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. $AB = \Delta\Gamma$

ii. $A\Delta \parallel B\Gamma$

β) Αν το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος BA είναι ίσο με την ακτίνα R , τι είδους τρίγωνο είναι το τρίγωνο $AO\Delta$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

5ο Κεφάλαιο: Παραλληλόγραμμο - Τραπεζίδια

Παραλληλόγραμμο

Το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες λέγεται παραλληλόγραμμο.

- Σε κάθε παραλληλόγραμμο:
 - οι απέναντι πλευρές του και οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
 - οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.
- Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στις ευθείες των απέναντι πλευρών παραλληλογράμμου και είναι κάθετο σε αυτές λέγεται ύψος του παραλληλογράμμου.
- Αν σε ένα τετράπλευρο οι απέναντι πλευρές του είναι ανά δύο ίσες, τότε είναι παραλληλόγραμμο.
- Αν σε ένα τετράπλευρο δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες, τότε είναι παραλληλόγραμμο.
- Αν σε ένα τετράπλευρο οι απέναντι γωνίες του είναι ανά δύο ίσες, τότε είναι παραλληλόγραμμο.
- Αν σε ένα τετράπλευρο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, τότε είναι παραλληλόγραμμο.

1531. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Delta$ (προς το μέρος του Δ) κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$ και φέρουμε την BE που τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο H . Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές.

β) το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο. **γ)** η AH είναι διάμεσος του τριγώνου BAE .

1533. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του BM και GN . Προεκτείνουμε την BM (προς το M) κατά τμήμα $M\Delta = BM$ και την GN (προς το N) κατά τμήμα $NE = GN$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta \parallel B\Gamma$ και $AE \parallel B\Gamma$.

β) Είναι τα σημεία E , A και Δ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

1534. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και η διαγώνιός του $B\Delta$. Από τις κορυφές A και Γ φέρουμε τις κάθετες AE και ΓZ στη $B\Delta$, που την τέμνουν στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

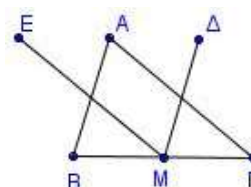
α) Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $\Gamma B Z$ είναι ίσα.

β) Το τετράπλευρο $A\Delta E Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

1535. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά BA και ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΓA . Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta A = AE$ **β)** Τα σημεία Δ , A και E είναι συνευθειακά.

γ) $\Delta E = B\Gamma$.



1538. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2A\Delta$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

β) Είναι το σημείο E μέσο της πλευράς AB ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

1539. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο E του τμήματος AO και σημείο Z του τμήματος OG , ώστε $OE = OZ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta E = BZ$

β) Το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

1557. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$ και E το μέσο της πλευράς AB . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές. **β)** Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .

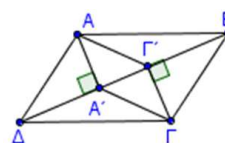
1559. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AM . Στην προέκταση της διαμέσου $M\Delta$ του τριγώνου $AM\Gamma$ θεωρούμε σημείο E ώστε $M\Delta = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Η BE διέρχεται από το μέσο της διαμέσου AM .

1600. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και A', Γ' οι προβολές των κορυφών A και Γ στη διαγώνιο $B\Delta$. Αν τα σημεία A' και Γ' δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:

- α) $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$ β) $AA' = \Gamma\Gamma'$
 γ) Το τετράπλευρο $AG'\Gamma A'$ είναι παραλληλόγραμμο.

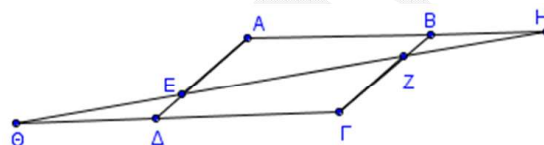


1609. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών του Δ και B τέμνουν τις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα.
 β) Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

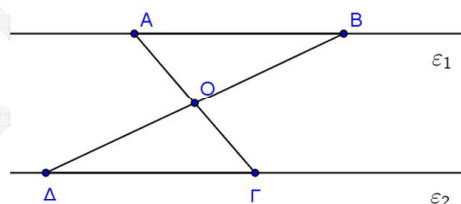
1610. Στις πλευρές $A\Delta$ και $B\Gamma$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημεία E και Z , τέτοια, ώστε $AE = \Gamma Z$. Αν η ευθεία ZE τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία H και Θ , να αποδείξετε ότι:

- α) $H\hat{B}Z = E\hat{\Delta}\Theta$ β) $B\hat{Z}H = \Delta\hat{E}\Theta$ γ) $BH = \Theta\Delta$



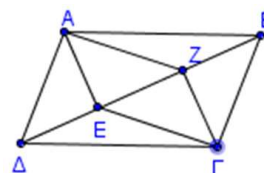
1618. Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και το σημείο O είναι το μέσο της $B\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα AOB και $\Gamma O\Delta$ είναι ίσα και να αναφέρετε τα ίσα κύρια στοιχεία τους αιτιολογώντας την απάντησή σας.
 β) το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.



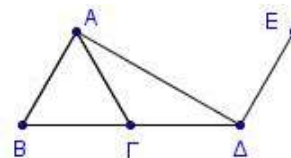
1628. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > B\Gamma$. Από τις κορυφές A και Γ φέρουμε τις κάθετες AE και ΓZ στη διαγώνιο $B\Delta$, που την τέμνουν στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) $AE = \Gamma Z$
 β) Το τετράπλευρο $A\Gamma E Z$ είναι παραλληλόγραμμο.



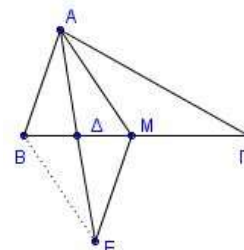
1637. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στην $A\Delta$ στο σημείο της Δ , τέτοιο, ώστε $\Delta E = B\Gamma$. (Α και E στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς τη $B\Delta$).

- α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Delta$.
 β) Να αποδείξετε ότι το $AB\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο.



1642. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο ισχύει $B\Gamma = 2AB$ και έστω M το μέσο της $B\Gamma$. Αν η $A\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου ABM και E σημείο στην προέκταση της ώστε $A\Delta = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι:

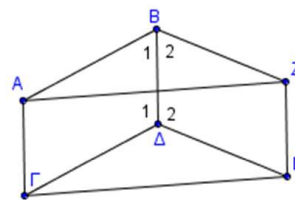
- α) Το τετράπλευρο $ABEM$ είναι παραλληλόγραμμο.
 β) $ME = M\Gamma$.



1654. Δίνονται τα παραλληλόγραμμα $AB\Delta\Gamma$ και $B\Delta EZ$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $A\Gamma EZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

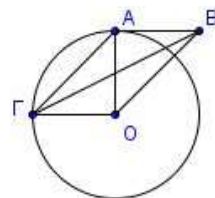
β) $\hat{A}\hat{B}Z = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}E$



1678. Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε κάθετες ακτίνες OA , OG και εφαπτόμενο στο κύκλο τμήμα AB με $AB = OG$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα AO και $B\Gamma$ διχοτομούνται.

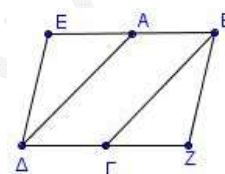
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $ABOG$.



1687. Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά BA (προς το A) και την πλευρά $\Delta\Gamma$ (προς το Γ) κατά τμήματα $AE = AB$ και $\Gamma Z = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα.

β) Το τετράπλευρο $EBZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.



1701. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $M\Delta = MA$. Από το A φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

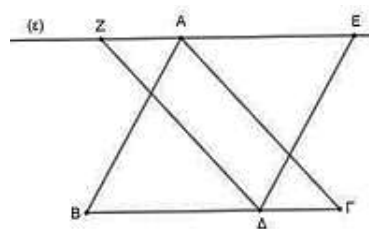
α) το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) $BM = \frac{AE}{2}$.

13755. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από την κορυφή A φέρουμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τη $B\Gamma$. Από το τυχαίο σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τις παράλληλες προς την AB και $A\Gamma$, οι οποίες τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

α) τα τετράπλευρα $ZA\Gamma\Delta$ και $AB\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμα.

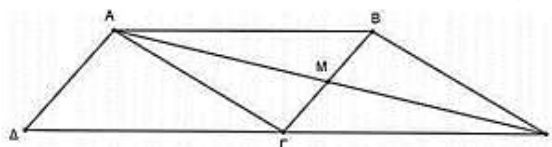
β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα.



13816. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε $A\Delta < AB$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Προεκτείνουμε την AM προς το M κατά τμήμα $ME = AM$. Να αποδείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) τα σημεία Δ , Γ και E είναι συνευθειακά.



13825. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ γράφουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο προς την BA και ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο προς την ΓA (τα σημεία Δ και E βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη $B\Gamma$ και το σημείο A). Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τετράπλευρα $A\Delta MB$ και $A\Gamma ME$ είναι παραλληλόγραμμα.

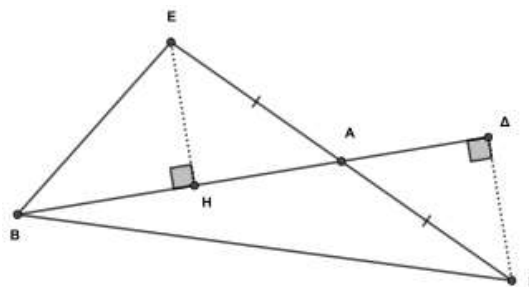
β) $\Delta A = A E$.

13833. Στο διπλανό σχήμα το $\Gamma\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$, το EH είναι ύψος του τριγώνου ABE και η BA είναι διάμεσος του τριγώνου $BE\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και AEH είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι $AH=AD$.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Gamma\Delta EH$ είναι παραλληλόγραμμο.



13829. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε τα σημεία E και Z των τμημάτων AO και ΓO αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AE=\Gamma Z$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AE\Delta$ και ΓZB είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

13834. Σε τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τη διάμεσό του AM . Προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ προς το μέρος του B κατά τμήμα $BZ=B\Gamma$ και προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma H=B\Gamma$, επίσης προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $ME=AM$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AMZ και EMH είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AHEZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

4ο Θέμα

1709. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο η εξωτερική του γωνία Γ είναι διπλάσια της εσωτερικής του γωνίας A . Από την κορυφή A διέρχεται ημιευθεία $Ax//B\Gamma$ στο ημιεπίπεδο (AB, Γ) . Στην ημιευθεία Ax θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta=B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η $B\Delta$ διέρχεται από το μέσο του τμήματος $A\Gamma$.

β) Η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της $\hat{\Gamma}_{\epsilon}$.

γ) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

1730. Έστω ότι E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ επιπλέον ισχύει $AB > A\Delta$, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{Z}\hat{\Gamma}$.

Ισχυρισμός 3: Οι ΔE και BZ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών Δ και B .

α) Στη περίπτωση που θεωρείται ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. **β)** Στη περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

1731. Έστω ότι E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ επιπλέον ισχύουν $AB > \Gamma\Delta$ και η γωνία A είναι αμβλεία, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα.

Ισχυρισμός 3: Τα τρίγωνα $\triangle A\Delta E$ και $\triangle B\Gamma Z$ είναι ισοσκελή.

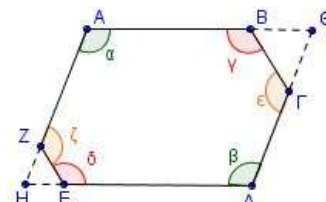
α) Στη περίπτωση που θεωρείται ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. **β)** Στη περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

1746. Στο κυρτό εξάγωνο $AB\Gamma\Delta EZ$ ισχύουν τα εξής: $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$, $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$ και $\hat{\epsilon} = \hat{\zeta}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\epsilon}$.

β) Αν οι πλευρές AZ και ΔE προεκτεινόμενες τέμνονται στο H και οι πλευρές AB και $\Delta\Gamma$ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Θ , να αποδείξετε ότι:

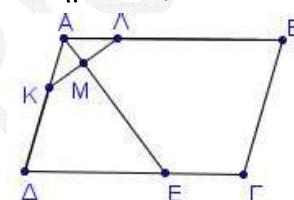
- Οι γωνίες A και H είναι παραπληρωματικές.
- Το τετράπλευρο $A\Theta\Delta H$ είναι παραλληλόγραμμο.



1785. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > AD$. Θεωρούμε σημεία K, Λ των AD και AB αντίστοιχα ώστε $AK = AL$. Έστω M το μέσο του $K\Lambda$ και η προέκταση του AM (προς το M) τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) $AD = DE$.

β) $B\Gamma + \Gamma E = AB$. **γ)** $\hat{B} = 2 \cdot \hat{A\Lambda K}$



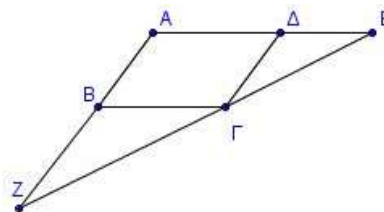
1805. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και στην προέκταση της AD θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $\Delta E = \Delta\Gamma$ ενώ στη προέκταση της AB θεωρούμε σημείο Z τέτοιο, ώστε $BZ = B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B\Gamma Z} = \hat{\Delta\Gamma E}$

ii. Τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά.

β) Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό.



<< Έχουμε: $\hat{B\Gamma Z} = \hat{\Delta\Gamma E}$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από τη ZE) και $\hat{B\Gamma Z} = \hat{\Delta\Gamma E}$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από τη $\Delta\Gamma$). Όμως $\hat{\Delta\Gamma E} + \hat{\Gamma\Delta E} + \hat{\Delta\Gamma E} = 180^\circ$ (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $\Delta E\Gamma$). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα :

$\hat{\Delta\Gamma E} + \hat{B\Gamma\Delta} + \hat{B\Gamma Z} = 180^\circ$. Οπότε τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά.>>

Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό.

1810. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M του $B\Gamma$ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο με το BA και ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο με το ΓA (τα σημεία Δ και E είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από το $B\Gamma$ και το σημείο A). Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Δ, A, E είναι συνευθειακά.

β) Η περίμετρος του τριγώνου ΜΔΕ είναι ίση με την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Όταν ένας καθηγητής έθεσε στους μαθητές του το ερώτημα αν τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά, ένας από αυτούς έκανε το παρακάτω σχήμα και απάντησε ως εξής :

$\hat{Z}_1 = \hat{A}_1$ (εντός εναλλάξ των ΑΒ//ΜΔ που τέμνονται από ΑΖ)

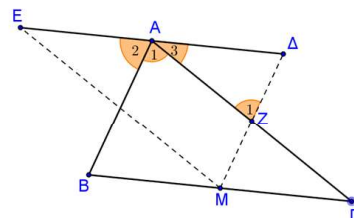
$\hat{A}\hat{\Delta}\hat{Z} = \hat{A}_2$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΑΒ//ΜΔ που τέμνονται από ΔΕ)

Όμως $\hat{Z}_1 + \hat{A}_3 + \hat{A}\hat{\Delta}\hat{Z} = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΖ).

Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε:

$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$. Οπότε Δ,Α,Ε συνευθειακά.

Όμως ο καθηγητής είπε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή;



1839. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ, Η, Θ

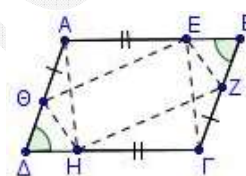
στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα, με ΑΕ=ΓΗ και

ΒΖ=ΔΘ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Τα τμήματα ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΖΘ διέρχονται από το ίδιο σημείο.



1844. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος

της γωνίας Α, για την οποία ισχύει ότι $ΑΔ = ΔΓ$.

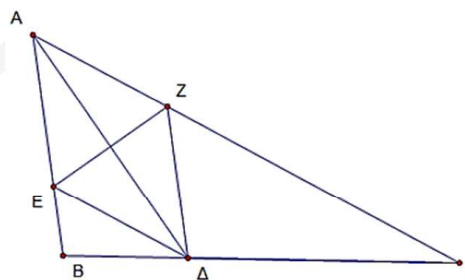
Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΔΒ και η ΔΖ

παράλληλη στην ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ΕΔ και ΑΓ είναι παράλληλα.

β) Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές.

γ) Τα τμήματα ΑΔ και ΕΖ διχοτομούνται.



1857. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΚ διχοτόμο της γωνίας Α. Στην

προέκταση της ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $ΑΚ = ΚΔ$. Η

παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει τις ΑΓ και ΒΓ στα Ε και Ζ

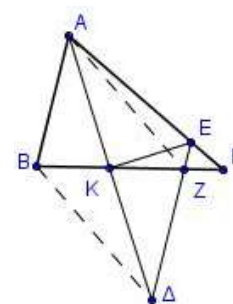
αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

β) Η ΕΚ είναι μεσοκάθετος του ΑΔ.

γ) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΚΔΖ είναι ίσα.

δ) Το τετράπλευρο ΑΖΔΒ είναι παραλληλόγραμμο.

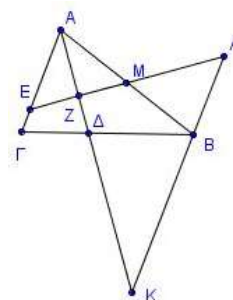


1882. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α και Μ το μέσον της ΑΒ. Η κάθετη από το Μ στην ΑΔ τέμνει το ΑΓ στο Ε.

Η παράλληλη από το Β στο ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Κ και την προέκταση της ΕΜ στο Λ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΜ, ΜΒΛ και ΑΒΚ είναι ισοσκελή.

β) Το τετράπλευρο ΑΛΒΕ είναι παραλληλόγραμμο.



13742. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M το μέσο της βάσης του $B\Gamma$. Φέρουμε

$BK \perp B\Gamma$ έτσι ώστε $BK = A\Gamma$ (το σημείο K είναι στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A).

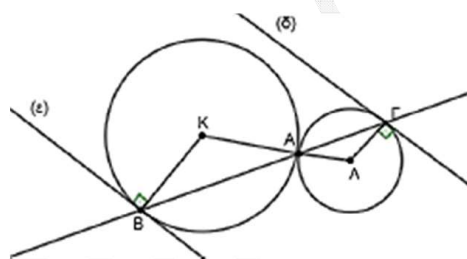
α) Να αποδείξετε ότι $AM \parallel BK$ και $AB = BK$.

β) Να δείξετε ότι η AK είναι διχοτόμος της γωνίας BAM .

γ) Να αποδείξετε ότι $\widehat{BKA} = 45^\circ - \frac{\widehat{\Gamma}}{2}$.

δ) Μπορεί το τετράπλευρο $ABKM$ να είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

13845. Οι κύκλοι (K, R) , (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Φέρουμε τυχαία ευθεία η οποία διέρχεται από το A και δεν περνάει από τα κέντρα των κύκλων, τέμνει τους κύκλους αντίστοιχα στα σημεία B και Γ . Φέρουμε τις εφαπτόμενες (ϵ) και (δ) στα σημεία B και Γ . Να αποδείξετε ότι:



α) $\widehat{KBA} = \widehat{\Lambda\Gamma A}$

β) $(\epsilon) \parallel (\delta)$.

γ) Να εξετάσετε σε ποια περίπτωση το τετράπλευρο $K\Gamma\Lambda B$ θα είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ορθογώνιο – Ρόμβος - Τετράγωνο

Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή.

- Οι διαγώνιες του ορθογωνίου είναι ίσες.
- Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο όταν:
 - (i) Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μία ορθή γωνία.
 - (ii) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του είναι ίσες.
 - (iii) Έχει τρεις γωνίες ορθές.
 - (iv) Όλες οι γωνίες του είναι ίσες.
- Κάθε παραλληλόγραμμο του οποίου οι διαγώνιες είναι ίσες, είναι ορθογώνιο.

Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

- Σε κάθε ρόμβο οι διαγώνιες του τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του.
- Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:
 - (i) Έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
 - (ii) Είναι παραλληλόγραμμο και δυο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
 - (iii) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
 - (iv) Είναι παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.
- Κάθε παραλληλόγραμμο του οποίου μια διαγώνιος διχοτομεί μια γωνία του, είναι ρόμβος.

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

- Σε κάθε τετράγωνο:
 - (i) Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.
 - (ii) Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.

(iii) Όλες οι γωνίες του είναι ορθές.

(iv) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες, τέμνονται κάθετα, διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες του.

➤ Ένα παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο, αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:

(i) Μία γωνία του είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.

(ii) Μία γωνία του είναι ορθή και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.

(iii) Μία γωνία του είναι ορθή και οι διαγώνιοί του κάθετες.

(iv) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.

(v) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και η μία διχοτομεί μία γωνία του.

(vi) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες.

Ορθογώνιο

1599. Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, αν M και N είναι τα μέσα των AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $M\Delta = M\Gamma$

β) Η ευθεία MN είναι μεσοκάθετος του τμήματος $\Gamma\Delta$.

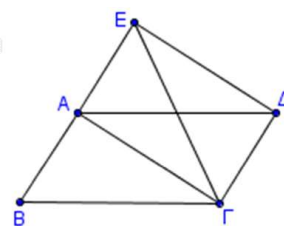
1653. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και το $A\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο A είναι μέσο του BE .

β) Το τρίγωνο $BE\Gamma$ είναι ισοσκελές.

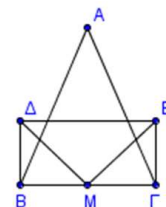
γ) $\widehat{B\Gamma A} = \widehat{A\Delta E}$



1668. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Στα σημεία B και Γ φέρουμε κάθετες στη $B\Gamma$ προς το ίδιο μέρος και θεωρούμε σε αυτές σημεία Δ και E αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $M\Delta = ME$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα.

β) Το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

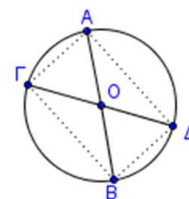


1683. Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε δύο διαμέτρους AB και $\Gamma\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι χορδές $A\Gamma$ και $B\Delta$ του κύκλου είναι ίσες.

β) Το τετράπλευρο $A\Gamma B\Delta$ είναι ορθογώνιο.



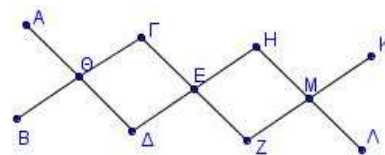
1692. Έστω ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία N και K των AB και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AN = K\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $AN\Delta$ και $B\Gamma K$ είναι ίσα.

β) το τετράπλευρο $NBK\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

4ο Θέμα

1714. Στην διπλανή εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι ίσα ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου ($A\Delta$, $B\Gamma$, ΓZ , ΔH , ZK , $H\Lambda$) που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά (A , B , Γ , Δ , Θ , E , M , H ,

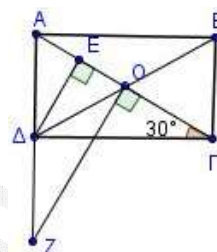


K, Λ, Ζ). Αν το σημείο Θ, είναι μέσο των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ ενώ το σημείο Ε είναι μέσο των τμημάτων ΓΖ και ΔΗ, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο.
- β) Τα σημεία Β, Δ, Ζ είναι συνευθειακά.
- γ) Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

1729. Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\widehat{\Delta \Gamma A} = 30^\circ$ και Ο το κέντρο του. Φέρουμε $\Delta E \perp A\Gamma$.

- α) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΑΔΓ χωρίζεται από τη ΔΕ και τη διαγώνιο ΔΒ σε τρεις ίσες γωνίες.
- β) Φέρουμε κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Ο η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ζ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ είναι ίσα.

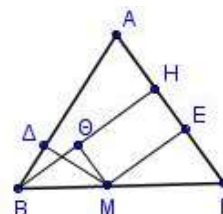


1733. Έστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δύο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο Ο και τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες.

- α) Αν M_1 είναι το συμμετρικό του Μ ως προς την ε_1 και M_2 το συμμετρικό του M_1 ως προς την ε_2 , να αποδείξετε ότι:
 - i. $OM = OM_1$.
 - ii. Τα σημεία Μ, Ο και M_2 είναι συνευθειακά.
 - iii. Το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο.
- β) Αν M_3 είναι το συμμετρικό του M_2 ως προς την ε_1 , τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $MM_1M_2M_3$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

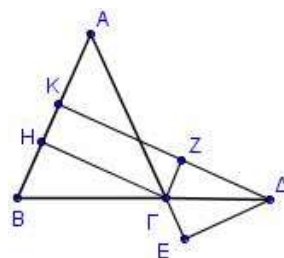
1800. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$, τυχαίο σημείο Μ της βάσης του ΒΓ και το ύψος του ΒΗ. Από το Μ φέρουμε κάθετες ΜΔ, ΜΕ και ΜΘ στις ΑΒ, ΑΓ και ΒΗ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο ΜΕΗΘ είναι ορθογώνιο.
- β) $B\Theta = \Delta M$.
- γ) $M\Delta + ME = BH$.

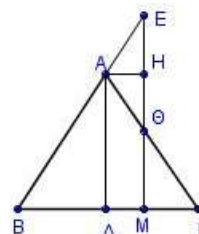


1816. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$ και σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ. Από το Δ φέρουμε ΔΚ κάθετη στην ΑΒ και ΔΕ κάθετη στην προέκταση της ΑΓ. Από το σημείο Γ φέρουμε ΓΗ κάθετη στην ΑΒ και ΓΖ κάθετη στην ΚΔ. Να αποδείξετε ότι:

- α) Η γωνία ΖΓΔ είναι ίση με τη Β.
- β) Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΖΓΕ.
- γ) Το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές
- δ) $\Delta K - \Delta E = H\Gamma$



1822. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) και τυχαίο σημείο Μ της πλευράς ΒΓ. Από το Μ φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Θ αντίστοιχα. Αν ΑΔ και ΑΗ τα ύψη των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΘΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

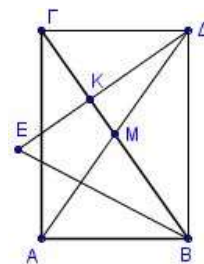


- α) $\widehat{\Delta \hat{A} H} = 90^\circ$ β) Το τρίγωνο ΑΘΕ είναι ισοσκελές γ) $M\Theta + ME = 2A\Delta$.

1833. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^\circ$. Φέρουμε τη διάμεσό του ΑΜ την οποία προεκτείνουμε, προς το μέρος του Μ, κατά τμήμα $M\Delta = AM$. Θεωρούμε ευθεία ΔΚ κάθετη στη ΒΓ, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας Β στο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι ορθογώνιο.

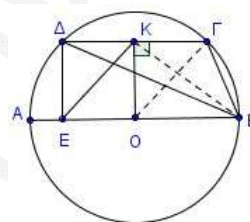
β) $\widehat{K \hat{E} B} = 90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}$ γ) $\Delta E = B\Delta$.



1879. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο ΑΒ. Φέρνουμε χορδή $\Gamma\Delta \parallel AB$ και Κ το μέσο της. Από το Δ φέρνουμε το τμήμα ΔΕ κάθετο στη ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΚΓΟΕ είναι παραλληλόγραμμο.

β) $\widehat{\Delta \hat{E} K} = \frac{\widehat{\Delta \hat{O} \Gamma}}{2}$ γ) $KE < KB$

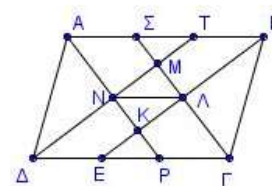


1891. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB > AD$ και οι διχοτόμοι των γωνιών του ΑΡ, ΒΕ, ΓΣ και ΔΤ (όπου Ρ, Ε στην ΔΓ και Σ, Τα στην ΑΒ) τέμνονται στα σημεία Κ, Λ, Μ και Ν όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο.

β) το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο.

γ) $\Lambda N \parallel AB$ δ) $\Lambda N = AB - AD$



13523. Ο χαρταετός του σχήματος είναι ένα εξάγωνο με ίσες πλευρές και ίσες γωνίες.

α) Να αποδείξετε ότι $AE = B\Delta$.

β) Να αποδείξετε ότι $AE \perp E\Delta$.

γ) i. Αν οι ΑΔ και ΒΕ τέμνονται στο Ο, τότε να αποδείξετε ότι $2BO = A\Delta$.

ii. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι υπάρχει κύκλος με διάμετρο ισχυρισμό του;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



13746. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Στην προέκταση της διαμέσου ΑΔ προς το Δ παίρνουμε σημείο Ε, έτσι ώστε $A\Delta = \Delta E$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΓΔ είναι ίσα.

ii. Η διάμεσος ΑΔ είναι μικρότερη από το ημιάθροισμα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ που την περιέχουν.

β) Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ το διπλάσιο της διαμέσου ΑΔ ισούται με την πλευρά ΒΓ, να χαρακτηρίσετε το είδος του τετράπλευρου ΑΒΕΓ και το είδος του τριγώνου ΑΒΓ και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Ρόμβος

1570. Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του AD .

Προεκτείνουμε το AD (προς το Δ) κατά τμήμα $DE = AD$. Έστω K το συμμετρικό του B ως προς το Δ . Να αποδείξετε ότι:

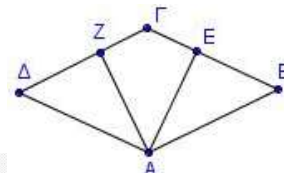
α) Το τρίγωνο ABK είναι ισοσκελές. **β)** Το τετράπλευρο $ABEK$ είναι ρόμβος.

1575. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι $AE \perp B\Gamma$ και $AZ \perp \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, τότε $AZ = AE$.

β) Αν για το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει

$AZ = AE$, τότε αυτό είναι ρόμβος.



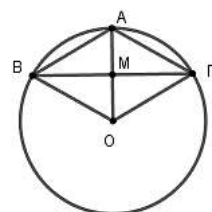
1584. Σε κύκλο κέντρου O , έστω OA μια ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της OA που τέμνει τον κύκλο στα σημεία B και Γ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο OBA είναι ισόπλευρο. **β)** Το τετράπλευρο $OBA\Gamma$ είναι ρόμβος.

1679 (Ίδια με την 1584). Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε την ακτίνα OA και τη χορδή $B\Gamma$ κάθετη στην OA στο μέσο της M .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Gamma OB$ είναι ρόμβος.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $A\Gamma OB$.

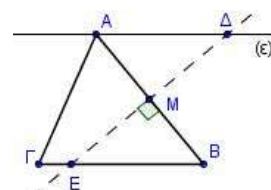


1630. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρουμε από την κορυφή A ευθεία (ϵ) παράλληλη στη $B\Gamma$. Η μεσοκάθετος της πλευράς AB τέμνει την (ϵ) στο Δ και την $B\Gamma$ στο E .

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta A = \Delta B$ και $EA = EB$.

β) Αν M το μέσο του AB , να συγκρίνετε τα τρίγωνα $AM\Delta$ και EMB .

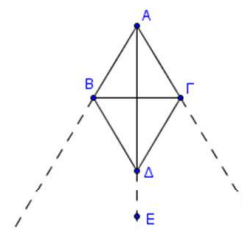
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta BE$ είναι ρόμβος.



1681. Δίνεται ρόμβος $AB\Delta\Gamma$. Στην προέκταση της διαγωνίου $A\Delta$ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) Το E ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ (προς το μέρος των B και Γ αντίστοιχα).

β) Το σημείο E ισαπέχει από τα σημεία B και Γ .

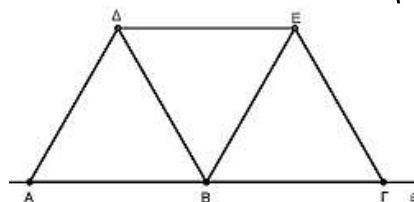


13767. Σε ευθεία ϵ θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία A, B και Γ έτσι ώστε $AB = B\Gamma$. Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ϵ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\Delta BE}$.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισόπλευρο.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta EB$ είναι ρόμβος.

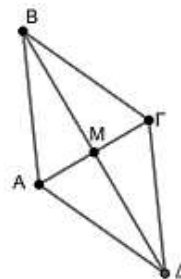


13832. Στο σχήμα το M είναι μέσο των τμημάτων $A\Gamma$ και $B\Delta$. Επίσης $\widehat{AMB} = \widehat{ΓMB}$.

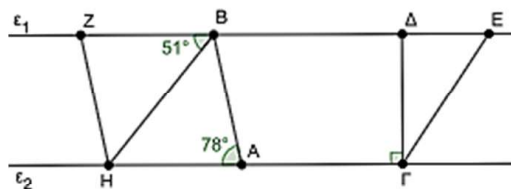
α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες.
- ii. Το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

β) Το ΑΒΓΔ είναι η κάτοψη ενός κήπου. Για να περιφράξουμε τον κήπο χρειαζόμαστε 30 μέτρα φράχτη. Αν αφήσουμε την πλευρά ΑΒ του κήπου χωρίς φράχτη πόσα μέτρα φράχτη θα χρειαστούμε για τις υπόλοιπες πλευρές;



13842. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΖΗ είναι ρόμβος. Επίσης δίνονται οι γωνίες $\widehat{BAH} = 70^\circ$, $\widehat{ZBH} = 51^\circ$ και η $\widehat{A\Gamma\Delta}$ είναι ορθή.



α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{ABH}$.

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες.

γ) Αν η γωνία Ε του τριγώνου ΓΔΕ είναι ίση με 56° , να υπολογίσετε τη γωνία Γ του τριγώνου ΓΔΕ.

4ο Θέμα

1740. Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

Π2: Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις Π1 και Π2 αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

β) Στην περίπτωση που οι δύο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση.

1840. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημεία Κ, Λ της διαγωνίου του ΒΔ, τέτοια, ώστε να ισχύει $BK = KL = LD$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε και το ΑΚΓΛ είναι ρόμβος.

γ) Ποια πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, ώστε το ΑΚΓΛ να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

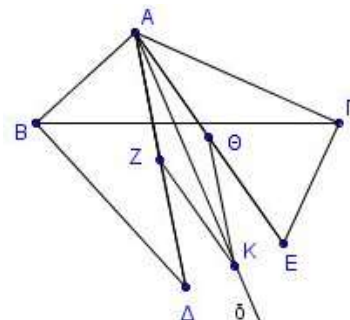
1869. Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AG$ και

$\widehat{A} > 90^\circ$. Φέρνουμε τμήμα ΒΔ κάθετο στην ΑΒ και με $BD = AG$ και τμήμα ΓΕ κάθετο στην ΑΓ με $GE = AB$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ και Θ των ΑΔ και ΑΕ καθώς και τη διχοτόμο Αδ της γωνίας $\widehat{DAE}$.

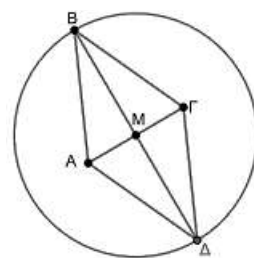
α) Να αποδείξετε ότι $AD = AE$.

β) Αν Κ τυχαίο σημείο της διχοτόμου Αδ, να αποδείξετε ότι το Κ ισαπέχει από τα μέσα Ζ και Θ.

γ) Αν το Κ είναι σημείο της διχοτόμου Αδ τέτοιο, ώστε $KZ = AZ$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΚΘ είναι ρόμβος.



13857.α) Στο σχήμα η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ και διάμετρος του κύκλου με κέντρο Μ. Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

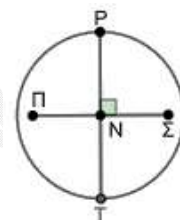


β) Χαρακτηρίστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως αληθή ή ψευδή. Πρόταση 1: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι μεσοκάθετος της άλλης διαγωνίου και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

Πρόταση 2: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι κάθετη στην άλλη διαγώνιο και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

γ) Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΡΤ και ΠΣ τέμνονται κάθετα στο Ν και ΠΝ = ΝΣ. Επίσης η ΡΤ είναι διάμετρος του κύκλου με κέντρο το Ν. Να αποδείξετε ότι ΠΡ = ΡΣ = ΣΤ = ΤΠ.



Τετράγωνο

1643. Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των ΑΒ (προς το Β) και ΒΓ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε $BE = \Gamma Z$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ είναι ίσα. **β)** Οι γωνίες ΕΔΓ και ΑΖΒ είναι ίσες.

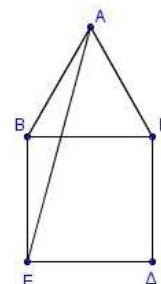
1651. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο ΒΓΔΕ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες

i. $\hat{A}\hat{B}E$

ii. $\hat{B}\hat{E}A$

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

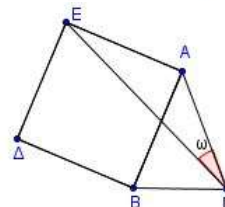


1652. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = \Gamma\Gamma$.

Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο ΑΒΔΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές.

β) $2\hat{E}\hat{\Gamma}A = 90^\circ - \hat{B}\hat{A}\Gamma$.



1662. Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε τις διαμέτρους του ΑΓ και ΒΔ.

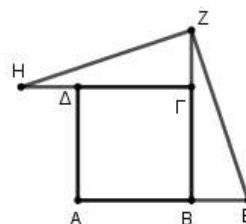
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

β) Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι διαμέτροι ΑΓ και ΒΔ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

13536. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ προς το Β, ΒΓ προς το Γ και ΓΔ προς το Δ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ και Η αντίστοιχα, ώστε $BE = \Gamma Z = \Delta H$.

α) Να αποδείξετε ότι $ZE = ZH$.

β) Να αποδείξετε ότι $\hat{E}\hat{Z}H = 90^\circ$

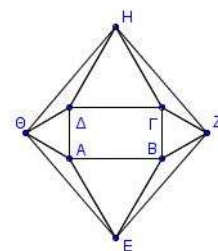


4ο Θέμα

1734. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα ABE , $B\Gamma Z$, $\Gamma\Delta H$, $\Delta A\Theta$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι ρόμβος.

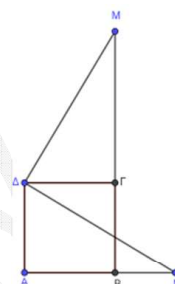
β) Αν το αρχικό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, τότε το $EZH\Theta$ τι είδους παραλληλόγραμμο είναι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



1750. Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε την πλευρά AB κατά τμήμα BN και την πλευρά $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma M = AN$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta N = \Delta M$

β) $\Delta N \perp \Delta M$

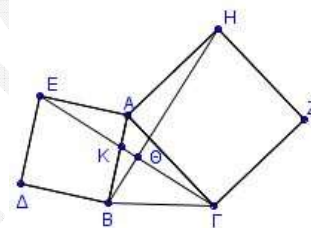


1788. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma ZH$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{EAH} = \widehat{AB\Gamma} + \widehat{A\Gamma B}$

β) $E\Gamma = BH$

γ) Η $E\Gamma$ είναι κάθετη στη BH .

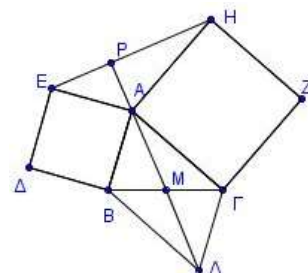


1795. Εκτός τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma ZH$. Αν M το μέσο του $B\Gamma$ και Λ σημείο στην προέκταση της AM τέτοιο, ώστε $AM = M\Lambda$, να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\Lambda = AE$.

β) $\widehat{A\Gamma\Lambda} = \widehat{EAH}$.

γ) Η προέκταση της MA (προς το A) τέμνει κάθετα την EH .

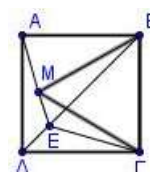


1814. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο $MB\Gamma$. Αν η προέκταση της AM τέμνει τη $B\Delta$ στο σημείο E , να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{\Delta AE} = 15^\circ$.

β) Τα τρίγωνα ΔAE και $\Delta E\Gamma$ είναι ίσα.

γ) Η ΓE είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\Gamma M$.

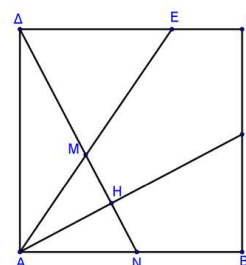


1825. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και τυχαίο σημείο E στην πλευρά $\Delta\Gamma$. Φέρουμε τη διχοτόμο AZ της γωνίας EAB και τη ΔH κάθετη από το Δ προς την AZ , η οποία τέμνει την AE στο M και την AB στο N . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $\Delta\Delta N$ και ABZ είναι ίσα.

β) $AM = AN$ και $\Delta E = EM$.

γ) $AE = \Delta E + BZ$



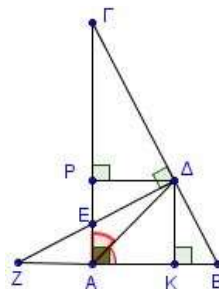
1894. Σε ορθογώνιο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρουμε τη διχοτόμο του Δ .

Έστω K και P οι προβολές του Δ στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Η κάθετη της $B\Gamma$ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο E και την προέκταση της πλευράς AB (προς το A) στο σημείο Z .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $\hat{B} = \Delta \hat{E} \Gamma$ ii. $\Delta E = \Delta B$

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta \Gamma Z$.



13744. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στις προεκτάσεις των πλευρών του AB και $B\Gamma$ προς το B και προς το Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα σημεία E και Z τέτοια ώστε $BE = \Gamma Z$. Αν P είναι το σημείο τομής των AZ και ΔE , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Οι γωνίες $\hat{A} \hat{E} \Delta$ και $\hat{B} \hat{Z} A$ είναι ίσες ii. Τα τμήματα AZ και ΔE είναι κάθετα.

β) Αν γνωρίζετε ότι το σημείο τομής P των AZ και ΔE είναι τέτοιο ώστε $PB = AB$, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου E στην προέκταση του τμήματος AB .

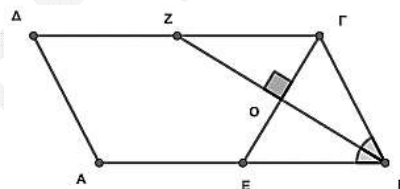
13850. Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος και η BZ διχοτόμος της γωνίας B . Φέρουμε ΓO κάθετη στη BZ και την προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την AB στο σημείο E .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $OZ\Gamma$ και OBE είναι ίσα.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EB\Gamma Z$ είναι ρόμβος

δ) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας B ώστε το τετράπλευρο $EB\Gamma Z$ να είναι τετράγωνο;



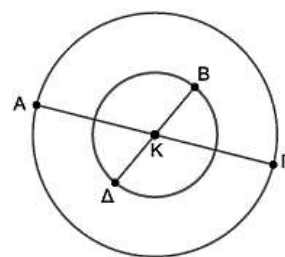
13848. Στο διπλανό σχήμα οι κύκλοι έχουν κέντρο K και οι $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι διαμέτροί τους.

α) Αν ισχύει $A\Gamma > B\Delta$:

- i. να σχεδιάσετε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και να αποδείξετε ότι είναι παραλληλόγραμμο.

- ii. να διατυπώσετε μια επιπλέον υπόθεση για τις $A\Gamma$ και $B\Delta$, ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι ρόμβος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Αν οι δύο κύκλοι ταυτίζονται, τότε να εξετάσετε αν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι αληθής: «Το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο». Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



13841. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, $B\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας B και M το μέσο της. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Αν η EM τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο Z τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $BE = EA$

β) Να αποδείξετε ότι $BE \parallel Z\Delta$.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEBZ είναι ρόμβος.

δ) Ποιο θα έπρεπε να είναι το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ώστε το τετράπλευρο ΔEBZ να είναι τετράγωνο; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.