

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

18. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία A,B,Γ,Δ ισχύει ότι :
$$4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{A\Gamma} = 4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{A\Gamma} - 7\overrightarrow{DA}$$
19. Έστω A,B,Γ,Δ σημεία μη συνευθειακά για τα οποία ισχύει ότι
 $5\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} - 3\overrightarrow{B\Delta}$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
20. Έστω παραλληλόγραμμο ABΓΔ και Κ το κέντρο του. Αν Μ είναι το μέσο του ΚΓ, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta} = 4\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{A\Gamma}$
21. Αν ισχύει $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{B\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $3\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{O\Gamma}$.
22. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ και το σημείο Μ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{M\Gamma} = -2\overrightarrow{MB}$. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Delta} = 2\overrightarrow{BA}$.
23. Έστω Α, Β δύο διαφορετικά σημεία. Να βρεθεί η τιμή του x για την οποία ισχύουν $\overrightarrow{A\Gamma} = x\overrightarrow{BA}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = 3\overrightarrow{AB}$.
24. Θεωρούμε τα διαφορετικά σημεία Α και Β, καθώς και σημείο Γ, για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{A\Gamma} = 3\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.
25. Έστω παραλληλόγραμμο ABΓΔ. Να βρείτε σημείο Ρ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} = \overrightarrow{P\Delta}$.
26. Έστω παραλληλόγραμμο ABΓΔ. Να βρείτε σημείο Ρ της πλευράς ΒΓ τέτοιο, ώστε $P\Gamma = 2PB$. Να αποδείξετε ότι : $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Delta} = 2\overrightarrow{BA}$.
27. Θεωρούμε σημεία Α,Β,Γ για τα οποία ισχύει $3\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{B\Gamma}$.
α) Να αποδείξετε ότι $8\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{A\Gamma}$
β) Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων Α,Β,Γ αντίστοιχα ως προς σημείο Ο, να εκφράσετε το $\vec{\beta}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.
28. Έστω Α,Β,Γ,Δ σημεία μη συνευθειακά ανά τρία για τα οποία ισχύει ότι
 $2\overrightarrow{A\Gamma} - 6\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{A\Gamma} - 3\overrightarrow{A\Delta}$
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Να βρείτε σημείο Μ, ώστε να ισχύει ότι : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} = 3\overrightarrow{M\Delta}$

29. Έστω τα σημεία A, B, Γ και Δ με $B \neq \Gamma$. Αν ισχύει $\overrightarrow{A\Delta} = \kappa \overrightarrow{B\Gamma}$, $\kappa \in \mathbb{R}$, να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός χ για τον οποίο ισχύει $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \chi \overrightarrow{B\Gamma}$.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

30. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $4\vec{a} + 6\vec{\beta} - 20\vec{\gamma}$ και $15\vec{\gamma} - 3\vec{a} - \frac{9}{2}\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά.
31. Αν ισχύει $2\overrightarrow{A\Lambda} + 3\overrightarrow{B\Lambda} + 2\overrightarrow{M\Lambda} = \overrightarrow{A\kappa} + \overrightarrow{A\mu} + \overrightarrow{B\kappa}$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{K\Lambda}$ και $\overrightarrow{M\Lambda}$ είναι αντίρροπα
32. Αν ισχύει ότι: $3\overrightarrow{B\Delta} - \overrightarrow{\Gamma\Lambda} = 3\overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{\Delta\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} \uparrow \downarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.
33. Δίνεται τετράπλευρο ABΓΔ. Να αποδείξετε ότι:
- α) το διάνυσμα $\vec{v} = 4\overrightarrow{A\Gamma} - 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ομόρροπο με το $\overrightarrow{B\Gamma}$
 - β) το διάνυσμα $\vec{w} = 2\overrightarrow{\Gamma B} - 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{B\Delta}$ είναι αντίρροπο με το $\overrightarrow{A\Delta}$
34. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = 4\vec{a} - 3\vec{\beta}$ και $\vec{v} = 2\vec{a} + \vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι :
- α) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \vec{u} + 3\vec{v}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{a}$
 - β) το διάνυσμα $\vec{\delta} = \vec{u} - 2\vec{v}$ είναι αντίρροπο με το $\vec{a}$
35. Σ' ένα τετράπλευρο ABΓΔ έχουμε $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + 2\vec{\beta}$, $\overrightarrow{B\Gamma} = -4\vec{a} - \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = -5\vec{a} - 3\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι το ABΓΔ είναι τραπέζιο.
36. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και τα σημεία Δ, Ε του επιπέδου του τέτοια ώστε :
- $$\overrightarrow{A\Delta} = 5\overrightarrow{AB} + 8\overrightarrow{A\Gamma} \text{ και } \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} + 10\overrightarrow{A\Gamma}.$$
- Να αποδειχθεί ότι : $\overrightarrow{\Delta E} // \overrightarrow{B\Gamma}$.

ΣΥΝΕΥΘΕΙΑΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

37. Αν ισχύει $4\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 9\overrightarrow{M\Gamma} = \vec{0}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.
38. Δίνονται σημεία A, B, Γ, Δ, Ε για τα οποία ισχύει ότι :
- $$5\overrightarrow{A\Delta} - 3\overrightarrow{AE} - 4\overrightarrow{A\Gamma} = 4\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{E\Gamma} + 9\overrightarrow{B\Delta}.$$
- Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
39. Θεωρούμε σημεία O, A, B, Γ για τα οποία ισχύει ότι : $\overrightarrow{OA} = 4\vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{O\Gamma} = -2\vec{a} + 3\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.

β) Να λύσετε την εξίσωση : $x \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma} - x \cdot \overrightarrow{AB} = (x+2) \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$

49. Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο γνωστά διανύσματα .Θεωρούμε επίσης διάνυσμα $\vec{x}$ για το

οποίο ισχύει : $\frac{1}{2}(2\vec{x} + \vec{\beta}) = \frac{1}{4}(3\vec{x} + \vec{\alpha})$

α) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$

β) Αν επιπλέον ισχύει ότι : $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$, $\overrightarrow{OB} = 4\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{O\Gamma} = -\vec{\alpha} + 8\vec{\beta}$ να αποδείξετε ότι :

i) $\overrightarrow{AB} \uparrow \uparrow \vec{x}$

ii) $\overrightarrow{A\Gamma} \uparrow \downarrow \vec{x}$

50. Να λυθεί το σύστημα :
$$\begin{cases} 2\vec{x} + 3\vec{y} = 7\vec{a} + \vec{\beta} \\ \vec{x} - 2\vec{y} = -3\vec{\beta} \end{cases}$$

51. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $|(\lambda - 3)\vec{\alpha}| < 5|\vec{\alpha}|$, όπου $\vec{a} \neq \vec{0}$.

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

52. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και σημείο P τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{BP} = 3\overrightarrow{P\Gamma}$.

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AP}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$

β) Να βρείτε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει : $8\overrightarrow{AP} - 6\overrightarrow{AB} = \kappa \cdot \overrightarrow{B\Gamma} + \lambda \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$

53. Θεωρούμε τα μη συνευθειακά σημεία O,A,B και τα διανύσματα $\vec{v} = \overrightarrow{OA} - \lambda \cdot \overrightarrow{OB}$ και $\vec{u} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{u}$ δεν είναι συγγραμμικά.

54. Αν $4\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} = 3\vec{\gamma}$, να γράψετε το $\vec{\beta}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.