

Εφαρμογές των παραλληλογράμμων

- 1) Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου, είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.
- 2) Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς
- 3) Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.
- 4) Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δυο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 είναι μία ευθεία ε παράλληλη προς τις ε_1 και ε_2 , η οποία διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις δυο παράλληλες. Η ευθεία ε λέγεται μεσοπαράλληλος των ε_1 και ε_2 .
- 5) Το σημείο στο οποίο τέμνονται οι διάμεσοι ενός τριγώνου λέγεται βαρύκεντρο του.
- 6) Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.
- 7) Οι παράλληλες που άγονται από τις κορυφές ενός τριγώνου προς τις απέναντι πλευρές του, σχηματίζουν τρίγωνο, το οποίο έχει ως μέσα των πλευρών του τις κορυφές του αρχικού τριγώνου.
- 8) Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Ορθογώνιο τρίγωνο

- 9) Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας, είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.
- 10) Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.
- 11) Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30° , τότε η απέναντι κάθετη πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντιστρόφως.

Τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου

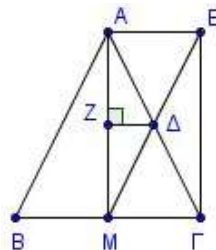
1542. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας A . Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την AB που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο. β) $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$

1560. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και η διάμεσός του AM . Στην προέκταση της διαμέσου $M\Delta$ του τριγώνου $AM\Gamma$ θεωρούμε σημείο E ώστε $M\Delta = \Delta E$. Αν το σημείο Z είναι η προβολή του Δ στην AM , να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι ορθογώνιο.

β) $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{4}$.



1566. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ , E και Z των πλευρών του AB , $B\Gamma$ και ΓA αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

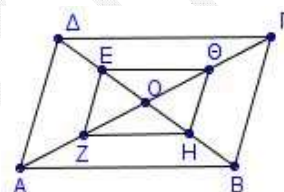
α) Το τετράπλευρο ΔBEZ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Η ευθεία ΔZ διχοτομεί το τμήμα AE .

1583. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O είναι το κέντρο του. Έστω E , Z , H , Θ τα μέσα των OD , OA , OB και OG αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι 40, να βρείτε τη περίμετρο του $EZH\Theta$.

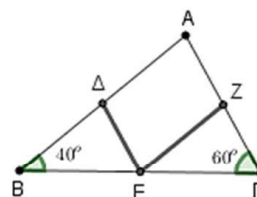


1589. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 40^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Επιπλέον τα σημεία Δ , E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB , $B\Gamma$ και ΓA αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία A του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel A\Gamma$ και $ZE \parallel AB$.

γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta E$.

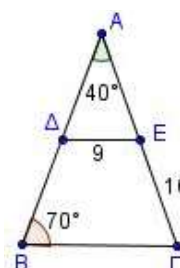


1608. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 40^\circ$ και $\hat{B} = 70^\circ$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των AB και $A\Gamma$ με $\Delta E = 9$ και $E\Gamma = 16$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.

β) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 18$.

γ) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.



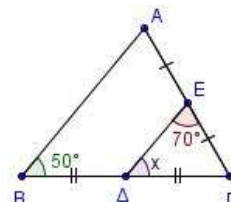
1611. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 50^\circ$. Έστω ότι τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $\hat{\Delta E\Gamma} = 70^\circ$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί $\Delta E \parallel AB$.

β) Να υπολογίσετε

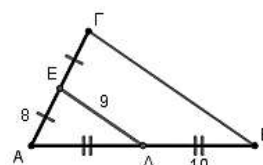
i. τη γωνία $\hat{x}$.

ii. τις γωνίες A και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.



1613. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος τα σημεία Δ και τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, $AE = 8$, $E\Delta = 9$ και $\Delta B = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι οι $B\Gamma$ και ΔE είναι παράλληλες.



β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ.

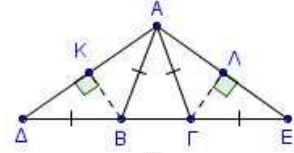
γ) Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου ΑΒΓ και του τετραπλεύρου ΔΕΓΒ.

1616. Στο διπλανό σχήμα ισχύουν $AB = BD = AG = GE = 5$, $BK \perp AD$ και $GL \perp AE$.

α) Να προσδιορίσετε ως προς τις πλευρές, το είδος των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΕ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα.

γ) Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα ΚΛ.

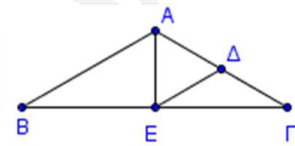


1686. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$ και $\hat{B} = 30^\circ$.

Θεωρούμε Δ και Ε τα μέσα των ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.



12639. Από το μέσο Μ της διαμέσου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ, φέρουμε παράλληλη στην ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Αν η παράλληλη από το Δ στην ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

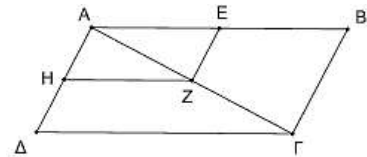
α) το Ζ είναι μέσο της ΑΓ

β) το ΑΕ ισούται με το 1/4 του ΑΓ.

13532. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε, Ζ και Η των ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $ZH = \frac{AB}{2}$.

β) Το τετράπλευρο ΑΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.



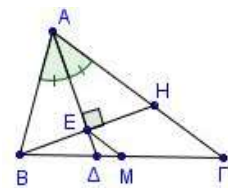
4ο Θέμα

1723. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ($AB < AG$) και η διχοτόμος του ΑΔ.

Φέρουμε από το Β κάθετη στην ΑΔ που τέμνει την ΑΔ στο Ε και την πλευρά ΑΓ στο Η. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές.

β) $EM \parallel HG$ γ) $EM = \frac{AG - AB}{2}$



1726. α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές.

β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για

i. ισόπλευρο τρίγωνο.

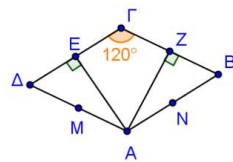
ii. ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

1741. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Κ,Λ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ στο εσωτερικό του τριγώνου και Δ,Ε τα συμμετρικά του Μ ως προς Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $DE \parallel BG$.

β) Στη περίπτωση που το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $BΓ$, και Δ, E τα συμμετρικά του M ως προς K και Λ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, A και E είναι συνευθειακά.

1743. Δίνεται ρόμβος $ABΓΔ$ με $\hat{\Gamma} = 120^\circ$. Έστω AE και AZ οι αποστάσεις του σημείου A από τις πλευρές $ΓΔ$ και $ΓB$ αντίστοιχα.

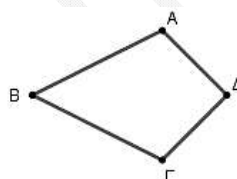


α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών $ΓΔ$ και $ΓB$ αντίστοιχα.
- ii. $AG \perp EZ$

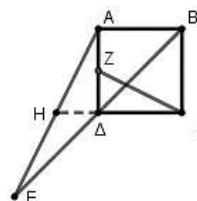
β) Αν M και N τα μέσα των πλευρών AD και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EMNZ$ είναι ορθογώνιο.

1745. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $ABΓΔ$ με $BA = BΓ$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.
Να αποδείξετε ότι:



- α) Το τρίγωνο $AΔΓ$ είναι ισοσκελές.)
- β) Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου $ABΓΔ$ τέμνονται κάθετα.
- γ) Το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του $ABΓΔ$ είναι ορθογώνιο.

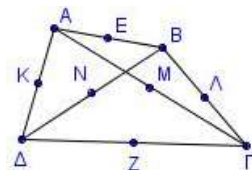
1766. Δίνεται τετράγωνο $ABΓΔ$. Έστω E το συμμετρικό σημείο του B ως προς το Δ και Z είναι το μέσο της $AΔ$. Η προέκταση της $ΓΔ$ τέμνει την AE στο H . Να αποδείξετε ότι:



- α) $\Delta H = \frac{AB}{2}$ β) Τα τρίγωνα $AΔH$ και $ZΔΓ$ είναι ίσα.

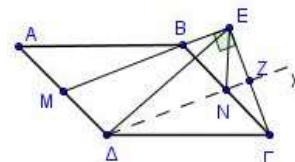
γ) Η $ΓZ$ είναι κάθετη στην AE .

1773. Δίνεται τετράπλευρο $ABΓΔ$ με $AD = BΓ$. Αν E, Λ, Z, K, N, M είναι τα μέσα των $AB, BΓ, ΓΔ, ΔA, ΔB$ και $AΓ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



- α) Το τετράπλευρο $EMZN$ είναι ρόμβος.
- β) Η EZ είναι μεσοκάθετος του τμήματος MN .
- γ) $KE = Z\Lambda$
- δ) Τα τμήματα $K\Lambda, MN, EZ$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

1775. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$. Θεωρούμε το μέσο M της πλευράς AD και $ΓE$ κάθετος από τη κορυφή $Γ$ στην ευθεία MB ($ΓE \perp MB$). Η παράλληλη από την κορυφή Δ στην ευθεία MB ($\Delta x \parallel MB$) τέμνει τις $BΓ$ και $ΓE$ στα σημεία N, Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- α) Το τετράπλευρο $MBNΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β) Το σημείο Z είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος $ΓE$.
- γ) $\Delta E = \Delta Γ$.

1794. α) Σε ορθογώνιο $ABΓΔ$ θεωρούμε K, Λ, M, N τα μέσα των πλευρών του $AB, BΓ, ΓΔ, ΔA$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος.

β) Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ τα μέσα K, Λ, M, N των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ πρέπει απαραίτητα να είναι ορθογώνιο; Να τεκμηριώσετε τη θετική ή αρνητική σας απάντηση.

1798. α) Σε ρόμβο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε K, Λ, M, N τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda M N$ είναι ορθογώνιο.

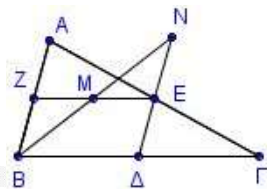
β) Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου.

1801. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και Δ, E, Z τα μέσα των πλευρών του $B\Gamma, A\Gamma, AB$ αντίστοιχα. Αν η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει τη ZE στο σημείο M και την προέκταση της ΔE στο σημείο N , να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ZE\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Τα τρίγωνα BZM και MEN είναι ισοσκελή.

γ) $BZ + NE = \Delta\Gamma$

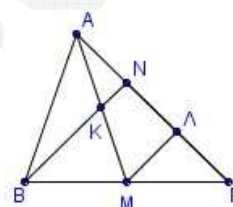


1802. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, AM διάμεσός του και K το μέσο του AM . Αν η προέκταση της BK τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο N , και Λ είναι το μέσο του ΓN , να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο N είναι μέσο του $A\Lambda$.

β) $K\hat{M}\Gamma = M\hat{B}K + A\hat{K}N$

γ) $BK = 3KN$

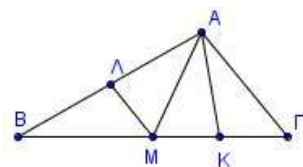


1803. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 2A\Gamma$. Έστω AM διάμεσος του $AB\Gamma$ και K, Λ τα μέσα των $M\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $M\hat{A}\Gamma = A\hat{M}\Gamma$.

β) $M\Lambda = MK$.

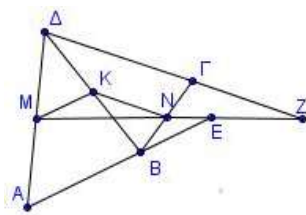
γ) Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας ΛAK .



1804. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = \Gamma\Delta$ και M, N, K τα μέσα των $A\Delta, B\Gamma, B\Delta$ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των $AB, \Delta\Gamma$ τέμνουν την προέκταση της MN στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $MK = KN$

β) $M\hat{E}A = M\hat{Z}\Delta$

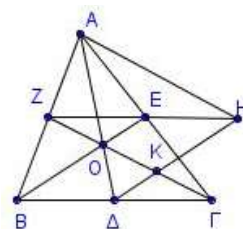


1820. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και οι διάμεσοί του $A\Delta, BE$ και ΓZ . Προεκτείνουμε το τμήμα ZE (προς το E) κατά τμήμα $EH = ZE$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $EH\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Η περίμετρος του τριγώνου $A\Delta H$ είναι ίση με το άθροισμα των διαμέσων του τριγώνου $AB\Gamma$.

γ) Οι ευθείες BE και ΔH τριχοτομούν το τμήμα $Z\Gamma$.



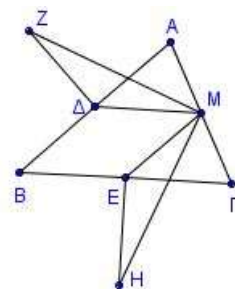
1832. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με τις γωνίες B και Γ οξείες και Δ, M και E τα μέσα των πλευρών του $AB, A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Στις μεσοκάθετες των AB και $B\Gamma$ και εκτός του

τριγώνου $AB\Gamma$ θεωρούμε σημεία Z και H αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $\Delta Z = \frac{AB}{2}$ και $EH = \frac{B\Gamma}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Το τετράπλευρο $B\Delta ME$ είναι παραλληλόγραμμο.
- ii. Τα τρίγωνα $Z\Delta M$ και EMH είναι ίσα.

β) Αν τα σημεία Z, Δ, E είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 90^\circ$.

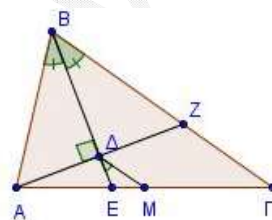


1837. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < B\Gamma$ και η διχοτόμος BE της γωνίας B . Αν $AZ \perp BE$, όπου Z σημείο της $B\Gamma$ και M το μέσον της AG , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές.

β) $\Delta M \parallel B\Gamma$ και $\Delta M = \frac{B\Gamma - AB}{2}$.

γ) $\hat{E\Delta M} = \frac{\hat{B}}{2}$, όπου B η γωνία του τριγώνου.



1873. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με διάμεσο AM τέτοια, ώστε $AM = AB$. Φέρνουμε το ύψος του AK και το προεκτείνουμε (προς το K) κατά τμήμα $K\Delta = AK$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά τμήμα $ME = M\Delta$.

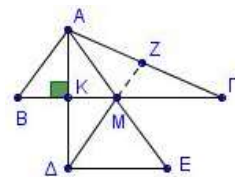
Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta E \perp A\Delta$ και $\Delta E = 2KM$.

β) Το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Το τετράπλευρο $AB\Delta M$ είναι ρόμβος.)

δ) Η προέκταση της ΔM τέμνει το AG στο μέσον του Z .



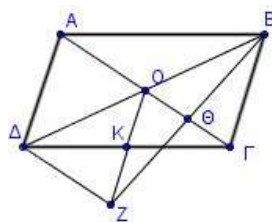
1877. Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με O το σημείο τομής των διαγωνίων του και K το μέσο του $\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε το τμήμα OK κατά τμήμα $KZ = KO$. Η BZ τέμνει τη διαγώνιο AG στο Θ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα OG και BZ διχοτομούνται.

β) $AO = \Delta Z$

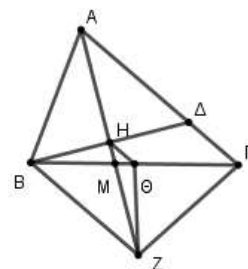
γ) Τα τρίγωνα AOB και $\Delta Z\Gamma$ είναι ίσα.



1889. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Από το B φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο AM της γωνίας A , η οποία τέμνει την AM στο H και την AG στο Δ . Στην προέκταση της AH θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $AH = HZ$ και έστω Θ το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι ρόμβος.

β) $H\Theta \parallel BZ$. **γ)** $H\Theta = \frac{A\Gamma - AB}{2}$



1898. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AD . Έστω E, Z και H τα μέσα των $B\Delta$, $A\Delta$ και AG αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.
 β) Να βρείτε τη σχέση των πλευρών ΑΒ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε το παραλληλόγραμμο ΔΕΖΗ να είναι ρόμβος.
 γ) Στην περίπτωση που το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο (η γωνία Β ορθή), να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου ΔΕΖΗ.

13743. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ στην πλευρά ΑΒ. Από το Μ φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Δ.

- α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{\Delta\hat{M}\Gamma} = \widehat{B\hat{\Gamma}M}$.
 β) Αν το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Μ στην ΑΒ ώστε το τρίγωνο ΔΜΓ να είναι ισοσκελές με $\Delta\hat{M} = \Delta\hat{\Gamma}$ και να δικαιολογήσετε τους ισχυρισμούς σας.
 γ) Αν Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ και Ε το μέσο του τμήματος ΒΓ να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΜΔΕΒ είναι παραλληλόγραμμο.

13745. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, το μέσο Μ της βάσης ΒΓ και τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στη βάση του.

- α) Αν από το μέσο Μ φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:
 i. $ME = MZ$.
 ii. Το ΑΕΜΖ είναι ρόμβος με περίμετρο ίση με 2ΑΒ.
 β) Αν πάρουμε τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ, διαφορετικό από το μέσο Μ, και φέρουμε τις παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα, τότε:
 i. Ποιο είναι το είδος του τετράπλευρου ΑΚΔΛ;
 ii. Να συγκρίνετε την περίμετρο του τετράπλευρου ΑΚΔΛ με την περίμετρο του ρόμβου ΑΕΜΖ του ερωτήματος α ii) και να διατυπώστε λεκτικά το συμπέρασμα που προκύπτει.

13856. Σε τρίγωνο ΔΕΖ, φέρουμε τη διάμεσο ΔΜ και στην προέκτασή της προς το μέρος του Μ παίρνουμε σημείο Θ έτσι ώστε $AM = M\Theta$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΕΖ προς το Ε κατά τμήμα $EA = EZ$ και προς το Ζ κατά τμήμα $Z\Gamma = EZ$.

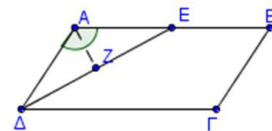
- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΑΜ και ΘΓΜ είναι ίσα.
 β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΘΑΔΓ είναι παραλληλόγραμμο.
 γ) Στο σχήμα της άσκησης που κατασκεύασε στο τετράδιό του ο Γιάννης είναι $AD = 12$. Πόσο θα είναι το μήκος της διαμέσου ΕΗ του τριγώνου ΔΕΖ στο σχήμα του Γιάννη;

Διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου – θεώρημα 30°

1537. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την πλευρά ΔΑ (προς το Α) κατά τμήμα $AH = DA$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ η οποία τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές.
 β) Το τρίγωνο ΔΖΗ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Ζ.

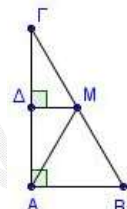
1543. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = 120^\circ$ και $AB = 2AD$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα AZ στη DE . Να αποδείξετε ότι:



- α) $\hat{A}\hat{D}E = 30^\circ$ β) $AZ = \frac{AB}{4}$

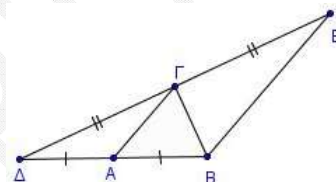
1548. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Gamma = 8\text{ cm}$. Έστω

AM η διάμεσος του τριγώνου και $M\Delta \perp A\Gamma$. Αν $\hat{A}\hat{M}\Gamma = 120^\circ$, τότε:



- α) Να δείξετε ότι $AB = 4\text{ cm}$.
β) Να βρείτε το μήκος της $M\Delta$.

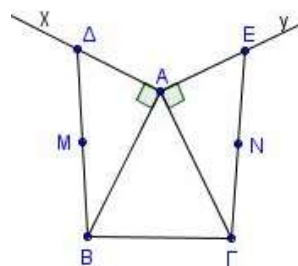
1551. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στην προέκταση της BA (προς το A) παίρνουμε σημείο Δ ώστε $AB = A\Delta$ και στη προέκταση της $\Delta\Gamma$ (προς το Γ) παίρνουμε σημείο E ώστε $\Delta\Gamma = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο $\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο.

β) $BE \parallel A\Gamma$ και $A\Gamma = \frac{BE}{2}$

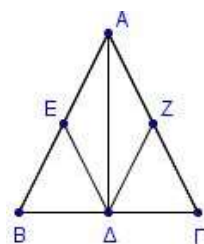
1555. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Φέρουμε εκτός του τριγώνου τις ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$. Στις Ax και Ay θεωρούμε τα σημεία Δ και E αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = AE$.



α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

β) Αν M και N τα μέσα των τμημάτων $B\Delta$ και ΓE αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AMN είναι ισοσκελές.

1564. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), το ύψος του $A\Delta$ και τα μέσα E και Z των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα $B\Delta E$ και $\Gamma\Delta Z$ είναι ίσα.

β) Το τετράπλευρο $AZ\Delta E$ είναι ρόμβος.

1567. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Θεωρούμε το ύψος του $A\Delta$ και το μέσο Z της πλευράς $A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$.

β) Προεκτείνουμε το ύψος $A\Delta$ (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα ΔE . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισόπλευρο.

1631. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

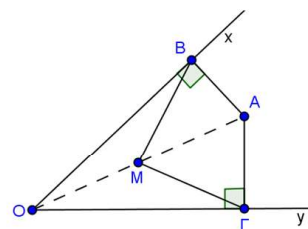
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

β) Αν η πλευρά $B\Gamma = 2\text{ cm}$, να βρείτε το μήκος της AB .

1586. Δίνεται γωνία $\alpha O\gamma$ και σημείο A στο εσωτερικό της. Από το A φέρνουμε τις κάθετες AB , AG προς τις πλευρές Ox , Oy της γωνίας αντίστοιχα και ονομάζουμε M το μέσο του OA . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο BMA είναι ισοσκελές.

β) Το τρίγωνο BMG είναι ισοσκελές. γ) $\widehat{BMA} = 2 \times \widehat{OA}$.

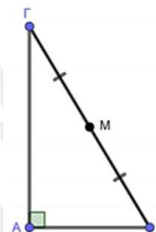


1606. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) με $\widehat{B} = 2\widehat{\Gamma}$ και M το μέσο της $B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες B και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές.

γ) Να βρείτε τη γωνία $AM\Gamma$.

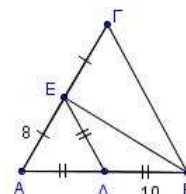


1614. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = \Delta E = \Delta B$ με $AE = 8$ και $\Delta B = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο.

β) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 20$.

γ) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

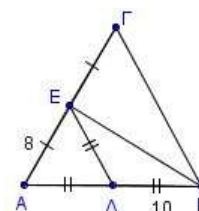


1615. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = \Delta E = \Delta B$ με $AE = 8$ και $\Delta B = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

γ) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

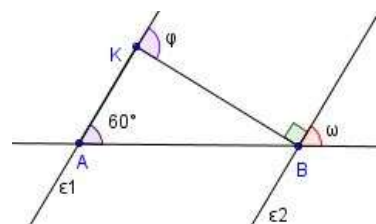


1619. Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και $AB = 6$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ .

β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ABK ως προς τις γωνίες του.

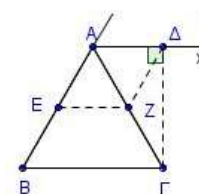
γ) Να υπολογίσετε το μήκος της AK , αιτιολογώντας την απάντησή σας.



1625. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο Ax της γωνίας A και από το σημείο Γ την κάθετο $\Gamma\Delta$ στην Ax . Τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $AZ\Delta$ είναι ισόπλευρο.

β) το τετράπλευρο $A\Delta ZE$ είναι ρόμβος.

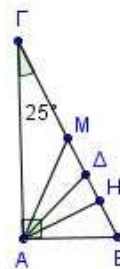


1647. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{B} = 35^\circ$ και M το μέσο της $B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία Γ .

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AMB .

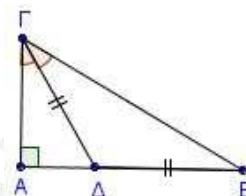
1633. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 25^\circ$. Δίνονται επίσης η διάμεσος AM , το ύψος AH από την κορυφή A και η διχοτόμος AD της γωνίας A .



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{AMB}$, $\hat{AHB}$, $\hat{ADB}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\hat{MAD} = \hat{DAH} = 20^\circ$.

1638. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ , έτσι ώστε $\Gamma\Delta = \Delta B = 2\text{ cm}$.



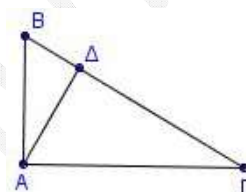
Να αποδείξετε ότι: **α)** $\hat{B} = 30^\circ$. **β)** $AB = 3\text{ cm}$

1649. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $2\hat{\Gamma} = \hat{B}$ και AD το ύψος του.

α) Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να υπολογιστεί η γωνία $\hat{BAD}$.

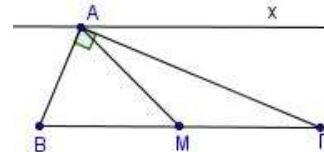
γ) Να αποδείξετε ότι: $B\Delta = \frac{AB}{2}$.



1655. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρουμε ημιευθεία Ax παράλληλη στη $B\Gamma$ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η AM με το σημείο Γ). Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{MAG} = \hat{MGA}$

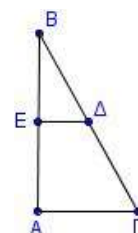
β) η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας MAx .



1671. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$. Αν τα σημεία E και Δ είναι τα μέσα των AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα με $E\Delta = 1$, να υπολογίσετε τα τμήματα:

α) $A\Gamma$ **β)** $B\Gamma$ **γ)** $A\Delta$

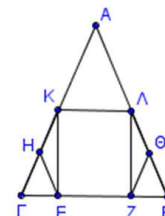
Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



1675. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Από τα μέσα K και Λ των πλευρών $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα KE και ΛZ στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $KE\Gamma$ και ΛZB είναι ίσα.

β) $EH = Z\Theta$, όπου H, Θ τα μέσα των τμημάτων $K\Gamma, \Lambda B$ αντίστοιχα.



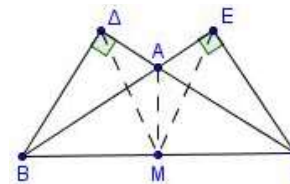
1680. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} > 90^\circ$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ προς το A φέρουμε τμήματα $B\Delta$ και ΓE κάθετα στις $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

β) Αν M το μέσο της $B\Gamma$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $M\Delta = ME$

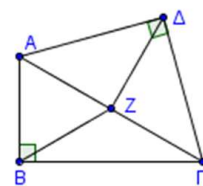
ii. Να αποδείξετε ότι η AM διχοτομεί τη γωνία ΔME .



1685. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 90^\circ$ και Z το μέσο του $A\Gamma$. Με υποτείνουσα το $A\Gamma$ κατασκευάζουμε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ με $\hat{\Delta} = 90^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $BZ = \Delta Z$.

β) Αν $\hat{A\Gamma B} = 30^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες $B\Delta\Delta$ και $B\Gamma\Delta$.



1690. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και την διάμεσό του AM στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = \hat{\Gamma\hat{A}\Delta}$

β) $\hat{A\hat{M}\Delta} = 2\hat{\Gamma}$.

1691. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{B} = 60^\circ$. Φέρουμε τα ύψη AE και BZ του παραλληλογράμμου που αντιστοιχούν στην ευθεία $\Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma Z = \frac{A\Delta}{2}$

β) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ίσο με το τρίγωνο $B\Gamma Z$

γ) το τετράπλευρο $ABZE$ είναι ορθογώνιο.

1702. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε $A\Gamma < AB$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $A\Delta = A\Gamma$ και στην προέκταση της BA (προς το A) θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\Gamma \perp E\Gamma$

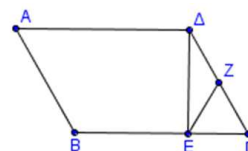
β) η γωνία $E\Delta\Gamma$ είναι διπλάσια της γωνίας $A\Delta\Gamma$.

1704. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{B} = 120^\circ$ και $\Delta E \perp B\Gamma$. Έστω EZ η διάμεσος του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες A και Γ του παραλληλογράμμου.

β) Αν K είναι το μέσο της AB , να αποδείξετε ότι $EZ = AK$.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $EZ\Gamma$.

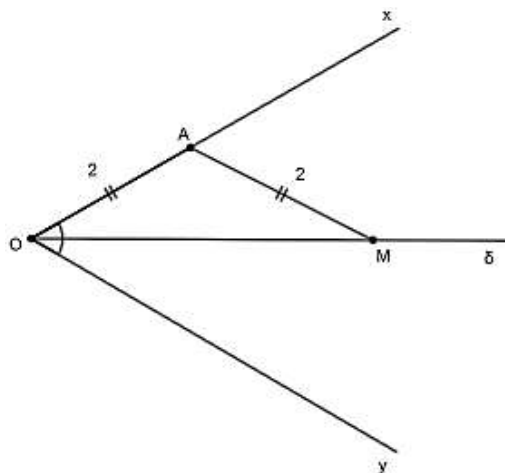


13653. Σχεδιάζουμε γωνία $\hat{x\hat{O}y} = 60^\circ$ και παίρνουμε σημείο A επί της πλευράς Ox , τέτοιο ώστε $AO = 2$. Φέρουμε τη διχοτόμο Od της γωνίας $\hat{x\hat{O}y}$ και θεωρούμε σημείο M στην Od , τέτοιο ώστε $AM = AO$. Να υπολογίσετε:

α) Τη γωνία $\hat{\delta\hat{O}y}$.

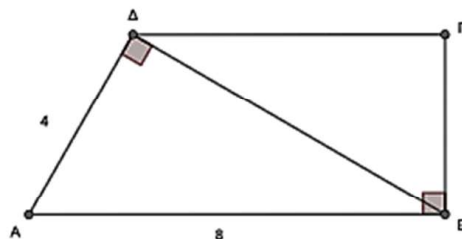
β) Τις γωνίες του τριγώνου AOM .

γ) Το μήκος του ύψους AB που αντιστοιχεί στη βάση OM του ισοσκελούς τριγώνου AOM .



13828. Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ η διαγώνιος $B\Delta$ είναι κάθετη στην πλευρά $A\Delta$ και η πλευρά ΓB κάθετη στη βάση AB . Αν $A\Delta=4$ και $AB=8$ τότε:

- α) Να υπολογιστεί η γωνία $\widehat{\Delta AB}$.
 β) Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος $B\Delta$ του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$ είναι διπλάσια της πλευράς του $B\Gamma$.



13831. Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $\widehat{A} = 90^\circ$.

- α) Να σχεδιάσετε ένα τέτοιο τρίγωνο αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $AB > A\Gamma$. Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου και γιατί; (Μονάδες 10)
 β) Αν για το τρίγωνο που σας ζητήθηκε να σχεδιάσετε στο α) ερώτημα γνωρίζετε επιπλέον ότι η μια από τις οξείες γωνίες του είναι ίση με 30° , τότε να απαντήσετε στα παρακάτω:

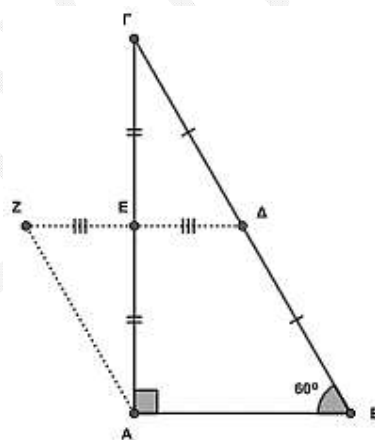
- i. Πόσες μοίρες θα είναι η γωνία $\widehat{B}$ και πόσες η γωνία $\widehat{\Gamma}$;
 ii. Ποια πλευρά του τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας;

13837. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{A} = 90^\circ$ και $\widehat{B} = 60^\circ$.

Θεωρούμε τα σημεία Δ και E που είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Προεκτείνουμε την ΔE κατά τμήμα $EZ = \Delta E$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = AZ$.
 β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ZAB είναι ισοσκελές.



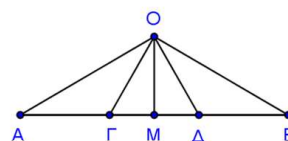
4ο Θέμα

1710. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία Γ, Δ ώστε να ισχύει $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta B$. Επίσης θεωρούμε σημείο O εκτός του ευθύγραμμου τμήματος AB έτσι ώστε να ισχύουν $O\Gamma = O\Delta$ και $\Delta B = O\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $\widehat{\Gamma O\Delta} = 60^\circ$ ii. $\widehat{O\Delta\Gamma} = \widehat{O\Delta B} = 30^\circ$

β) Αν M το μέσον του τμήματος AB , να αποδείξετε ότι $2OM = OA$.

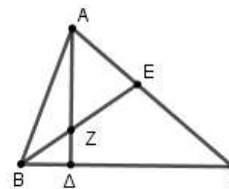


1713. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 2\widehat{B}$ και έστω $A\Delta$ ύψος και BE διχοτόμος του τριγώνου που τέμνονται στο Z .

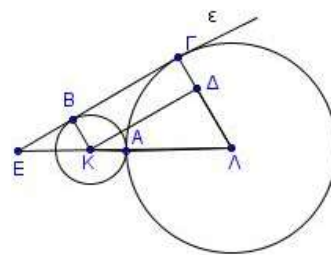
α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $\widehat{B} = 60^\circ$ και $AZ = BZ$ ii. $A\Delta = \frac{3}{2}BZ$

β) Αν είναι γνωστό ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου.



1721. Οι κύκλοι (K, ρ) και $(\Lambda, 3\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Μια ευθεία εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου ΚΛ στο σημείο Ε. Φέρουμε από το σημείο Κ παράλληλο τμήμα στην ε που τέμνει το τμήμα ΛΓ στο Δ.



α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΚ είναι ορθογώνιο.

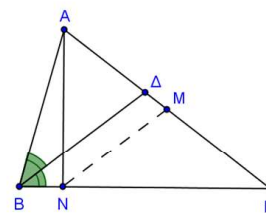
β) Να αποδείξετε ότι $\widehat{\Delta \hat{K} \Lambda} = 30^\circ$ **γ)** Να αποδείξετε ότι $E\Lambda = 6\rho$.

1737. Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του ΑΗ. Έστω Δ και Ε τα συμμετρικά σημεία του Η ως προς τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα και Μ, Ν οι προβολές των Δ, Ε στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α)** $AH = AD = AE$ **β)** Η γωνία ΕΗΔ είναι ορθή.
γ) Τα σημεία Ε, Α και Δ είναι συνευθειακά και $MN = DE/2$.

1738. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{B} = 2\widehat{\Gamma}$ και η διχοτόμος ΒΔ της γωνίας Β. Από το μέσο Μ της ΑΓ φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο ΒΔ που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Ν. Να αποδείξετε ότι:

- α)** Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.
β) Το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ισοσκελές.
γ) $AN \perp BG$

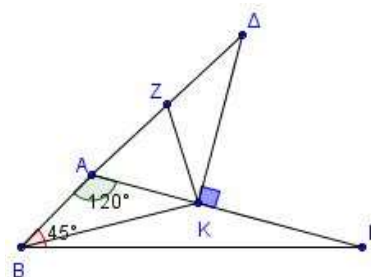


1759. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με γωνία Α αμβλεία, ισχύει ότι $AB = 2AD$. Τα σημεία Ε και Ζ, είναι μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Από το Δ φέρουμε τη ΔΗ κάθετη στην προέκταση της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

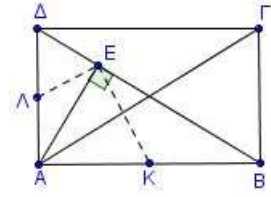
- α)** Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι ρόμβος.
β) Το τρίγωνο ΕΖΗ είναι ισοσκελές.
γ) Το τμήμα ΗΕ, είναι διχοτόμος της γωνίας ΖΗΓ.

1761. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία Α ίση με 120° και γωνία Β ίση με 45° . Στην προέκταση της ΒΑ προς το Α, παίρνουμε τμήμα $AD = 2AB$. Από το Δ φέρνουμε την κάθετη στην ΑΓ που την τέμνει στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι:

- α)** $\widehat{A \hat{D} K} = 30^\circ$
β) Το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές.
γ) Αν Ζ το μέσο της ΔΑ, τότε $\widehat{Z \hat{K} B} = 90^\circ$
δ) Το σημείο Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΔ.



1763. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Από την κορυφή A φέρουμε $AE \perp B\Delta$. Έστω K, Λ τα μέσα των πλευρών AB και $A\Delta$ αντιστοίχως, τότε:

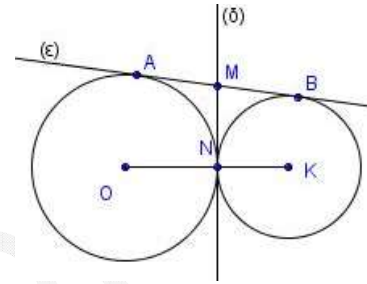


α) i. Να αποδείξετε ότι: $\widehat{K\hat{E}\Lambda} = 90^\circ$

ii. $K\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}$

β) Αν $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι $K\Lambda = B\Gamma$.

1771. Δύο κύκλοι $(O, \rho_1), (K, \rho_2)$ εφάπτονται εξωτερικά στο N . Μια ευθεία ε εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία A, B αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο N τέμνει την ε στο M . Να αποδείξετε ότι:

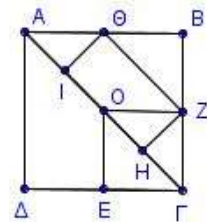


α) Το M είναι μέσο του AB .

β) $\widehat{OMK} = 90^\circ$

γ) $\widehat{ANB} = 90^\circ$

1781. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στη διαγώνιο $A\Gamma$ θεωρούμε σημεία I, O, H ώστε $AI = IO = OH = H\Gamma$. Αν E, Θ και Z τα μέσα των πλευρών $\Delta\Gamma, AB$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:



α) Το τετράπλευρο $OZ\Gamma E$ είναι τετράγωνο.

β) $ZH = \frac{A\Gamma}{4}$

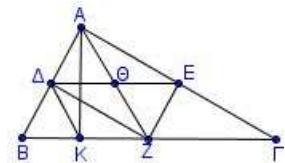
γ) Το τετράπλευρο $IOZH$ είναι ορθογώνιο με $\Theta Z = 2OI$.

1782. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$), τα μέσα Δ, E, Z των πλευρών του και το ύψος του AK . Έστω Θ το σημείο τομής των $AZ, \Delta E$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $A\Delta ZE$ είναι ορθογώνιο.

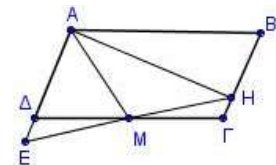
ii. $A\Theta = \Theta E = \frac{B\Gamma}{4}$



β) Αν επιπλέον είναι $\widehat{\Gamma} = 30^\circ$,

i. να βρείτε τη γωνία AZB . **ii.** να αποδείξετε ότι $BK = \frac{B\Gamma}{4}$.

1787. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$, τη γωνία A αμβλεία και M το μέσο της $\Gamma\Delta$. Φέρουμε κάθετη στην $A\Delta$ στο σημείο A , η οποία τέμνει την $B\Gamma$ στο H . Αν η προέκταση της HM τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ στο E , να αποδείξετε ότι:

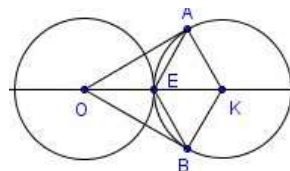


α) Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας ΔAB .

β) Τα τμήματα $EH, \Delta\Gamma$ διχοτομούνται.

γ) $\widehat{E} = \widehat{\Delta\hat{M}A}$

1796. Δύο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο E. Αν OA και OB είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο O στον κύκλο (K, ρ) , να αποδείξετε ότι:



α) $AE = BE$ β) $\angle AOK = 30^\circ$

γ) Το τετράπλευρο AKBE είναι ρόμβος.

1806. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με τη γωνία A ορθή. Φέρουμε τη διάμεσο του AM και σε τυχαίο σημείο K αυτής φέρουμε κάθετη στην AM η οποία τέμνει τις AB και AG στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Αν H είναι το μέσο του DE να αποδείξετε ότι:

α) $\angle B = \angle BAM$ β) $\angle A\hat{H} = \angle \Delta \hat{H}$.

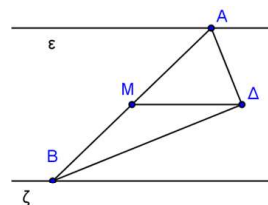
γ) Η ευθεία AH τέμνει κάθετα τη BG.

1808. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $AB = AG$ και Δ, E τα μέσα των πλευρών του AB και AG αντίστοιχα. Στην προέκταση της DE (προς το E) θεωρούμε σημείο Λ ώστε $EL = AE$ και στη προέκταση της ED (προς το Δ) θεωρούμε σημείο K τέτοιο, ώστε $DK = AD$. Να αποδείξετε ότι:

α) $K\Delta = \Delta E$ β) Τα τρίγωνα AKB και ALΓ είναι ορθογώνια.

γ) Τα τρίγωνα AKB και ALΓ είναι ίσα.

1811. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες (ε) και (ζ) και μια τρίτη που τις τέμνει στα σημεία A και B αντίστοιχα. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών που σχηματίζονται, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Δ. Αν M είναι το μέσον του AB, να αποδείξετε ότι:

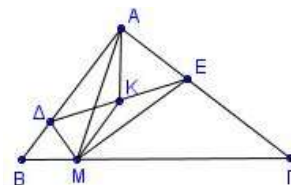


α) $\angle B\hat{\Delta}A = 90^\circ$ β) $\angle B\hat{M}\Delta = 2\angle \Delta \hat{A}$ γ) $M\Delta \parallel \epsilon$

1812. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με τη γωνία A ορθή και M τυχαίο σημείο της πλευράς BG. Φέρουμε τις διχοτόμους γωνιών BMA και AMG οι οποίες τέμνουν τις AB και AG στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΔME είναι ορθή.

β) Αν K το μέσο του DE, να αποδείξετε ότι $MK = KA$.

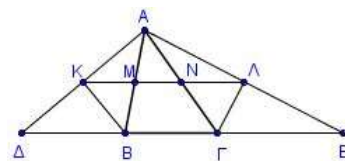


1813. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με τη γωνία A ορθή και AM η διάμεσός του. Από το M φέρουμε MK κάθετη στην AB και ML κάθετη στην AG. Αν N, P είναι τα μέσα των BM και ΓM αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $\angle N\hat{K}M = \angle N\hat{M}K$

β) Η MK είναι διχοτόμος της γωνίας NMA. γ) $AM = KN + AP$.

1824. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην προέκταση της ΓB προς το B , θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $B\Delta = AB$ ενώ στη προέκταση της $B\Gamma$ προς το Γ , θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $\Gamma E = A\Gamma$. Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών B και Γ τέμνουν τις $A\Delta$ και AE στα σημεία K και Λ αντίστοιχα και η $K\Lambda$ τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία M και N αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



α) Τα σημεία K και Λ είναι μέσα των $A\Delta$ και AE αντίστοιχα.

β) Τα τρίγωνα KMA και $AN\Lambda$ είναι ισοσκελή. γ) $K\Lambda = \frac{AB + A\Gamma + B\Gamma}{2}$

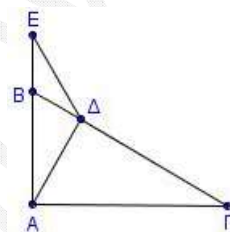
1831. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και σημείο E στην προέκταση της AB τέτοιο, ώστε $BE = B\Delta$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta E$.

β) Να αποδείξετε ότι:

i. $BE = \frac{AB}{2}$

ii. $AE = \Gamma\Delta$



1850. Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο $EZH\Theta$ παριστάνει ένα τραπέζι του μπιλιάρδου. Μια μπάλα του μπιλιάρδου ξεκινάει από σημείο A της μεσοκαθέτου του τμήματος EZ και χτυπώντας διαδοχικά στους τοίχους $E\Theta$, ΘH , HZ στα σημεία B , Γ και Δ αντίστοιχα, καταλήγει στο σημείο εκκίνησης A . Για τη διαδρομή $A \rightarrow B \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta \rightarrow A$ που ακολουθεί η μπάλα ισχύει ότι κάθε γωνία πρόσπτωσης σε τοίχο (π.χ. η γωνία ABE) είναι ίση με κάθε γωνία ανάκλασης σε τοίχο (π.χ. η γωνία $\Theta B\Gamma$) και η κάθε μια απ' αυτές είναι 45° .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα AEB και $AZ\Delta$ είναι ίσα.

ii. Η διαδρομή $AB\Gamma\Delta A$ της μπάλας σχηματίζει τετράγωνο.

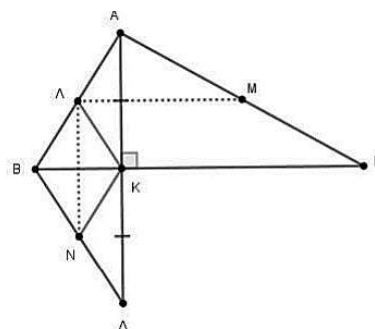
β) Αν η AZ είναι διπλάσια από την απόσταση του A από τον τοίχο EZ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AEZ .

1858. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση του ύψους του AK θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = K\Delta$. Έστω Λ , M και N τα μέσα των τμημάτων AB , $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.

β) Το τετράπλευρο $B\Lambda K N$ είναι ρόμβος.

γ) $\Lambda M \perp \Lambda N$

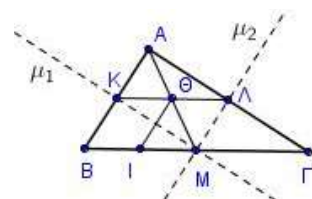


1859. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω K, Λ τα μέσα των $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα. Φέρουμε τις μεσοκαθέτους μ_1, μ_2 των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται στο μέσο M της $B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.

ii. Το τετράπλευρο $A\Lambda M K$ είναι ορθογώνιο.

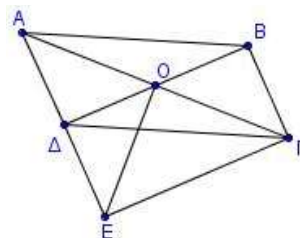


iii. $\Lambda\Theta = \frac{B\Gamma}{4}$, όπου Θ το σημείο τομής των AM και KL .

β) Αν I σημείο της $B\Gamma$ τέτοιο, ώστε $BI = \frac{B\Gamma}{4}$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Theta IB$ είναι παραλληλόγραμμο.

1862. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην $A\Gamma$ στο κέντρο του O , αυτή να τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ σε σημείο E τέτοιο, ώστε $\Delta E = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

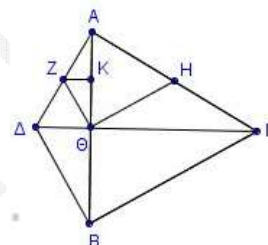
- α) Το τρίγωνο $A\epsilon\Gamma$ είναι ισοσκελές.
 β) Το τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
 γ) Το τρίγωνο $BO\Gamma$ είναι ισοσκελές.



1866. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Με βάση την AB κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta B$, εκτός του τριγώνου $AB\Gamma$, με $\hat{\Delta} = 120^\circ$. Θεωρούμε τα μέσα Z και H των πλευρών $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

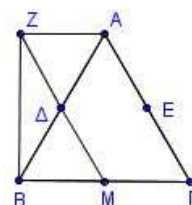
- α) Να αποδείξετε ότι η $\Delta\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του AB .
 β) Αν η $\Delta\Gamma$ τέμνει την AB στο Θ , να αποδείξετε ότι η γωνία $Z\Theta H$ είναι ορθή.
 γ) Αν η ZK είναι κάθετη στην AB από το σημείο Z , να

αποδείξετε ότι $ZK = \frac{A\Delta}{4}$.



1868. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ, E και M των $AB, A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Στη προέκταση του $M\Delta$ (προς το Δ) θεωρούμε τμήμα $\Delta Z = \Delta M$. Να αποδείξετε ότι:

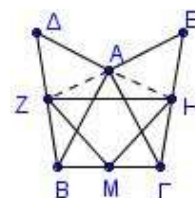
- α) Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και $BM\Delta$ είναι ίσα.
 β) Το τετράπλευρο $ZA\Gamma M$ είναι παραλληλόγραμμο.
 γ) Τα τμήματα ZE και $A\Delta$ τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.
 δ) Η BZ είναι κάθετη στη ZA .



1870. Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Φέρνουμε τμήμα $A\Delta$ κάθετο στην AB και τμήμα AE κάθετο στην $A\Gamma$ με $A\Delta = AE$. Θεωρούμε τα μέσα Z, H και M των $\Delta B, E\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

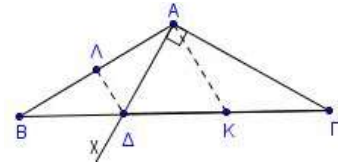
- α) Να αποδείξετε ότι:
 i. Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\epsilon\Gamma$ είναι ίσα.
 ii. Το τρίγωνο ZAH είναι ισοσκελές.
 iii. Η AM είναι μεσοκάθετος του ZH .
 β) Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\epsilon\Gamma$ έγραψε τα εξής:
 « 1. $A\Delta = AE$ από την υπόθεση
 2. $AB = A\Gamma$ πλευρές ισοσκελούς τριγώνου
 3. $\hat{\Delta}AB = \hat{E}A\Gamma$ ως κατακορυφήν

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία ίσα».



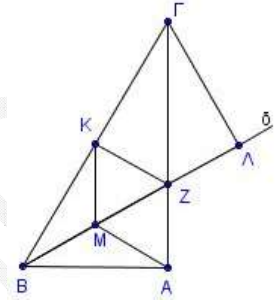
Ο καθηγητής είπε ότι η λύση περιέχει λάθος, μπορείς να το εντοπίσεις;

1871. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 120^\circ$. Φέρουμε ημιευθεία $A\chi$ κάθετη στην $A\Gamma$ στο A , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο Δ . Έστω Λ το μέσο του AB και K το μέσο του $\Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:



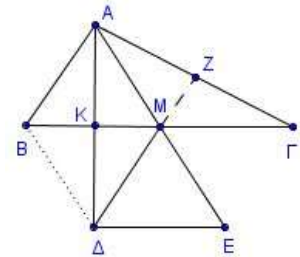
- α) Το τρίγωνο $\Lambda\Delta B$ είναι ισοσκελές.
 β) $\Delta\Gamma = 2B\Delta$ γ) $\Lambda\Delta \parallel AK$ δ) $AK = 2\Lambda\Delta$

1872. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 60^\circ$. Η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει την $A\Gamma$ στο Z . Τα σημεία M και K είναι τα μέσα των BZ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Αν το τμήμα $\Gamma\Lambda$ είναι κάθετο στη διχοτόμο $B\delta$, να αποδείξετε ότι:



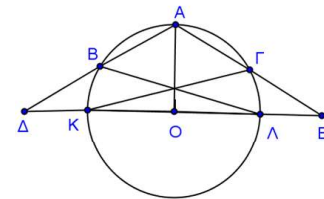
- α) Το τρίγωνο $BZ\Gamma$ είναι ισοσκελές.
 β) Το τετράπλευρο $AMKZ$ είναι ρόμβος.)
 γ) $\Gamma Z = 2ZA$
 δ) $BL = A\Gamma$

1873. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με διάμεσο AM τέτοια, ώστε $AM = AB$. Φέρουμε το ύψος του AK και το προεκτείνουμε (προς το K) κατά τμήμα $K\Delta = AK$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά τμήμα $ME = AM$. Να αποδείξετε ότι:



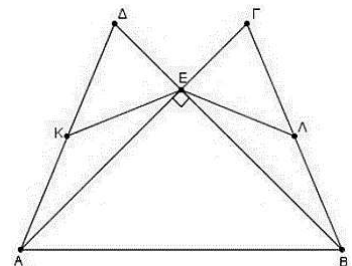
- α) $\Delta E \perp A\Delta$ και $\Delta E = 2KM$.
 β) Το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
 γ) Το τετράπλευρο $AB\Delta M$ είναι ρόμβος.
 δ) Η προέκταση της ΔM τέμνει την $A\Gamma$ στο μέσον του Z .

1874. Έστω κύκλος με κέντρο O και διάμετρο $K\Lambda = 2\rho$. Έστω A σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα OA να είναι κάθετη στην $K\Lambda$. Φέρουμε τις χορδές $AB = A\Gamma = \rho$. Έστω Δ και E τα σημεία τομής των προεκτάσεων των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου $K\Lambda$. Να αποδείξετε ότι:



- α) $\hat{B\Lambda\Gamma} = 120^\circ$ β) Τα σημεία B και Γ είναι μέσα των $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.
 γ) $K\Gamma = \Lambda B$

1876. Δίνονται δυο ίσα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και $AB\Delta$ ($BA = B\Delta$), τέτοια ώστε οι πλευρές τους $A\Gamma$ και $B\Delta$ να τέμνονται κάθετα στο σημείο E , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



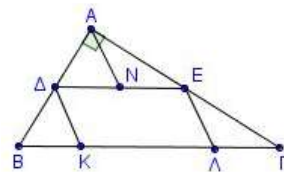
- α) $E\Delta = E\Gamma$.
 β) $\Delta\Gamma \parallel AB$.
 γ) Το τρίγωνο EKL είναι ισοσκελές και $K\Lambda \parallel AB$.

1880. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και Δ, E και N τα μέσα των $AB, A\Gamma$ και ΔE αντίστοιχα. Στο τμήμα $B\Gamma$ θεωρούμε σημεία K και Λ ώστε $\Delta K = KB$ και $E\Lambda = \Lambda\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta \hat{K} \Lambda = 2\hat{B}$ και $E \hat{\Lambda} K = 2\hat{\Gamma}$.

β) Το τετράπλευρο $\Delta E \Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο με $\Delta E = 2\Delta K$.

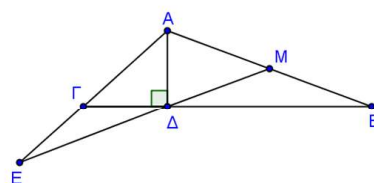
γ) $AN = \Delta K = \frac{B\Gamma}{4}$



1881. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB > A\Gamma$), AD το ύψος του και M το μέσο του AB . Η προέκταση της $M\Delta$ τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο E ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = \hat{E}$ **β)** $\hat{\Gamma} = 2\hat{B} = A \hat{M} \Delta$

γ) $\Gamma E < A\Gamma$



1895. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma B$ ($A\Gamma = \Gamma B$). Φέρουμε τα ύψη του AK και $\Gamma\Lambda$. Αν E είναι το μέσο της πλευράς $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $KE\Lambda$ είναι ισοσκελές.

β) Η $K\Lambda$ είναι διχοτόμος της γωνίας BKE .

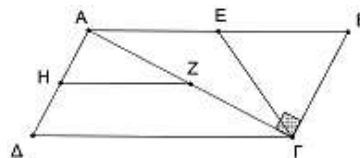
13540. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε η διαγώνίός του $A\Gamma$ να είναι κάθετη στη $B\Gamma$. Θεωρούμε τα μέσα E, Z και H των $AB, A\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\Gamma E = ZH$.

ii. Η ΓA είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta \hat{E} \Gamma$.

β) Αν $\Delta H = \frac{AB}{4}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ισόπλευρο.

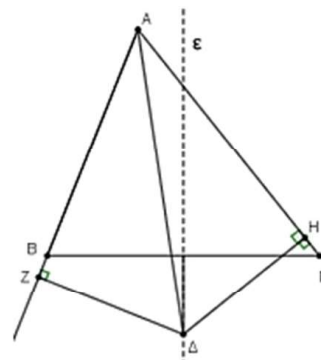


13522. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει την μεσοκάθετο (ϵ) της $B\Gamma$ στο Δ . Από το Δ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΔZ και ΔH προς τις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και $AH\Delta$.

β) Να αποδείξετε ότι $BZ = H\Gamma$.

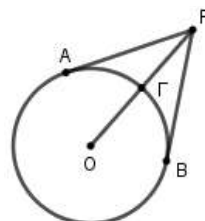
γ) Αν η γωνία $\hat{A} = 60^\circ$ και M το μέσο της $A\Delta$, να αποδείξετε ότι $HM = Z\Delta$.



13520. Δίνεται κύκλος (O, ρ) και σημείο P εκτός του κύκλου. Από το P φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Η PO τέμνει το μικρότερο του ημικυκλίου τόξο AB στο Γ και $A \hat{P} B = 60^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $OP = 2\rho$

β) $A \hat{\Gamma} B = 120^\circ$



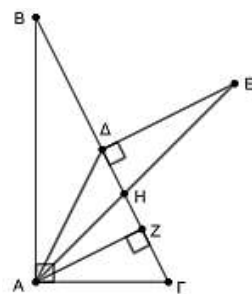
γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το τετράπλευρο ΟΑΓΒ είναι ρόμβος. Συμφωνείτε μαζί του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

13672. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $AB > AG$. Από το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε κάθετη στη ΒΓ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία τέμνει τη διχοτόμο ΑΗ της γωνίας $\hat{A}$ στο σημείο Ε. Έστω ΑΖ το ύψος στην υποτείνουσα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma A Z} = \hat{\Delta A B}$

β) $AD = DE$

γ) $\hat{Z A \Delta} = \hat{\Gamma} - \hat{B}$



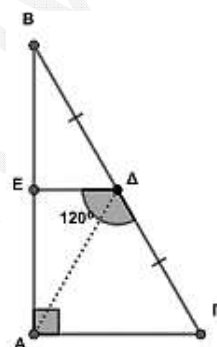
13855. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$. Από το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΑΓ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι $\hat{E \Delta \Gamma} = 120^\circ$, τότε:

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{\Delta \Gamma A}$.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο.

γ) Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma Z = AG$ και την πλευρά ΒΓ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma H = \frac{BG}{2}$. Να αποδείξετε ότι

$$\hat{A H Z} = 90^\circ.$$

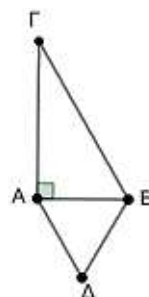


13853. Στο παραπάνω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$. Επίσης οι ΑΔ και ΒΓ είναι παράλληλες και το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Αν η περίμετρος του ΑΒΔ είναι 12 να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας του ΑΒΓ.

γ) Αν το σημείο Κ είναι σημείο της υποτείνουσας τέτοιο ώστε το ΑΔΒΚ να είναι παραλληλόγραμμο, τότε να βρείτε τη θέση του σημείου Κ. Τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το ΑΔΒΚ; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

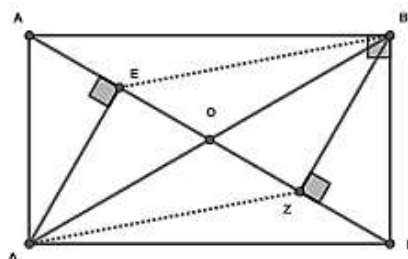


13852. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $AB > AD$ και με κέντρο Ο. Αν ΒΖ και ΔΕ είναι οι αποστάσεις των κορυφών Β και Δ από τη διαγώνιο ΑΓ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΕΟ και ΒΖΟ είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Αν $\hat{\Delta A E} = 60^\circ$ και $OE = 5$, να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΔ.

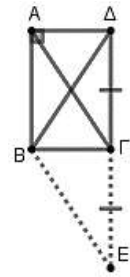


13851. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά $\Delta\Gamma$ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma E = \Delta\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Gamma E B$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές.

γ) Αν $\widehat{B\Delta E} = 120^\circ$ να αποδείξετε ότι $B\Delta = 2A\Delta$.



Βαρύκεντρο – ορθόκεντρο τριγώνου

1706. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και μ_β, μ_γ οι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

II: Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$, τότε οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση II, αιτιολογώντας την απάντησή σας. **β)** Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της II και να εξετάσετε αν ισχύει αιτιολογώντας την απάντησή σας.

γ) Στην περίπτωση που οι δυο προτάσεις, η II και η αντίστροφή της ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως ενιαία πρόταση.

1716. Στο διπλανό σχήμα δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE που τέμνονται στο H και το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$.

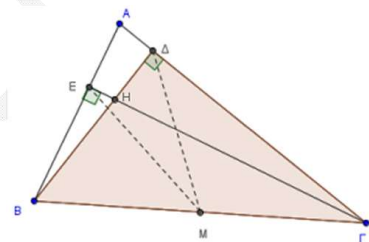
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $M\Delta = ME$

ii. Η ευθεία AH τέμνει κάθετα την $B\Gamma$ και ότι

$\widehat{A\hat{H}\Delta} = \widehat{\Gamma}$, όπου $\widehat{\Gamma}$ η γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να βρείτε το ορθόκεντρο του τριγώνου ABH .



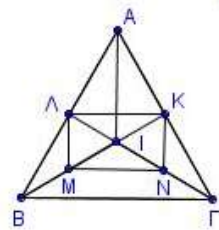
1719. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του BK και $\Gamma\Lambda$, τα οποία τέμνονται στο I . Αν τα σημεία M και N είναι τα μέσα των $B\Gamma$ και $\Gamma\Lambda$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα $B\Gamma\Lambda$ και $\Gamma\Gamma K$ είναι ίσα.

γ) Το $A\Gamma$ προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς $B\Gamma$.

δ) Το τετράπλευρο $M\Lambda K N$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



1728. Έστω ότι E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

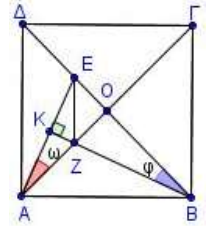
α) Το τετράπλευρο $\Delta E B Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) $\widehat{A\hat{E}\Delta} = \widehat{B\hat{Z}\Gamma}$.

γ) Οι ΔE και BZ τριχοτομούν τη διαγώνιο $A\Gamma$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

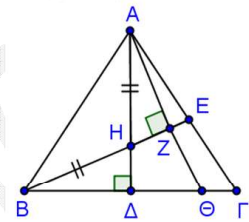
1748. Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ ονομάζουμε O το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο E του τμήματος OD . Φέρνουμε την κάθετη από το B στην AE , που τέμνει το τμήμα AO στο Z . Να αποδείξετε ότι:

- α) Οι γωνίες ω και φ του σχήματος είναι ίσες.
- β) $BZ = AE$ και $\Gamma Z = BE$.
- γ) Το τμήμα EZ είναι κάθετο στο AB .



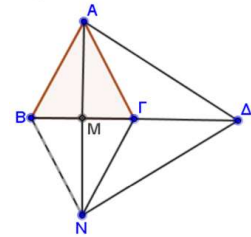
1754. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και το ύψος του AD . Στο AD θεωρούμε σημείο H τέτοιο, ώστε $HA = HB$. Έστω ότι E είναι το σημείο τομής της BH με την $A\Gamma$. Φέρνουμε την AZ κάθετη στη BE , η οποία τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο Θ .

- α) Να αποδείξετε ότι:
 - i. Τα τρίγωνα $H\Delta B$ και HZA είναι ίσα.
 - ii. $\Delta\Theta = \Theta Z$
 - iii. Η ευθεία ΘH είναι μεσοκάθετος του τμήματος AB .
- β) Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκентρο του τριγώνου AHB ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



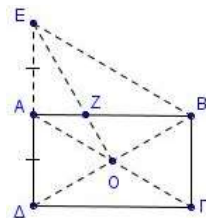
1760. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και AM το ύψος του στη πλευρά $B\Gamma$. Στην προέκταση του AM θεωρούμε τμήμα $MN = AM$. Στη προέκταση του $B\Gamma$ προς το μέρος του Γ θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $ABN\Gamma$ είναι ρόμβος.
- β) Το τρίγωνο $A\Delta N$ είναι ισοσκελές.
- γ) Το σημείο Γ είναι το βαρύκентρο του τριγώνου $A\Delta N$.



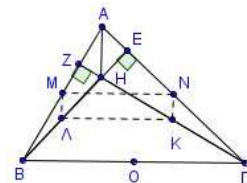
1764. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O και $AB > B\Gamma$, $A\Gamma = 2B\Gamma$. Στην προέκταση της πλευράς ΔA (προς το A) παίρνουμε σημείο E ώστε $\Delta A = AE$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $AEB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β) Το τρίγωνο $E\Delta B$ είναι ισόπλευρο.
- γ) Αν η EO τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι $\Delta Z \perp EB$.



1777. Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, BE , ΓZ τα ύψη από τις κορυφές B, Γ αντίστοιχα και H το ορθόκентρο του τριγώνου. Επίσης δίνονται τα M, N, K, Λ μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων $AB, A\Gamma, \Gamma H, BH$ αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι:
 - i. $MN = \Lambda K$
 - ii. $NK = M\Lambda = \frac{AH}{2}$
 - iii. Το τετράπλευρο $MNKL$ είναι ορθογώνιο.
- β) Αν O είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\widehat{MOK} = 90^\circ$.



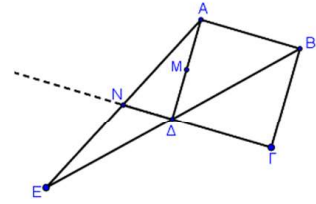
1780. Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε τη διαγώνιο $B\Delta$ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = \Delta B$. Έστω M το μέσο της $A\Delta$ και N το σημείο τομής των ευθειών AE και $\Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta N = \Delta M$.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $NM\Delta$.

γ) Να αποδείξετε ότι:

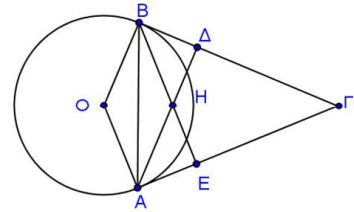
- i. $MN \perp A\Gamma$ ii. $\Gamma M \perp AN$



1823. Δίνεται κύκλος κέντρου O και δύο μη αντιδιαμετρικά σημεία του A και B . Φέρουμε τις εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία A και B οι οποίες τέμνονται σε σημείο Γ . Φέρουμε επίσης και τα ύψη $A\Delta$ και BE του τριγώνου $AB\Gamma$ τα οποία τέμνονται στο σημείο H . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο BHA είναι ισοσκελές.

β) Το τετράπλευρο $OBHA$ είναι ρόμβος. **γ)** Τα σημεία O, H, Γ είναι συνευθειακά.

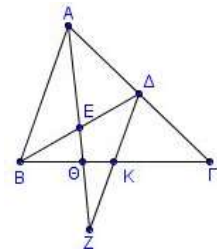


1827. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσο της διαμέσου $B\Delta$. Στην προέκταση της AE θεωρούμε σημείο Z τέτοιο, ώστε $EZ = AE$ και έστω Θ το σημείο τομής της AZ με την πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Το τετράπλευρο $B\Delta\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Το σημείο Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου $B\Delta Z$.



1835. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ με M και N τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E .

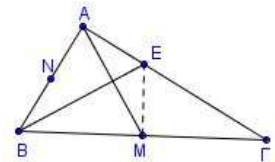
α) Να αποδείξετε ότι:

- i. η BE είναι διχοτόμος της γωνίας B .

ii. $AE = \frac{\Gamma E}{2}$

iii. η BE είναι μεσοκάθετος της διαμέσου AM .

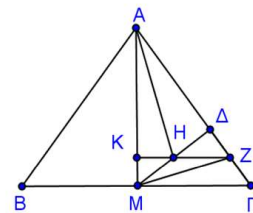
β) Αν $A\Delta$ είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ που τέμνει την BE στο H , να αποδείξετε ότι τα σημεία M, H και N είναι συνευθειακά.



1843. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και το ύψος του AM . Φέρουμε τη $M\Delta$ κάθετη στην $A\Gamma$ και θεωρούμε σημείο H το μέσο του $M\Delta$. Από το H φέρουμε παράλληλη στη $B\Gamma$ η οποία τέμνει τις AM και $A\Gamma$ στα σημεία K και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $HZ = \frac{B\Gamma}{4}$ **β)** $MZ \parallel B\Delta$

γ) Η ευθεία AH είναι κάθετη στη $B\Delta$.

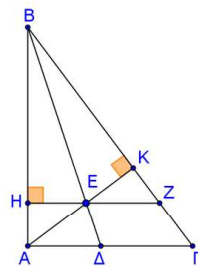


1865. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Delta$ διχοτόμο και AK ύψος, που τέμνονται στο E . Η κάθετη από το E στην AB τέμνει τις AB και $B\Gamma$ στα H και Z αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι :

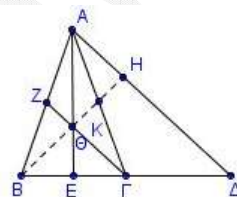
- i) Τα τρίγωνα EHA και EKG είναι ίσα.
- ii) Το τρίγωνο BKH είναι ισοσκελές.
- iii) Η $B\Delta$ είναι κάθετη στην AZ .

β) Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η GE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{G}$.



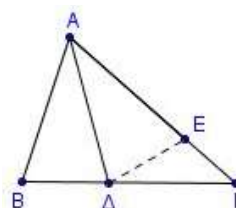
1878. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Προεκτείνουμε το $B\Gamma$ (προς το Γ) κατά τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Φέρουμε τις διαμέσους AE και ΓZ του τριγώνου $AB\Gamma$ που τέμνονται στο Θ . Το $B\Theta$ προεκτεινόμενο, τέμνει το $A\Gamma$ στο K και το $A\Delta$ στο H . Να αποδείξετε ότι:

α) Το $ZK\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο. **β)** $AH = \Theta\Gamma$ **γ)** $AH = 2Z\Theta$



1887. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $AE = AB$. Να αποδείξετε ότι:

- α)** τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta E$ είναι ίσα.
- β)** η ευθεία $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος του BE .
- γ)** αν το ύψος από την κορυφή B του τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει την $A\Delta$ στο H τότε η ευθεία EH είναι κάθετη στην AB



Τραπεζίο

Τραπεζίο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.

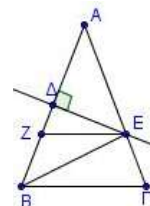
- Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του λέγεται διάμεσος του τραpezίου.
Η διάμεσος του τραpezίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμα τους.
- Η διάμεσος EZ τραpezίου $AB\Gamma\Delta$ διέρχεται από τα μέσα K και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα $K\Lambda$ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά τους.
- Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.
- Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο ισχύουν οι εξής ιδιότητες:
 - α)** οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.
 - β)** οι διαγώνιοι του είναι ίσες.
- Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες.
(ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

1529. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στο μέσο Δ της πλευράς AB φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο E . Από το E φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο Z .

α) Να αποδείξετε ότι $AE = BE$.

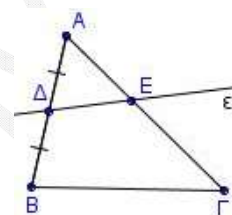
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma EZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



1536. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ το μέσο της πλευράς AB . Από το Δ διέρχεται μια τυχαία ευθεία (ϵ) που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ σε εσωτερικό της σημείο E . Η ευθεία (ϵ) χωρίζει το τρίγωνο $AB\Gamma$ σε ένα τρίγωνο $A\Delta E$ κι σε ένα τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$.

α) Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου E , ώστε το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

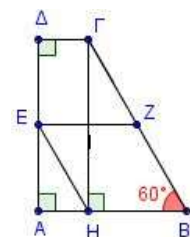
β) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος (α) να είναι ισοσκελές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



1549. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB > \Gamma\Delta$, $B\Gamma = 4\Gamma\Delta$ και $\hat{B} = 60^\circ$. Φέρουμε την $\Gamma H \perp AB$ και θεωρούμε τα μέσα E και Z των πλευρών $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = 3\Gamma\Delta$

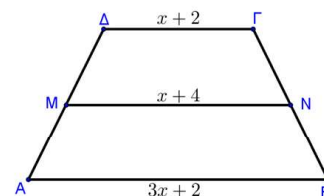
β) Το τετράπλευρο $EHBZ$ είναι παραλληλόγραμμο.



1550. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB > \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$.

α) Αν τα μήκη των βάσεων είναι $AB = 3x + 2$, $\Gamma\Delta = x + 2$ και το μήκος της διαμέσου του τραπέζιου είναι $MN = x + 4$, τότε να δείξετε ότι $x = 2$.

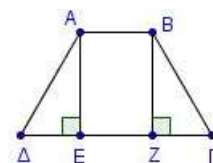
β) Αν η γωνία Γ είναι διπλάσια της γωνίας B , να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου.



1562. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$). Φέρουμε τα ύψη του AE και BZ . Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta E = \Gamma Z$

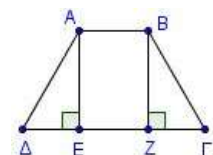
β) το τετράπλευρο $AEZB$ είναι ορθογώνιο.



1563. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$). Φέρουμε τα ύψη του AE και BZ . Να αποδείξετε ότι:

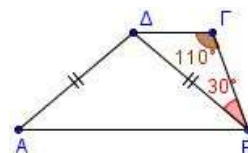
α) $\Delta E = \Gamma Z$

β) $AZ = BE$



1577. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) στο οποίο η διαγώνιος $B\Delta$ είναι ίση με την

πλευρά $A\Delta$. Αν η γωνία $\hat{\Gamma} = 110^\circ$ και η γωνία $\hat{\Delta B\Gamma} = 30^\circ$,



να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}\hat{D}B$.

1579. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$. Θεωρούμε τα σημεία E και Z πάνω στην AB έτσι ώστε $AE = EZ = ZB$ και έστω K το σημείο τομής των ΔZ και ΓE . Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta Z = \Gamma E$

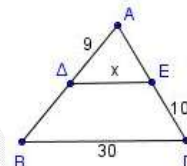
β) Τα τρίγωνα EKZ και $\Delta K\Gamma$ είναι ισοσκελή.

1612. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με Δ και E τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα, $\Delta\Delta = 9$, $E\Gamma = 10$ και $B\Gamma = 30$.

α) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι τραπέζιο.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος x του τμήματος ΔE .

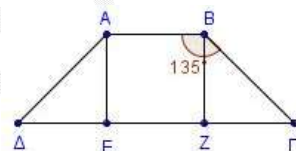


1629. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με

$\Gamma\Delta > AB$ και $\hat{B} = 135^\circ$. Από τις κορυφές A και B φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραpezίου.

β) Να αποδείξετε ότι $AE = E\Delta = BZ = \Gamma Z$.



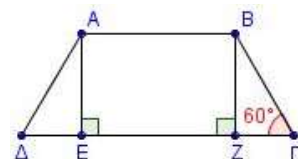
1634. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 6$,

$B\Gamma = 4$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Δίνονται επίσης τα ύψη AE και BZ από τις κορυφές A και B αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα.

γ) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του $AB\Gamma\Delta$.

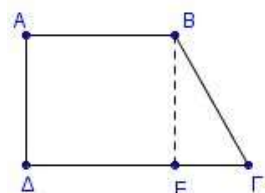


1635. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = B\Gamma = 4$, $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Δίνεται επίσης το ύψος BE από την κορυφή B .

α) Να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$.

β) Να αποδείξετε ότι $2E\Gamma = B\Gamma$.

γ) Αν M, N τα μέσα των πλευρών $A\Delta, B\Gamma$ αντίστοιχα, να βρείτε το μήκος του τμήματος MN .

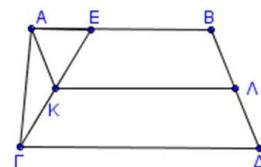


1644. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 3$, $\Gamma\Delta = 4$.

Θεωρούμε σημείο E στην AB ώστε $AE = 1$. Στο τραπέζιο $EB\Gamma\Delta$ θεωρούμε τα K και Λ , μέσα των $E\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο $K\Lambda$ του τραpezίου $EB\Gamma\Delta$.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

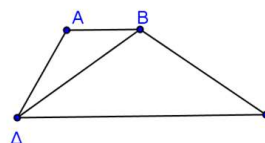


1650. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $B\Delta = B\Gamma$. Αν

$\hat{\Delta B\Gamma} = 110^\circ$ και $\hat{A\Delta B} = 25^\circ$, να υπολογίσετε:

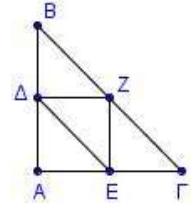
α) Τη γωνία Γ .

β) Τη γωνία A .



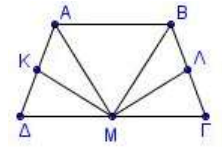
1666. Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($\hat{A} = 90^\circ$) θεωρούμε τα μέσα Δ , E και Z των πλευρών του AB , $ΑΓ$ και $BΓ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $AEZ\Delta$ είναι ορθογώνιο.
β) Το τετράπλευρο $E\Delta BΓ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



1669. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ABΓ\Delta$, το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $\Delta\Gamma$ και τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) $KM = \Lambda M$
β) $AM = BM$

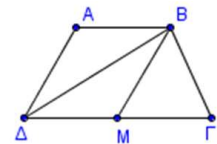


1694. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ABΓ\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB = 8$ και $\Delta\Gamma = 12$. Αν AH και $B\Theta$ τα ύψη του τραpezίου,

- α) να αποδείξετε ότι $\Delta H = \Theta\Gamma$. β) να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραpezίου.

1697. Στο τραπέζιο του διπλανού σχήματος έχουμε $AB = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$, $\hat{\Delta} = 60^\circ$ και M το μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

- α) η ΔB είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .
β) η BM χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

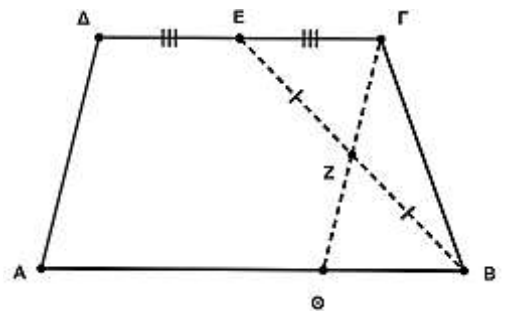


13497. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ABΓ\Delta$ ($A\Delta \parallel B\Gamma$) με $B\Gamma > \Delta\Gamma$. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε σημείο E , τέτοιο ώστε $\Gamma E = \Gamma\Delta$.

- α) Να αποδείξετε ότι η ΔE είναι διχοτόμος της $A\hat{\Delta}\Gamma$.
β) Αν $\hat{A} = 120^\circ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

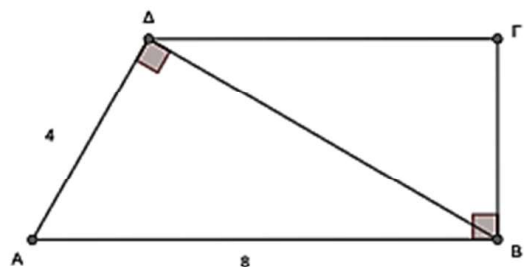
13824. Δίνεται τραπέζιο $ABΓ\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$. Αν E και Z τα μέσα των $\Gamma\Delta$ και BE αντίστοιχα και Θ το σημείο τομής της AB και της προέκτασης της ΓZ , να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα ΓEZ , ΘBZ είναι ίσα.
β) $E\Gamma = \Theta B$.
γ) Το τετράπλευρο $EB\Theta\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.



13828. Σε τραπέζιο $ABΓ\Delta$ η διαγώνιος $B\Delta$ είναι κάθετη στην πλευρά $A\Delta$ και η πλευρά ΓB κάθετη στη βάση AB . Αν $A\Delta = 4$ και $AB = 8$ τότε:

- α) Να υπολογιστεί η γωνία $\Delta\hat{A}B$.
β) Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος $B\Delta$ του τραpezίου $ABΓ\Delta$ είναι διπλάσια της πλευράς του $B\Gamma$.



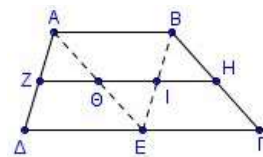
4ο Θέμα

1711. Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) είναι $\Gamma\Delta = 2AB$. Επίσης Z, H, E είναι τα μέσα των $A\Delta, B\Gamma$ και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Ακόμη η ZH τέμνει τις AE, BE στα σημεία Θ, I αντίστοιχα.

α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Να δείξετε ότι τα σημεία Θ, I είναι μέσα των AE, BE αντίστοιχα.

γ) Να δείξετε ότι $ZH = \frac{3}{2}AB$.



1715. Δίνεται ευθεία (ε) και δύο σημεία A, B εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία AB να μην είναι κάθετη στην (ε) . Φέρουμε $A\Delta, B\Gamma$ κάθετες στην (ε) και M, N μέσα των $AB, \Gamma\Delta$ αντίστοιχα.

α) Αν τα A, B είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε)

i. να εξετάσετε αν το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

1) $A\Delta < B\Gamma$ 2) $A\Delta = B\Gamma$.

ii. να εκφράσετε το τμήμα MN σε σχέση με τα τμήματα $A\Delta, B\Gamma$ στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις.

β) Αν η (ε) τέμνει το τμήμα AB στο μέσο του M , να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου $A\Gamma B\Delta$ (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο) και να δείξετε ότι τα M, N ταυτίζονται. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

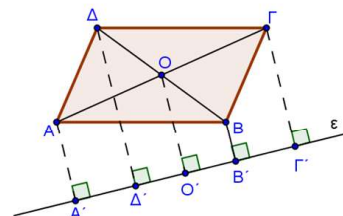
1718. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τις προβολές A', B', Γ', Δ' των κορυφών του A, B, Γ, Δ αντίστοιχα σε μια ευθεία ε .

α) Αν η ευθεία ε αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο ημιεπίπεδο και είναι $AA' = 3, BB' = 2, \Gamma\Gamma' = 5$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του παραλληλογράμμου από την ε είναι ίση με 4.

ii. Να βρείτε την απόσταση $\Delta\Delta'$.

β) Αν η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις $AA', BB', \Gamma\Gamma', \Delta\Delta'$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



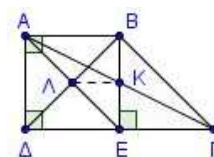
1722. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος του $B\Delta$. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ και ονομάζουμε Z το σημείο στο οποίο η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την προέκταση της BA . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές. **β)** Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και BEZ είναι ίσα.

γ) Η ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων AE και $Z\Gamma$.

δ) Το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

1727. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Από το B φέρνουμε κάθετη στη $\Gamma\Delta$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο K και την $\Gamma\Delta$ στο E . Επίσης φέρνουμε την AE που τέμνει τη $B\Delta$ στο σημείο Λ . Να αποδείξετε ότι:

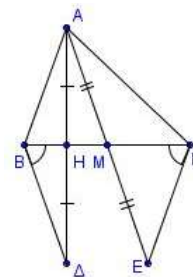


α) $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ β) $B\Delta = AE$ γ) $K\Lambda = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$

1732. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Προεκτείνουμε το ύψος του AH κατά τμήμα $H\Delta = AH$ και τη διάμεσό του AM κατά τμήμα $ME = AM$. Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = B\Delta = \Gamma E$ β) $\hat{\Gamma B\Delta} = \hat{B\Gamma E}$

γ) Αν οι $B\Delta$ και ΓE δεν είναι παράλληλες, τότε το τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



1735. Θεωρούμε ευθεία (ε) και δύο σημεία A και B εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε) έτσι ώστε, η ευθεία AB να μην είναι κάθετη στην (ε) . Έστω A' και B' τα συμμετρικά σημεία των A και B αντίστοιχα ως προς την ευθεία (ε) .

α) Να αποδείξετε ότι $AA' \parallel BB'$.

β) Αν η μεσοκάθετος του AB τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το K ανήκει και στη μεσοκάθετο του $A'B'$.

γ) Να βρείτε τη σχέση των ευθειών AB και (ε) ώστε το τετράπλευρο $ABB'A'$ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

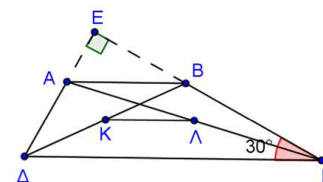
1736. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με τη γωνία Γ

ίση με 30° και έστω K, Λ τα μέσα των διαγωνίων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔA και ΓB προεκτείνόμενες τέμνονται κάθετα στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = 2AE$

β) $K\Lambda = A\Delta$

γ) Σε ποια περίπτωση το $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε τη απάντησή σας.



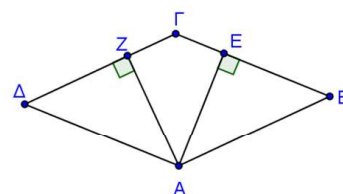
1742. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος είναι ρόμβος με $\hat{B} \neq 60^\circ$. Θεωρούμε $AZ \perp \Gamma\Delta$ και $AE \perp \Gamma B$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ZAE είναι ισοσκελές.

β) Η ευθεία $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του ZE .

γ) Αν M και N τα μέσα των πλευρών $A\Delta$ και AB

αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ZMNE$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



1747. Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB . Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου σ' ένα σημείο του E και τέμνει τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στα Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Αν το σημείο E δεν είναι το μέσο του τόξου AB , να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο. ii. $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$

β) Αν το σημείο E βρίσκεται στο μέσον του τόξου AB , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου $A\Delta\Gamma B$ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

1755. Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) είναι $AB = A\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .

β) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου E , ώστε το τετράπλευρο $ABE\Delta$ να είναι ρόμβος.

γ) Αν επιπλέον είναι $\widehat{B\hat{A}\Delta} = 120^\circ$ και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο O , να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $EOB\Gamma$.

1757. Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^\circ$, $AB = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$ και $AB = \frac{1}{3}A\Delta$.

Επιπλέον φέρουμε $BE \perp \Delta\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABE\Delta$ είναι ορθογώνιο.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BEG είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

γ) Αν K, Λ είναι τα μέσα των BE και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η $A\Gamma$ διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος BK .

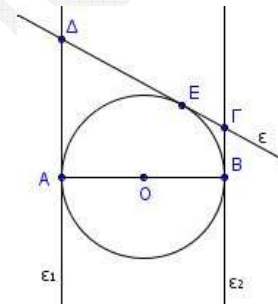
1758. Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και ευθείες ϵ_1, ϵ_2 εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB .

Θεωρούμε ευθεία ϵ εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του E , η οποία τέμνει τις ϵ_1 και ϵ_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$.

β) Το τρίγωνο $\Gamma O\Delta$ είναι ορθογώνιο.

γ) Να διερευνήσετε το είδος του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ ανάλογα με τη θέση του σημείου E στο ημικύκλιο AB .



1767. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\widehat{B} = 3\widehat{\Gamma}$.

Φέρνουμε $BE \perp \Delta\Gamma$ που τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$ στο M .

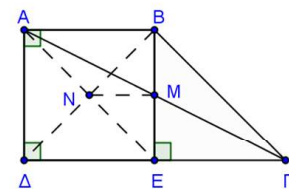
Φέρνουμε την AE που τέμνει τη διαγώνιο $B\Delta$ στο σημείο N .

Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{\Gamma} = 45^\circ$

β) Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) $AE \perp B\Delta$



1786. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$ και τη γωνία B αμβλεία. Από την κορυφή A φέρουμε την AE κάθετη στην ευθεία $B\Gamma$ και έστω M, N τα μέσα των $AB, \Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

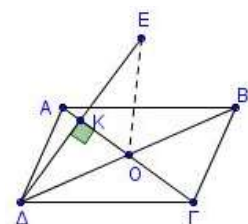
α) Το τετράπλευρο $MB\Gamma N$ είναι ρόμβος.

β) Το τετράπλευρο $ME\Gamma N$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Η EN είναι διχοτόμος της γωνίας $ME\Gamma$.

1770. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με O το κέντρο του. Από την κορυφή Δ φέρουμε το τμήμα ΔK κάθετο στην $A\Gamma$ και στην προέκτασή του προς το K θεωρούμε σημείο E , ώστε $KE = \Delta K$. Να αποδείξετε ότι:

α) $EO = \frac{B\Delta}{2}$



β) $\widehat{\Delta \hat{E} B} = 90^\circ$

γ) Το τετράπλευρο AEBΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

1778. Δίνεται ορθή γωνία $\widehat{xOy} = 90^\circ$ και A,B σημεία των ημιευθειών Oy, Ox με $OA = OB$. Η ευθεία (ε) διέρχεται από το O και αφήνει τις ημιευθείες Ox, Oy στο ίδιο ημιεπίπεδο. Η κάθετος από το σημείο A στην (ε) την τέμνει στο Δ και η κάθετος από το σημείο B στην (ε) την τέμνει στο E.

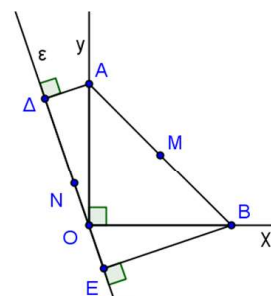
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα OAD και OEB είναι ίσα.

β) $AD + BE = DE$

γ) $MN = \frac{DE}{2}$, όπου MN το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των DE και AB.

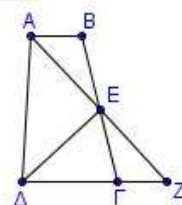
δ) Το τρίγωνο ΔME είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.



1783. Σε τραπέζιο ABΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ ισχύει ότι $AB + \Gamma\Delta = AD$. Αν η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει τη ΒΓ στο E και την προέκταση της ΔΓ στο Z, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔAZ είναι ισοσκελές. β) Το E είναι το μέσο της ΒΓ.

γ) Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας Δ του τραπέζιου.



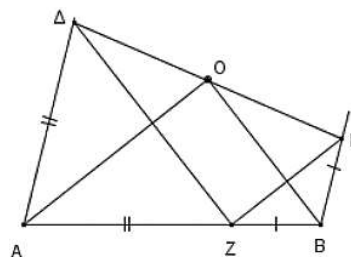
1784. Δίνεται τραπέζιο AΔEB, με $AD \parallel BE$, στο οποίο ισχύει ότι $AB = AD + BE$, και O το μέσον της ΔE. Θεωρούμε σημείο Z στην AB τέτοιο ώστε $AZ = AD$ και $BZ = BE$. Αν

γωνία $\widehat{\Delta \hat{A} Z} = \varphi$,

α) να εκφράσετε τη γωνία AZΔ σε συνάρτηση με τη φ .

β) να εκφράσετε τη γωνία EZB σε συνάρτηση με τη φ .

γ) να αποδείξετε ότι οι OA και OB είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων ΔZ και ZE αντίστοιχα.

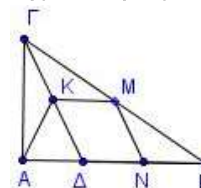


1789. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $\widehat{A} = 90^\circ$ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB. Έστω K,M,N τα μέσα των ΓΔ, ΒΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο KMNΔ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Το τετράπλευρο AKMN είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Η διάμεσος του τραπέζιου AKMN είναι ίση με $AB/2$.

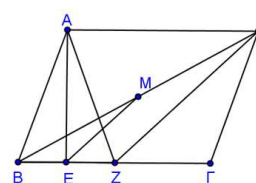


1790. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με τη γωνία του B να είναι ίση με 70° και το ύψος του AE. Έστω Z σημείο της ΒΓ ώστε $BE = EZ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο AZΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου AZΓΔ.

γ) Αν M το μέσο του ΒΔ, να αποδείξετε ότι $EM = \frac{A\Gamma}{2}$.



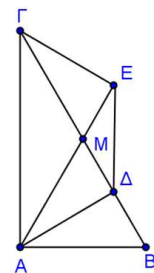
1791. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.

Φέρουμε το ύψος του AD και τη διάμεσό του AM . Από το Γ φέρουμε κάθετη στην ευθεία AM , η οποία την τέμνει στο E . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο AMB είναι ισόπλευρο.

β) $ME = MD = \frac{B\Gamma}{4}$

γ) Το $ADE\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



1797. α) Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε K, Λ, M, N τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος.

β) Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ τα μέσα K, Λ, M, N των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Για να σχηματίζεται ρόμβος το $AB\Gamma\Delta$ πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο;

Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας.

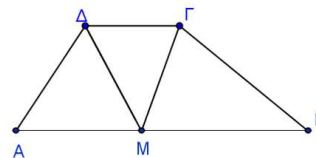
1815. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και

$AB = AD + B\Gamma$. Αν η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την AB στο σημείο M , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ADM είναι ισοσκελές.

β) Το τρίγωνο $MB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

γ) Η GM είναι διχοτόμος της γωνίας Γ του τραπέζιου.



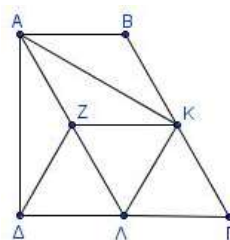
1821. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$) με

$B\Gamma = \Gamma\Delta = 2AB$ και K, Λ τα μέσα των $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$. Η παράλληλη από το K προς την AB τέμνει την $A\Lambda$ στο Z . Να αποδείξετε ότι:

α) $B\Gamma = 2\Delta Z$.

β) Το τετράπλευρο $ZK\Gamma\Lambda$ είναι ρόμβος.

γ) $\angle K\Lambda = 90^\circ$.



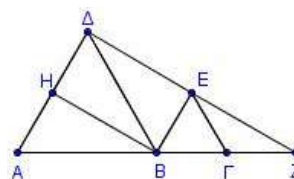
1829. Σε μια ευθεία (ϵ) θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία A, B, Γ έτσι ώστε $AB = 2B\Gamma$ και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε

ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$. Αν H είναι το μέσο του $A\Delta$ και η ευθεία DE τέμνει την (ϵ) στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $BH\Delta E$ είναι ορθογώνιο.

β) Το τρίγωνο ΓZE είναι ισοσκελές.

γ) Το τετράπλευρο $HE\Gamma A$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

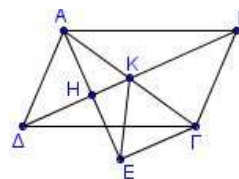


1830. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και K το σημείο τομής των διαγωνίων του. Φέρουμε AH κάθετη στην $B\Delta$ και στην προέκταση της AH (προς το H) θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $AH = HE$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο AKE είναι ισοσκελές.

β) Το τρίγωνο $AE\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

γ) Το τετράπλευρο $\Delta B\Gamma E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

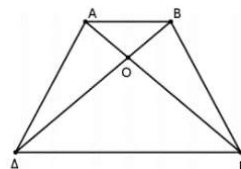


1834. Στο διπλανό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ ισχύουν: $AD = B\Gamma$, $AG = B\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AOB και $\Delta O\Gamma$ είναι ισοσκελή.

β) Να αποδείξετε ότι $\widehat{\Delta AB} = \widehat{A\Gamma B}$.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

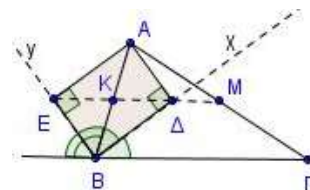


1838. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, η διχοτόμος του Bx της γωνίας B του τριγώνου $AB\Gamma$ και η διχοτόμος By της εξωτερικής γωνίας B . Αν Δ και E είναι οι προβολές της κορυφής A του τριγώνου $AB\Gamma$ στην Bx και By αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $A\Delta BE$ είναι ορθογώνιο.

β) Η ευθεία $E\Delta$ είναι παράλληλη προς τη $B\Gamma$ και διέρχεται από το μέσο M της $A\Gamma$.

γ) Το τετράπλευρο $KM\Gamma B$ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του είναι ίση με $\frac{3a}{4}$, όπου $a = B\Gamma$.



1841. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω O το σημείο τομής των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$. Φέρνουμε την AE κάθετη στη διαγώνιο $B\Delta$. Αν Z είναι το συμμετρικό του A ως προς τη διαγώνιο $B\Delta$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές.

β) $Z\Gamma = 2OE$

γ) Το τετράπλευρο με κορυφές B, Δ, Z και Γ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

1842. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Στην προέκταση της πλευράς AB παίρνουμε τμήμα $BE = AB$ και στην προέκταση της πλευράς $A\Delta$ τμήμα $\Delta Z = A\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τετράπλευρα $B\Delta\Gamma E$ και $B\Delta Z\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμα.

ii. Τα σημεία E, Γ και Z είναι συνευθειακά.

β) Αν K και Λ είναι τα μέσα των BE και ΔZ αντίστοιχα, τότε $K\Lambda \parallel \Delta B$ και $K\Lambda = \frac{3}{2} \Delta B$.

1856. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > B\Gamma$ και $B < 90^\circ$ θεωρούμε σημείο Z στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) τέτοιο ώστε $\Gamma Z = B\Gamma$. Αν E είναι σημείο της AB , τέτοιο ώστε $E\Gamma = \Gamma B$, να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία BEZ είναι ορθή.

β) Το τετράπλευρο $AE\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

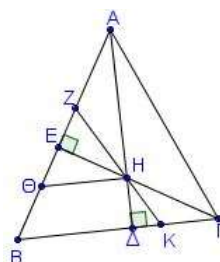
γ) Το τετράπλευρο $A\Gamma Z\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

1845. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{B} = 60^\circ$. Φέρνουμε τα ύψη $A\Delta$ και ΓE που τέμνονται στο H . Φέρνουμε KZ διχοτόμο της γωνίας EHA και ΘH κάθετο στο ύψος $A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α) $ZH = 2ZE$

β) Το τρίγωνο ΘZH είναι ισόπλευρο.

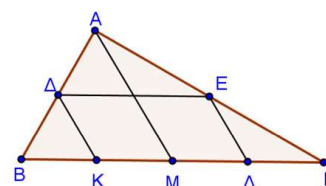
γ) Το τετράπλευρο ΘHKB είναι ισοσκελές τραπέζιο.



1852. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία K, M, Λ ώστε $BK = KM = M\Lambda = \Lambda\Gamma$. Αν τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $\Delta E\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Η διάμεσος του τραπέζιου $K\Delta AM$ ισούται με $\frac{3}{8} B\Gamma$.



1853. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και $AB = B\Gamma = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας B ,

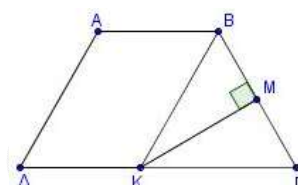
η οποία τέμνει το $\Delta\Gamma$ στο K και η κάθετη από το K προς τη $B\Gamma$ το τέμνει στο M .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του $AB\Gamma\Delta$.

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $ABK\Delta$ είναι ρόμβος.

ii. Το σημείο M είναι το μέσο του $B\Gamma$.



1854. Έστω τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και M το μέσο της πλευράς ΔA . Προεκτείνουμε το τμήμα ΔA (προς την πλευρά του A) κατά τμήμα $AN = \frac{A\Delta}{2}$. Φέρουμε τα

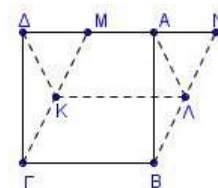
τμήματα ΓM και BN και θεωρούμε τα μέσα τους K και Λ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $MNB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Το τετράπλευρο $A\Delta K\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Το τετράπλευρο $AMK\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

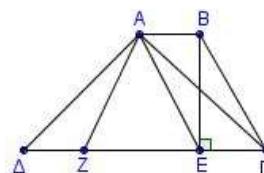


1860. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma = 4AB$ και $B\Gamma = 2AB$. Θεωρούμε σημείο Z της $\Gamma\Delta$, ώστε $\Delta Z = AB$. Αν η γωνία Γ είναι 60° και BE το ύψος του τραπέζιου, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Το τρίγωνο ZAE είναι ισόπλευρο.

γ) Τα τρίγωνα ΔAZ και ΓAE είναι ίσα.



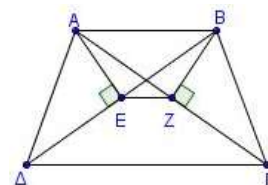
1861. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma = AB$. Φέρουμε τμήματα AE και BZ κάθετα στις διαγωνίες $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Z και E είναι μέσα των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα.

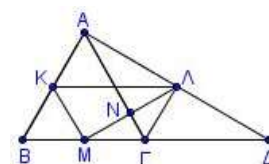
β) $AE = BZ$.

γ) Το τετράπλευρο $AEZB$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

δ) Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .



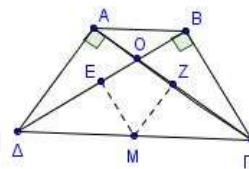
1863. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Αν M, K και Λ είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$, AB και $A\Delta$ αντίστοιχα, τότε:



- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΔ.
 β) Να αποδείξετε ότι:
 i. Το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή.
 ii. Το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ορθογώνιο.

1867. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η ΑΓ είναι κάθετη στην ΑΔ και η ΒΔ είναι κάθετη στη ΒΓ. Θεωρούμε τα μέσα Μ, Ε και Ζ των ΓΔ, ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) $ME = MZ$.
 β) Η ΜΖ είναι κάθετη στην ΑΓ.
 γ) Τα τρίγωνα ΜΔΕ και ΜΖΓ είναι ίσα.
 δ) Η ΟΜ είναι μεσοκάθετος του ΕΖ.



1884. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = \Gamma\Gamma$) και ΑΔ διάμεσος. Στο τμήμα ΑΔ θεωρούμε τυχαίο σημείο Κ από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα ΚΖ και ΚΕ κάθετα στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΒΓ και ΚΖΕ είναι ισοσκελή.
 β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
 γ) Ένας μαθητής στο α) i. ερώτημα έδωσε την εξής απάντηση:
 « Το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος στη βάση του ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ και μεσοκάθετος του ΒΓ. Οπότε το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές.

Τα τρίγωνα $\triangle ΑΒΚ$ και $\triangle ΑΓΚ$ έχουν

- $BK = K\Gamma$
- $\angle BAK = \angle GAK$ επειδή ΑΚ διχοτόμος της γωνίας Α
- $\angle ABK = \angle AGK$ ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία Πλευρά Γωνία.>>

Ο καθηγητής είπε ότι η απάντησή του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία- Πλευρά –Γωνία διατηρώντας τις πλευρές ΒΚ και ΚΓ.

1885. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < \Gamma\Gamma$ και το ύψος του ΑΗ. Αν Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α) το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
 β) οι γωνίες ΗΔΖ και ΗΕΖ είναι ίσες. γ) οι γωνίες ΕΔΖ και ΕΗΖ είναι ίσες.

1893. Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $AB > B\Gamma$ τέτοιο, ώστε οι διαγώνιοί του να σχηματίζουν γωνία 60° . Από το Δ φέρουμε ΔΜ κάθετη στην ΑΓ.

- α) Να αποδείξετε ότι:
 i. το σημείο Μ είναι μέσο του ΑΟ όπου Ο το κέντρο του ορθογωνίου.
 ii. $AM = \frac{1}{4} A\Gamma$
 β) Αν από το Γ φέρουμε ΓΝ κάθετη στη ΒΔ, να αποδείξετε ότι το ΜΝΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

13519. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > AD$. Στην AB θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $AE = AD$. Από το μέσο M της DE φέρουμε παράλληλη προς την $\Delta\Gamma$ που τέμνει την $B\Gamma$ στο K .

α) Να αποδείξετε $AM \perp DE$.

β) Να αποδείξετε ότι $2MK = 2AB - AD$.

γ) Φέρνουμε την EK που τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο Z . Να αποδείξετε ότι $\Gamma Z = AB - AD$.

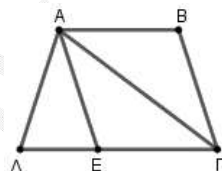
13539. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\hat{A} = 108^\circ$. Στη βάση $\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημείο E , ώστε οι $A\Gamma$, AE να τριχοτομούν τη γωνία $\hat{A}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$.

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

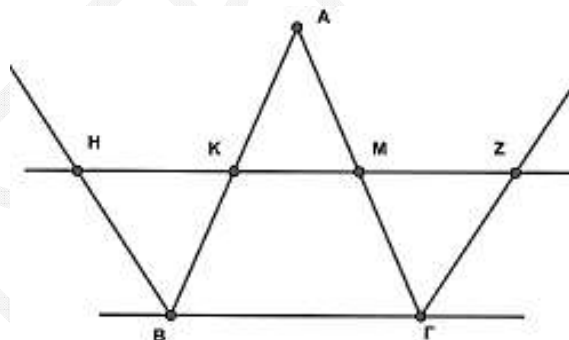
ii. Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι ρόμβος.



13838. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), με K, M τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία K και M τέμνει τις εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών B και Γ στα σημεία H και Z αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $KM\Gamma B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma ZH$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



6ο Κεφάλαιο: Εγγεγραμμένα σχήματα

- Αν η κορυφή της είναι το κέντρο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο, τότε η γωνία λέγεται **επίκεντρη**.

- Αν η κορυφή της γωνίας είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο, τότε η γωνία λέγεται **εγγεγραμμένη** γωνία του κύκλου.

- Αν η κορυφή της γωνίας είναι σημείο του κύκλου, η μία της πλευρά είναι τέμνουσα και η άλλη εφαπτομένη του κύκλου, τότε η γωνία λέγεται γωνία **χορδής και εφαπτομένης**.

- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο.

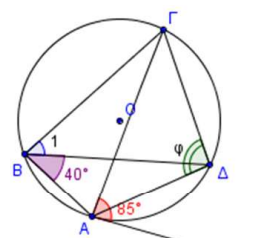
- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

- Η γωνία που σχηματίζεται από μια χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής, ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής.

1530. Στο διπλανό σχήμα η Αx είναι εφαπτομένη του κύκλου (Ο,ρ) σε σημείο του Α και επιπλέον $\widehat{\Gamma \hat{A} x} = 85^\circ$ και $\widehat{\Delta \hat{B} A} = 40^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{B_1} = 45^\circ$.

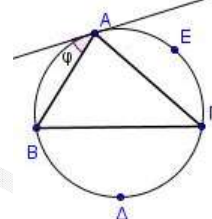
β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\phi}$.



1561. Στο διπλανό σχήμα, η εφαπτομένη του κύκλου στην κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζει γωνία $\phi = 30^\circ$ με την πλευρά ΑΒ. Αν το μέτρο του τόξου ΒΔΓ είναι 160° ,

α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

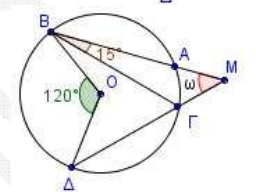
β) να βρείτε το μέτρο του τόξου ΑΕΓ.



1663. Στο διπλανό σχήμα η επίκεντρη γωνία ΒΟΔ είναι 120° και η γωνία ΓΒΑ είναι 15° .

α) Να υπολογίσετε τη γωνία ΒΓΔ.

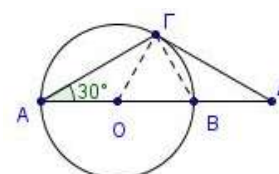
β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ω είναι 45° .



1626. Δίνεται κύκλος (Ο, R) διαμέτρου ΑΒ και χορδή ΑΓ τέτοια, ώστε $\widehat{B \hat{A} \Gamma} = 30^\circ$. Στο σημείο Γ φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου ΑΒ (προς το Β) στο σημείο Δ.

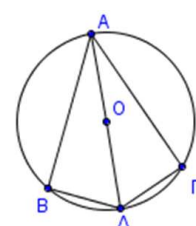
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΟΓΔ.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΒΔ είναι ίσα.



1581. Σε κύκλο κέντρου Ο δίνονται οι χορδές ΑΒ και ΑΔ τέτοιες ώστε η γωνία ΒΑΔ να είναι 44° . Θεωρούμε τυχαίο σημείο Γ του κύκλου και σχηματίζουμε το τετράπλευρο ΒΓΔΟ.

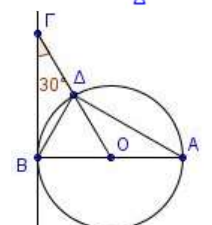
α) Να υπολογίσετε τη γωνία x. β) Να αποδείξετε ότι η γωνία y είναι 136° .



1663. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Αν η διάμετρος ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τόξα ΒΔ και ΔΓ είναι ίσα.

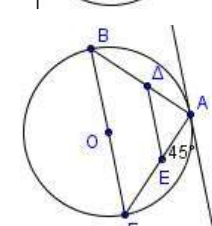
β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα.



1665. Θεωρούμε κύκλο(Ο, ρ) και διάμετρό του ΑΒ. Στην εφαπτομένη του κύκλου στο Β θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο, ώστε η γωνία ΒΓΟ να είναι ίση με 30° . Αν η ΟΓ τέμνει τον κύκλο στο Δ, να αποδείξετε ότι:

α) $ΟΓ = 2ΟΑ$

β) $ΒΓ = ΑΔ$



1672. Θεωρούμε κύκλο διαμέτρου ΒΓ. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του Α ώστε να σχηματίζει με τη χορδή ΑΓ γωνία 45° . Φέρουμε επίσης μια παράλληλη ευθεία στη ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε.

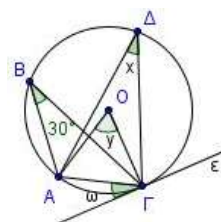
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΓ.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

1695. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου (Ο, ρ) στο σημείο Γ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες x, y και ω δικαιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΟΑΓ ως προς τις πλευρές.

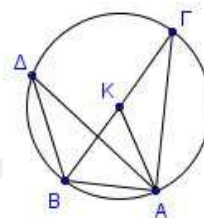


1696. Έστω κύκλος κέντρου Κ, μια διάμετρός του ΒΓ και σημείο Α του κύκλου τέτοιο, ώστε $BA = K\Gamma$. Αν Δ τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό των Β και Γ,

α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΚΑ είναι ισόπλευρο.

β) να υπολογίσετε τη γωνία ΒΔΑ.

γ) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.



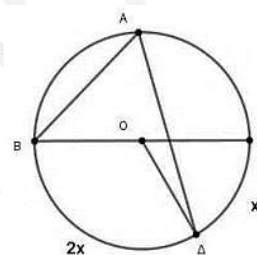
1703. Έστω κύκλος κέντρου Ο και διαμέτρου ΒΓ. Θεωρούμε τα σημεία Α και Δ του κύκλου εκατέρωθεν της ΒΓ, τέτοια ώστε το τόξο ΒΔ να είναι διπλάσιο του τόξου ΔΓ.

Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο x του τόξου ΓΔ

β) τη γωνία ΒΟΔ,

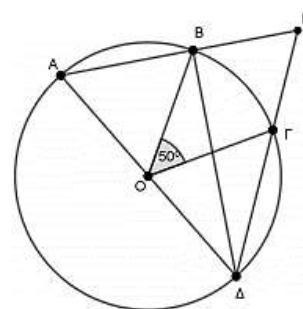
γ) τη γωνία ΒΑΔ.



12642. Σε κύκλο με κέντρο το Ο, παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ, ώστε η ΑΔ να είναι διάμετρος και η γωνία ΒΟΓ να ισούται με 50° . Αν η προέκταση της ΑΒ προς το Β, τέμνει την προέκταση της ΔΓ προς το Γ στο Ε, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας, να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της γωνίας ΒΔΓ.

β) το μέτρο της γωνία ΑΕΔ.

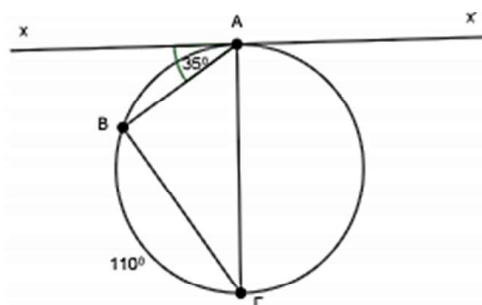


12637. Στο διπλανό σχήμα η xx' είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Α και επιπλέον ισχύουν:

$\widehat{BAx} = 35^\circ$ και $\widehat{B\Gamma} = 110^\circ$.

α) Ποιο είναι το μέτρο της γωνίας Γ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

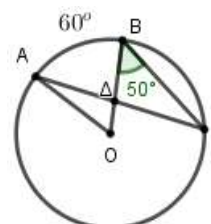


12638. Στον κύκλο του σχήματος, το Ο είναι το κέντρο του, το τόξο ΑΒ ισούται με 60° και η γωνία Β ισούται με 50° .

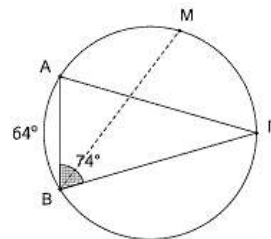
Αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας, να υπολογίσετε:

α) πόσες μοίρες είναι η γωνία Γ.

β) πόσες μοίρες είναι η γωνία ΑΔΟ.



13441. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο, $\hat{B} = 74^\circ$, το μέτρο του τόξου AB που δεν περιέχει το σημείο Γ ισούται με 64° και M είναι το μέσο του τόξου $A\Gamma$.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Ποιο είναι το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις πλευρές του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

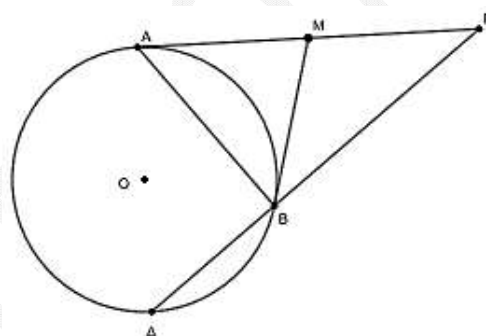
γ) Να αποδείξετε ότι η BM είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$.

13740. Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε μια τυχαία χορδή του AB , την οποία προεκτείνουμε προς το μέρος του B κατά ίσο τμήμα $B\Gamma$. Φέρουμε κάθετη στην $A\Gamma$ στο σημείο της B που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ . Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta A = \Delta \Gamma$

β) Η $A\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου.

13747. Από σημείο M εξωτερικό ενός κύκλου κέντρου O φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB . Προεκτείνουμε το τμήμα AM προς το μέρος του M και παίρνουμε τμήμα $M\Gamma = AM$. Από το σημείο Γ φέρουμε την τέμνουσα $\Gamma B\Delta$ του κύκλου. Να αποδείξετε ότι:

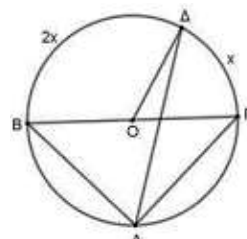


α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

β) Τα σημεία A και Δ είναι αντιδιαμετρικά.

13753. Δίνεται κύκλος (O, ρ) με διάμετρο $B\Gamma$. Έστω A και Δ σημεία του κύκλου τα οποία βρίσκονται σε διαφορετικά ημικύκλια ως προς τη διάμετρο $B\Gamma$. Τα μέτρα των τόξων $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ είναι $2x$ και x αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το μέτρο:

α) της γωνίας BAG . **β)** x του τόξου $\Gamma\Delta$. **γ)** της γωνίας $BO\Delta$.

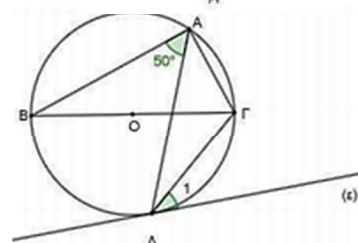


13754. Δίνεται κύκλος (O, ρ) με διάμετρο $B\Gamma$ και τα σημεία A, Δ του κύκλου εκατέρωθεν της διαμέτρου $B\Gamma$ έτσι ώστε $\hat{B\Delta A} = 50^\circ$. Φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ϵ) στον κύκλο στο σημείο Δ . Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας :

α) BAG

β) $B\Gamma\Delta$

γ) Δ_1

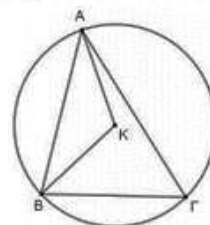


13756. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο Σε κύκλο (K, ρ) . Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{AKB} = 2\hat{A\Gamma B}$

β) το τρίγωνο AKB είναι ισοσκελές.

γ) $\hat{KAB} + \hat{A\Gamma B} = 90^\circ$.



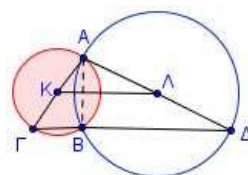
4ο Θέμα

1717. Δύο κύκλοι (K, ρ) , (Λ, R) τέμνονται σε δύο σημεία A, B . Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του A στους δύο κύκλους, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{A\Gamma B} = 90^\circ$

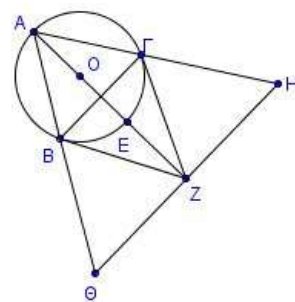
β) τα σημεία Γ, B, Δ είναι συνευθειακά.

γ) το τετράπλευρο $K\Lambda\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.



1720. Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο O και ακτίνα ρ . Τα τμήματα ΓZ και BZ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου στα σημεία Γ και B αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΘH είναι κάθετο στο τμήμα AZ στο Z , να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $ZB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.
- β) Το τετράπλευρο $AGZB$ είναι ρόμβος.
- γ) Το τετράπλευρο $B\Gamma H\Theta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



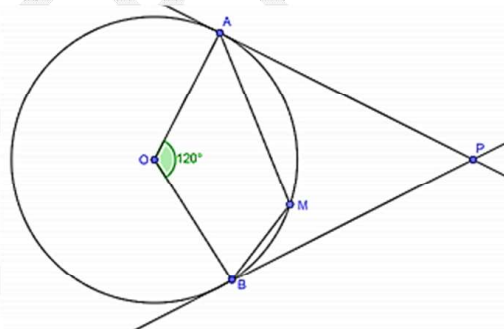
1739. Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε τα ίσα τόξα AB και $A\Gamma$, το καθένα ίσο με 120° . Έστω Δ και E τα μέσα των τόξων AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.
- β) Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και AHE είναι ίσα και να υπολογίσετε τις γωνίες τους.
- γ) Η χορδή ΔE τριχοτομείται από τις χορδές AB και $A\Gamma$.



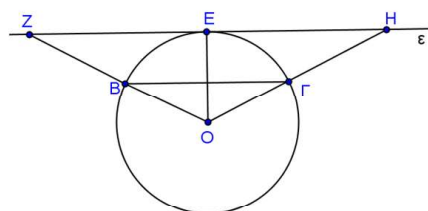
1768. Δίνεται κύκλος (O, ρ) και μια επίκεντρη γωνία AOB ίση με 120° . Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B τέμνονται στο P . Θεωρούμε σημείο M του τόξου AB και φέρουμε τις χορδές AM και BM , οι οποίες προεκτείνονται τέμνουν τις PB και PA στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο APB είναι ισόπλευρο.
- β) $\widehat{MAB} + \widehat{MBA} = 60^\circ$.
- γ) Για ποια θέση του M είναι $AM \perp BP$;



1772. Έστω κύκλος (O, ρ) και E το μέσον του τόξου του $B\Gamma$. Μια ευθεία (ϵ) εφάπτεται στο κύκλο στο E . Οι προεκτάσεις των $OB, O\Gamma$ τέμνουν την ευθεία (ϵ) στα σημεία Z και H αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) $B\Gamma \parallel ZH$
- β) $OZ = OH$
- γ) Αν B το μέσον του OZ

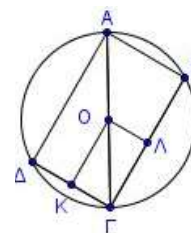


i. να αποδείξετε ότι $\widehat{BEZ} = \frac{\widehat{ZOH}}{4}$.

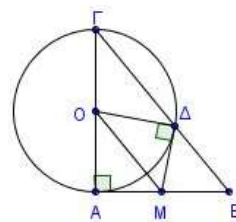
ii. να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ZOH .

1848. Δίνεται κύκλος (O, ρ) και $A\Gamma$ μια διάμετρος του. Θεωρούμε τις χορδές $AD = B\Gamma$. Έστω K και Λ τα μέσα των χορδών $\Delta\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Οι χορδές AB και $\Delta\Gamma$ είναι παράλληλες.
- β) Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.
- γ) Η $B\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου.
- δ) Το τετράπλευρο $ΟΛΓΚ$ είναι ορθογώνιο.



1883. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΓAB ($\hat{A} = 90^\circ$). Με διάμετρο την πλευρά του $A\Gamma$ φέρουμε κύκλο που τέμνει την υποτείνουσα $B\Gamma$ στο Δ . Από το Δ φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα το οποίο τέμνει την AB στο M . Να αποδείξετε ότι:

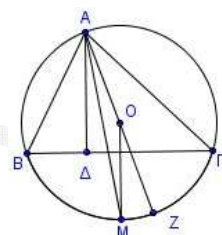


α) $\hat{\Gamma A \Delta} = \hat{B}$

β) Το τρίγωνο ΔMB είναι ισοσκελές.

γ) Το M είναι το μέσο του AB .

1892. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O . Θεωρούμε το μέσο M του κυρτογώνιου τόξου $B\Gamma$ και το ύψος AD του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:



α) AM διχοτόμος της γωνίας ΔAO .

β) $\hat{O A \Gamma} = \hat{\Delta A B}$ γ) $\hat{\Delta A O} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$

1897. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) . Έστω σημείο Δ του τόξου AB τέτοιο, ώστε $\Delta B \perp B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta \perp A\Gamma$.

β) Έστω H το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta BH$ είναι παραλληλόγραμμο.

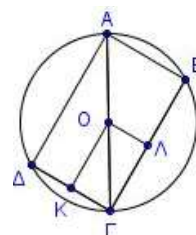
γ) Αν M το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $OM = \frac{AH}{2}$.

12419. Δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, r) , με $R > r$, τέμνονται στα σημεία A και B . Από το σημείο A φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διάκεντρο των κύκλων, η οποία τέμνει τους κύκλους (K, R) και (Λ, r) στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\Delta = 2K\Lambda$

β) Τα σημεία B και Γ είναι αντιδιαμετρικά.

1848. Δίνεται κύκλος (O, ρ) και $A\Gamma$ μια διάμετρος του. Θεωρούμε τις χορδές $A\Delta = B\Gamma$. Έστω K και Λ τα μέσα των χορδών $\Delta\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



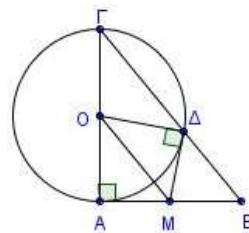
α) Οι χορδές AB και $\Delta\Gamma$ είναι παράλληλες.

β) Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.

γ) Η $B\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου.

δ) Το τετράπλευρο $OL\Gamma K$ είναι ορθογώνιο.

1883. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΓAB ($\hat{A} = 90^\circ$). Με διάμετρο την πλευρά του $A\Gamma$ φέρουμε κύκλο που τέμνει την υποτείνουσα $B\Gamma$ στο Δ . Από το Δ φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα το οποίο τέμνει την AB στο M . Να αποδείξετε ότι:



α) $\hat{\Gamma A \Delta} = \hat{B}$

β) Το τρίγωνο ΔMB είναι ισοσκελές.

γ) Το M είναι το μέσο του AB .

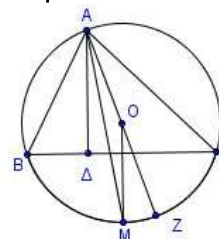
1892. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O .

Θεωρούμε το μέσο M του κυρτογώνιου τόξου $B\Gamma$ και το ύψος AD του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) AM διχοτόμος της γωνίας ΔAO .

β) $\widehat{OAG} = \widehat{DAB}$

γ) $\widehat{DAO} = \widehat{B} - \widehat{\Gamma}$



1897. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) . Έστω σημείο Δ του τόξου AB τέτοιο, ώστε $\Delta B \perp B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta \perp A\Gamma$.

β) Έστω H το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta BH$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Αν M το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $OM = \frac{AH}{2}$.

Το εγγράψιμο τετράπλευρο

- Ένα τετράπλευρο λέγεται εγγράψιμο όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να διέρχεται και από τις τέσσερις κορυφές του.

- Ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

(i) Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

(ii) Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

(iii) Μία εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.

- Ένα τετράπλευρο, του οποίου οι πλευρές εφάπτονται στον ίδιο κύκλο, λέγεται περιγεγραμμένο στον κύκλο αυτό, ενώ ο κύκλος λέγεται εγγεγραμμένος στο τετράπλευρο αυτό.

(i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.

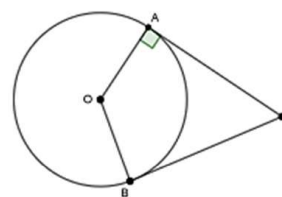
(ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

12641. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα 4 cm. Από σημείο P εκτός του κύκλου φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB προς τον κύκλο. Επίσης η γωνία APB ισούται με 60° .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $PAOB$ είναι εγγράψιμο.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας APO .

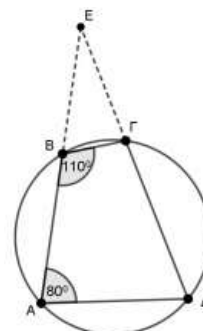
γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος OP .



12643. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και οι πλευρές του AB και $\Delta\Gamma$ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο E . Αν η γωνία A του τετραπλεύρου ισούται με 80° και η γωνία B ισούται με 110° , να υπολογίσετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

α) το μέτρο της γωνίας $E\Gamma B$.

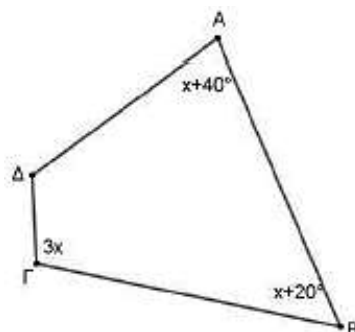
β) το μέτρο της γωνίας $BE\Gamma$.



13818. Δίνεται το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ το οποίο είναι εγγράψιμο. Οι γωνίες A, B, Γ έχουν αντίστοιχα μέτρα $x + 40^\circ, x + 20^\circ, 3x$. Να υπολογίσετε :

α) πόσες μοίρες είναι το x .

β) τα μέτρα των γωνιών του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.



4ο Θέμα

1712. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και έστω AB μια διάμετρος του, Γ το μέσο του ενός ημικυκλίου του και Δ τυχαίο σημείο του άλλου. Στην προέκταση της ΔB (προς το B) θεωρούμε σημείο E ώστε $BE = \Delta\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $\Delta\Delta\Gamma$ και $BE\Gamma$ είναι ίσα.

ii. Η $\Gamma\Delta$ είναι κάθετη στην ΓE .

β) Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι το αντιδιαμετρικό του Γ , η ΓE είναι εφαπτομένη του κύκλου.

1753. Δίνεται κύκλος (O, ρ) και σημείο M εξωτερικό του. Από το M φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB του κύκλου και έστω ότι το σημείο Γ είναι το συμμετρικό του O ως προς την ευθεία MB .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AMBO$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

β) Να προσδιορίσετε το κέντρο Λ του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου $AMBO$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να αποδείξετε ότι $BA \parallel M\Gamma$.

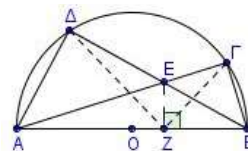
1769. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου AB και δύο χορδές του $A\Gamma$ και $B\Delta$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο E . Φέρουμε $EZ \perp AB$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{\Delta A \Gamma} = \widehat{\Delta B \Gamma}$

β) Τα τετράπλευρα $A\Delta EZ$ και $EZB\Gamma$ είναι εγγράψιμα.

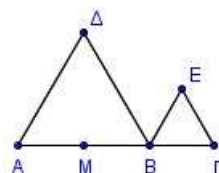
γ) Η EZ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta Z \Gamma}$.



1774. Έστω A, B, Γ συνευθειακά σημεία με $AB = 2B\Gamma$. Θεωρούμε το μέσο M της AB . Προς το ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $\Delta AB, BE\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $A\Delta EB$ είναι τραπέζιο ($A\Delta \parallel BE$).

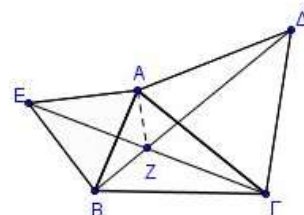
β) Τα τρίγωνα $\Delta MB, \Delta EB$ είναι ίσα. **γ)** Το τετράπλευρο ΔMBE είναι εγγράψιμο.



1776. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα ισόπλευρα τρίγωνα $AEB, A\Gamma\Delta$. Ονομάζουμε Z το σημείο τομής των τμημάτων $B\Delta, \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $A\Gamma E$ και $AB\Delta$ είναι ίσα και να γράψετε τα ζεύγη των ίσων γωνιών.

β) Τα τετράπλευρα $AZ\Gamma\Delta, AZBE$ είναι εγγράψιμα. **γ)** $\widehat{BZ\Gamma} = 120^\circ$.

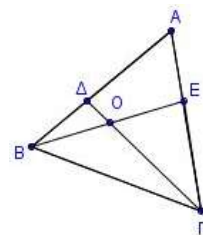


1779. Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ και E των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ώστε να είναι $AD = AE$. Έστω O το σημείο τομής των $\Gamma\Delta$ και BE .

α) Να αποδείξετε ότι: **i.** $\widehat{B\hat{E}\Gamma} = \widehat{\Gamma\hat{\Delta}A}$. **ii.** $\widehat{B\hat{O}\Gamma} = 120^\circ$.

β) Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο $AEO\Delta$ είναι εγγράψιμο.

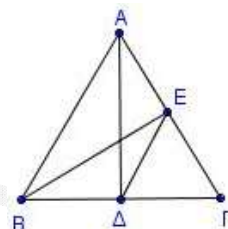
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



1799. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και AD, BE τα ύψη του. Να αποδείξετε ότι:

α) $B\Gamma = 2ED$ **β)** $\widehat{B\hat{E}\Delta} = \frac{\widehat{A}}{2}$.

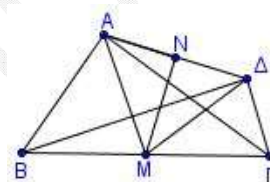
γ) Το τετράπλευρο $AEDB$ είναι εγγράψιμο. **δ)** $\widehat{A\hat{B}E} = \widehat{A\hat{\Delta}E}$.



1807. Δίνονται ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ με $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^\circ$ και M, N τα μέσα των $B\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $AM = M\Delta$ **β)** Η MN είναι κάθετη στην $A\Delta$.

γ) $\widehat{\Gamma\hat{B}\Delta} = \widehat{\Gamma\hat{A}\Delta}$.



1847. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Έστω σημείο A εξωτερικό του κύκλου και τα εφαπτόμενα τμήματα AB και $A\Gamma$ ώστε να ισχύει $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 60^\circ$. Έστω ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο Δ τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα E και Z αντίστοιχα.

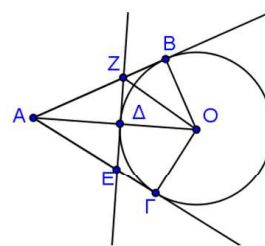
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ABO\Gamma$ είναι εγγράψιμο με $OA = 2OB$.

β) Το τρίγωνο AEZ είναι ισόπλευρο.

γ) $2ZB = AZ$.

δ) Το τετράπλευρο $EZB\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



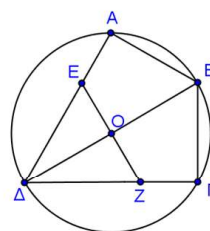
1864. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και ο περιγεγραμμένος του κύκλος (O, ρ) ώστε η διαγώνιος του ΔB να είναι διάμετρος του κύκλου. Η γωνία B είναι διπλάσια της Δ και οι πλευρές AB και $B\Gamma$ είναι ίσες. Φέρουμε κάθετη στη $B\Delta$ στο O , η οποία τέμνει τις πλευρές $A\Delta$ και $\Gamma\Delta$ στα E και Z αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

β) Να συγκρίνεται τα τρίγωνα ΔAB και $\Delta \Gamma B$.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma O$ είναι ρόμβος.

δ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABOE$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

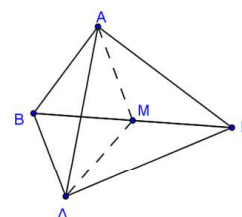


1886. Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) και $\Delta B\Gamma$

($\widehat{\Delta} = 90^\circ$) (όπου A και Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$) και το μέσο M της $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

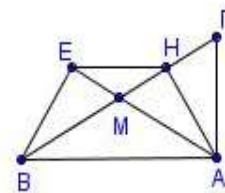
α) το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ισοσκελές.



$$\beta) \widehat{A\hat{M}\Delta} = 2\widehat{A\hat{\Gamma}\Delta} \quad \gamma) \widehat{\Gamma\hat{B}\Delta} = \widehat{\Gamma\hat{A}\Delta}$$

1896. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) έχουμε ότι $\widehat{B} = 30^\circ$.

Φέρουμε το ύψος AH και τη διάμεσο AM του τριγώνου $AB\Gamma$. Από την κορυφή B φέρνουμε κάθετη στη διάμεσο AM , η οποία την τέμνει στο σημείο E όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να αποδείξετε ότι:



$$\alpha) BE = \frac{AB}{2}$$

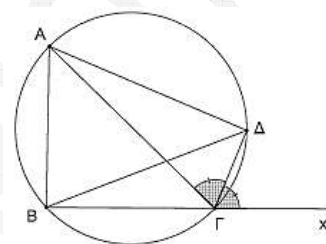
$$\beta) AH = BE.$$

$\gamma)$ το τετράπλευρο $AHEB$ είναι εγγράψιμο.

$$\delta) EH \parallel AB.$$

13444. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο σε κύκλο

και οι διαγώνιοί του $A\Gamma$ και $B\Delta$. Η γωνία $\widehat{\Delta\hat{\Gamma}x}$ είναι εξωτερική γωνία του τετραπλεύρου και η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A\hat{\Gamma}x}$.



$$\alpha) \text{ Να αποδείξετε ότι } \widehat{B\hat{A}\Delta} = \frac{1}{2} \widehat{A\hat{\Gamma}x}.$$

$\beta)$ Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές και να προσδιορίσετε τις ίσες πλευρές του.

$\gamma)$ Αν η $A\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου, να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\widehat{A\hat{\Gamma}B}$ και $\widehat{B\hat{\Delta}\Gamma}$ είναι συμπληρωματικές.

13538. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Gamma\Delta$ με $AB = A\Gamma = E\Gamma = E\Delta$, όπου Δ είναι το μέσο της $A\Gamma$ και

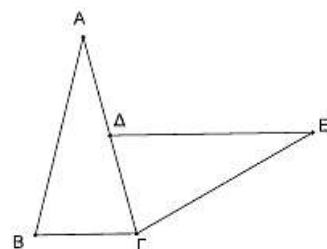
$$B\Gamma = \frac{AB}{2}.$$

$\alpha)$ Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ είναι ίσα.

$\beta)$ Αν η προέκταση της $E\Delta$ προς το Δ τέμνει την AB στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι:

i. Το σημείο Z είναι το μέσο της AB .)

$$\text{ii. } \widehat{E\hat{A}\Gamma} = \widehat{E\hat{Z}\Gamma}$$



13670. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 2AB$. Έστω Δ το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και E το μέσο του τμήματος $B\Delta$. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την $A\Gamma$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

$\alpha)$ Τα τρίγωνα ABE και $BZ\Delta$ είναι ίσα.

$\beta)$ Το τετράπλευρο $ZA\Delta E$ είναι εγγράψιμο.

$\gamma)$ Η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{E\hat{A}\Gamma}$.

13671. Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{B} < \widehat{\Gamma}$) θεωρούμε τα μέσα Δ , E , Z των πλευρών AB ,

$A\Gamma$, $B\Gamma$ αντίστοιχα. Έστω H η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην πλευρά AB . Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) HE = E\Gamma \text{ και } HZ = Z\Gamma.$$

β) $\hat{Z\Delta E} = \hat{Z\text{H}\text{E}}$

γ) Το τετράπλευρο ZΔHE είναι εγγράψιμο.

13521. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ABΓ ($AB < AG$) φέρουμε το ύψος AΔ. Έστω Κ,Λ,Μ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) ΚΛ // ΒΓ.

β) i. ΜΛ = ΚΔ

ii. ΚΜ = ΔΛ.

γ) Το ΚΛΜΔ είναι ένα εγγράψιμο τετράπλευρο.

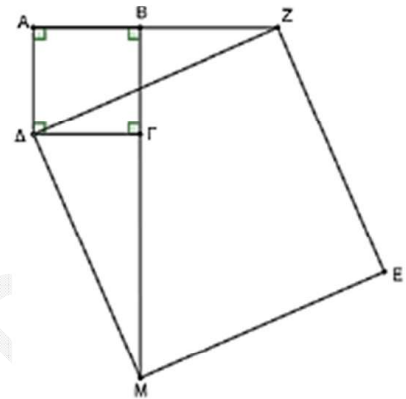
13847. Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ προς το Β κατά τμήμα ΒΖ. Επίσης προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το Γ κατά τμήμα ΓΜ = ΑΖ. Στη συνέχεια, θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο ΔΜΕΖ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ είναι ίσα.

β) το τετράπλευρο ΔΜΕΖ είναι τετράγωνο.

γ) το τετράπλευρο ΒΖΕΜ είναι εγγράψιμο.

δ) οι γωνίες ΒΜΖ και ΒΕΖ είναι ίσες.



13840. Δίνεται κύκλος (Ο, R) και μία ευθεία $x'x$ η οποία έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο Α. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ της ημιευθείας Αx. Αν για κάποιο σημείο Β του κύκλου ισχύει η

σχέση $MA = MB$, να αποδείξετε ότι:

α) το ΜΒ είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (Ο, R).

β) η διχοτόμος της γωνίας ΒΜx είναι κάθετη στη ΜΟ.

γ) το τετράπλευρο ΑΟΒΜ είναι εγγράψιμο.

δ) το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας ΒΜx.

Επαναληπτικά διαγωνίσματα στη Γεωμετρία

1ο Διαγώνισμα

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α)** Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες είναι ίσες.
 - β)** Αν δύο απέναντι πλευρές τετραπλεύρου είναι παράλληλες τότε αυτό είναι τραπέζιο.
 - γ)** Οι διαγώνιες του ρόμβου είναι ίσες.
 - δ)** Αν οι διαγώνιες ενός τετραπλεύρου είναι κάθετες τότε το τετράπλευρο αυτό είναι ρόμβος.
 - ε)** Σε κάθε παραλληλόγραμμο δύο διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
- A2.** Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου, είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Προεκτείνουμε τις ίσες πλευρές του AB και $A\Gamma$ κατά τμήματα

$B\Delta = AB$ και $\Gamma E = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

Γ1. $BE = \Gamma\Delta$

Γ2. Τα σημεία Δ, E ισαπέχουν από τη $B\Gamma$.

Γ3. $A\hat{\Delta}E = A\hat{E}\Delta$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} = 40^\circ$ και σημείο M της βάσης του $B\Gamma$. Φέρουμε $ME \parallel AB$ (E σημείο του $A\Gamma$) και $M\Delta \parallel A\Gamma$ (Δ σημείο του AB). Να αποδείξετε ότι:

Γ1. $M\Delta + ME = AB$.

Γ2. $\hat{B} = 70^\circ$

Γ3. Αν το M είναι μέσο του $B\Gamma$ τότε η AM είναι μεσοκάθετος του ΔE .

Γ4. $A\hat{E}\Delta = 70^\circ$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$. Στη προέκταση της $A\Gamma$ προς το μέρος του A θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $A\Delta = A\Gamma$. Έστω K, Λ τα μέσα των $B\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $B\hat{A}K = B\hat{A}\Lambda = 30^\circ$

Δ2. $AK = A\Lambda$

Δ3. Το τρίγωνο $AK\Lambda$ είναι ισόπλευρο.

Δ4. Τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $AK\Lambda$ έχουν το ίδιο βαρύκεντρο.

2ο Διαγώνισμα

Θέμα Α

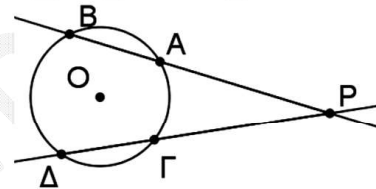
A1. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου, ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α) Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.
- β) Στο ισοσκελές τρίγωνο κάθε διάμεσός του είναι ύψος και διχοτόμος
- γ) Σε κάθε ρόμβο οι διαγώνιες είναι ίσες.
- δ) Η διάμεσος κάθε τραπεζίου ισούται με το άθροισμα των βάσεων του.
- ε) Το τετράγωνο είναι και ρόμβος.

Θέμα Β

Έστω κύκλος κέντρου O και P ένα σημείο στο εξωτερικό του. Από το P φέρουμε ευθείες που τέμνουν τον κύκλο στα σημεία A, B, Γ, Δ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα έτσι ώστε $PA = P\Gamma$.



B1. Να δείξετε ότι η OP είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{AP\Gamma}$.

B2. Να δείξετε ότι το O ισαπέχει από τα AB και $\Gamma\Delta$.

B3. Να δείξετε ότι $AB = \Gamma\Delta$.

B4. Έστω ότι η OP τέμνει το τόξο $A\Gamma$ στο K . Θεωρούμε την εφαπτομένη του κύκλου στο K που τέμνει τις δύο ευθείες στα H και Θ . Να δείξετε ότι το τρίγωνο $PH\Theta$ είναι ισοσκελές.

Θέμα Γ

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και έστω $B\Delta, \Gamma E$ ύψη του. Να αποδείξετε ότι:

Γ1. $B\Delta = \Gamma E$

Γ2. Το τρίγωνο $A\epsilon\Delta$ είναι ισοσκελές.

Γ3. $\widehat{B} = \widehat{A\epsilon\Delta} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$

Θέμα Δ

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και έστω Δ, E, Z τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma A$ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε το τμήμα ΔE κατά $E\Theta = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $A\Gamma = 2\Delta E$

Δ2. Το τετράπλευρο $A\Delta\Theta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

Δ3. Τα τμήματα $A\Theta, \Delta\Gamma, EZ$ συντρέχουν σε σημείο K .

Δ4. $KZ = \frac{1}{4} A\Gamma$.

3ο Διαγώνισμα

Θέμα Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α)** Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μικρότερη από κάθε μία από τις απέναντι εσωτερικές.
- β)** Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι μεταξύ τους ίσα.
- γ)** Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.
- δ)** Κάθε ρόμβος που έχει ίσες διαγώνιες είναι τετράγωνο.
- ε)** Οι διαγώνιες κάθε παραλληλογράμμου είναι ίσες.

A2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

Θέμα Β

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις της $B\Gamma$ προς τα B και Γ θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα τέτοια, ώστε $B\Delta = AB$ και $\Gamma E = A\Gamma$. Έστω K και Λ οι προβολές των Δ και E στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

B1. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

B2. Να δείξετε ότι τα Δ , E ισαπέχουν από τις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

B3. Να δείξετε ότι $B\Lambda = \Gamma K$.

Θέμα Γ

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} = 40^\circ$. Έστω ότι οι διχοτόμοι του $B\Delta$ και ΓE τέμνονται στο Θ . Να αποδείξετε ότι:

Γ1. $\hat{B} = 70^\circ$

Γ2. $B\hat{\Theta}\Gamma = 110^\circ$

Γ3. $\Delta E // B\Gamma$

Γ4. $B\hat{\Delta}\Gamma = 75^\circ$

Θέμα Δ

Έστω ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και $A\Delta$ η διάμεσός του. Έστω E το μέσο της AB και Z το σημείο τομής της παράλληλης από το Δ προς την AB με την $A\Gamma$.

Δ1. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $EB\Delta$ είναι ισόπλευρο.

Δ2. Να δείξετε το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

Δ3. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta EZ$ είναι ρόμβος.

Δ4. Προεκτείνουμε τις ΔE και ΔZ κατά τμήματα $EH = \Delta E$ και $Z\Theta = \Delta Z$. Να δείξετε ότι:

- α)** το τετράπλευρο $AH\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β)** τα σημεία H , A , Θ είναι συνευθειακά.

4ο Διαγώνισμα

ΘΕΜΑ Α

A. Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις, να γράψετε στη κόλλα σας τον αριθμό που αντιστοιχεί και δίπλα το γράμμα (Σ) αν θεωρείται τη πρόταση σωστή, ή το γράμμα (Λ) αν θεωρείται ότι η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.
 β) Οι διαγώνιες ενός ορθογωνίου είναι ίσες
 γ) Δύο ευθείες κάθετες προς μία τρίτη ευθεία είναι παράλληλες.
 δ) Αν σε ένα τρίγωνο μία γωνία του είναι ίση με 60° , τότε το τρίγωνο είναι και ισόπλευρο.
 ε) ο βαρύκεντρο ισοπλεύρου τριγώνου είναι και ορθόκεντρο.

10 μονάδες

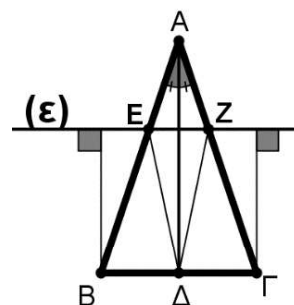
B. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

15 μονάδες

ΘΕΜΑ Β

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τη διχοτόμο $A\Delta$ και μια ευθεία (ε) παράλληλη προς τη $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές. Μονάδες 8
 β) τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $AZ\Delta$ είναι ίσα. Μονάδες 8
 γ) τα σημεία B και Γ ισαπέχουν από την EZ . Μονάδες 9



ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $\hat{A} = 90^\circ$ με $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και Δ, E τα μέσα των $A\Gamma, B\Gamma$ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την EA κατά τμήμα $\Delta Z = EA$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι ρόμβος. Μονάδες 8
 β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AZEB$ είναι ρόμβος. Μονάδες 8
 γ) Αν H το σημείο τομής των ημιευθειών BA και ΓZ , να βρεθεί το είδος του τριγώνου $BH\Gamma$ ως προς τις πλευρές του και να δείξετε ότι έχει διπλάσια περίμετρο από το τρίγωνο AEB . Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Έστω M, N τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma$ αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι $\Delta M = AN$. Μονάδες 7
 Αν K το σημείο τομής των $\Delta M, AN$, να αποδείξετε ότι :
 β) τα ευθύγραμμα τμήματα ΔM και AN είναι κάθετα. Μονάδες 6
 γ) $KP = BP$ όπου P το μέσο του MN . Μονάδες 6
 δ) Να δείξετε ότι $BP = \frac{B\Delta}{4}$. Μονάδες 6