**& 1.2 Συναρτήσεις**

**► 1.2 Η έννοια της συνάρτησης, Πεδίο ορισμού, Σύνολο τιμών (1)**

**ΟΡΙΣΜΟΣ**

Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο του $R$ ( Α$⊆R$ ) με Α ≠ $∅$ . Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με πεδίο ορισμού το Α , κάθε νόμο (τρόπο ή διαδικασία) *f*  με τον οποίο κάθε στοιχείο x του A  αντιστοιχίζεται (συσχετίζεται) με ένα μόνο στοιχείο y του $R$.
Συμβολικά ο κανόνας αυτός γράφεται: *f :* Α → $R$ ή

x → y $\in $ $R$ ή

y = *f* (x)

και εννοούμε ότι από το Α το στοιχείο x αντιστοιχίζεται μέσω της f στο y $\in $ $R$ ή **ότι η τιμή της f στο x είναι y.**

**Παρατηρήσεις**

1. Το γράμμα x παριστάνει το τυχαίο (το οποιοδήποτε) στοιχείο του Α και λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή.** Το γράμμα y παριστάνει, όπως είπαμε και πιο πάνω, την τιμή της f στο x και λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή.**
2. Το  *f* (x) ονομάζεται **τύπος της συνάρτησης** και η y = *f* (x) ονομάζεται εξίσωση της συνάρτησης.
3. Συνέπεια του ορισμού είναι ότι για κάθε x1 = x2 ισχύει ότι *f* (x1) = *f* (x2)

**ΟΡΙΣΜΟΣ**

1. Ονομάζουμε **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης f το σύνολο των x $\in $ $R$ για τα οποία η τιμή της f στο x είναι πραγματικός αριθμός, δηλαδή:

Α = D*f* = { x $\in $ $R$ : y = *f* (x) $\in $ $R$ }

1. Ονομάζουμε **σύνολο τιμών** της συνάρτησης *f*  το υποσύνολο  *f* (Α) του $R$ όπου για το κάθε y $\in $ *f* (Α)  και μόνο για αυτά υπάρχει τουλάχιστον ένα  x $\in $ A  με y = *f* (x), δηλαδή: *f* (Α) = { y $\in $ $R$ : υπάρχει x $\in $ A  με y = *f* (x) }

**Παρατηρήσεις**

1. Μια συνάρτηση *f*είναι πλήρως ορισμένη αν γνωρίζουμε:
α) Το πεδίο ορισμού της Α.
β) Τη διαδικασία με την οποία βρίσκουμε την τιμή της *f* (x), για κάθε x $\in $ A.
2. Όταν δίνεται μόνο ο τύπος μιας συνάρτησης  *f* , τότε ως πεδίο ορισμού της θεωρούμε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $R$ στο οποίο το *f* (x) έχει νόημα.
3. Για την εύρεση του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης λαμβάνουμε υπόψιν μας τους παρακάτω περιορισμούς:

|  |  |
| --- | --- |
| **Συνάρτηση  *f*** | **Περιορισμός πεδίου ορισμού** |
| $f(x)$= $\frac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}$ | $Q\left(x\right)$≠ 0 |
| $f(x)$= $\sqrt[ν]{Ρ\left(x\right)}$ , v$ϵ N^{\*}$ - {1} | $P\left(x\right)$ ≥ 0 |
| $f(x)$ = ln ($P\left(x\right)$) | $P\left(x\right)$ > 0 |
| $f(x)$ = εφ($P\left(x\right)$) | $P\left(x\right)$≠ κπ + $\frac{π}{2}$ , κ $\in Z$ |
| $f(x)$ = σφ($P\left(x\right)$) | $P\left(x\right)$ ≠ κπ, κ $\in Z$ |
| $f(x)$= $\left(P(x)\right)^{Q(x)}$ | $P\left(x\right)$ > 0 |

1. Η εύρεση του πεδίου ορισμού πρέπει να προηγείται οποιουδήποτε μετασχηματισμού (ομώνυμα κλάσματα, παραγοντοποιήσεις, απλοποιήσεις κ.λπ.) στη συνάρτηση. Δηλαδή το πεδίο ορισμού το βρίσκουμε χωρίς να "πειράξουμε καθόλου" τον αρχικό τύπο της συνάρτησης.
2. Για να προσδιορίσουμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης βρίσκουμε τους πραγματικούς αριθμούς y για τους οποίους η εξίσωση y = *f* (x) ***με άγνωστο το x*** έχει λύση που ανήκει στο πεδίο ορισμού Α της *f*. Με λίγα λόγια λύνουμε την εξίσωση y = *f* (x) ως προς x απαιτώντας το x $\in $ A.

**1.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης (2)**

**ΟΡΙΣΜΟΣ**

Το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (x,y) όπου x = πρότυπο και y = εικόνα του x μέσω της f ονομάζεται **γραφική παράσταση της f** και τη συμβολίζουμε με C*f*. Τα x ονομάζονται **τετμημένες** των σημείων της C*f*  και τα y **τεταγμένες**.

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ**

1. Κάθε σημείο M της C*f*  επαληθεύει την εξίσωση  y = *f* (x), δηλαδή ισχύει:

Μ (x0 , y0)$ \in $ C*f*  $⇔$ y0 = *f* (x0)$ $, x0 $\in $ A.

1. Επειδή κάθε  x$\in $A αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο  y $\in R$ σημαίνει ότι **δεν υπάρχουν** σημεία της C*f*  που να έχουν την ίδια τετμημένη. Άρα κάθε κατακόρυφη ευθεία θα έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με την  C*f* .

|  |  |
| --- | --- |
| MK_K2_E1_S3_1 | MK_K2_E1_S3_2 |
| **είναι** συνάρτηση | ο κύκλος **δεν** είναι συνάρτηση |

Η τιμή της *f* στο  x0 , δηλαδή το y = *f* (x0), είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας x= x0  και της C*f*



1. .

1. Οι λύσεις της εξίσωσης  *f* (x0) = 0 είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης C*f*  με τον άξονα xx'. (Σχήμα 1)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

1. Η τεταγμένη του σημείου τομής (αν υπάρχει) της C*f*   με τον y'y είναι η ρίζα της εξίσωσης  *f* (0) = y. (Σχήμα 2)
2. Η επίλυση της ανισότητας  *f* (x) > 0  μας καθορίζει το διάστημα στο οποίο η C*f*   είναι πάνω από τον άξονα xx', ενώ η ανισότητα *f* (x) < 0   μας καθορίζει το διάστημα στο οποίο η C*f*   είναι κάτω από τον άξονα x'x.
3. Οι λύσεις της εξίσωσης  *f* (x) = *g*(x) είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C*f*  και C*g* , όπου *f, g* δυο πραγματικές συναρτήσεις. (Σχήμα 3)



Σχήμα 4



Σχήμα 3

1. Η επίλυση των ανισοτήτων *f* (x) > *g*(x) ή  *f* (x) < *g*(x) μας καθορίζει τα διαστήματα στα οποία η  C*f*  είναι πάνω από την C*g*  ή η  C*f*  κάτω από την C*g*. (Σχήμα 4)
2. Η γραφική παράσταση της  -*f* (x) είναι συμμετρική με την C*f*  με άξονα συμμετρίας τον xx'. (Σχήμα 5)



Σχήμα 6



Σχήμα 5

1. Για να παραστήσουμε γραφικά την | *f*(x)|  κατασκευάζουμε πρώτα την C*f*  και στη συνέχεια το τμήμα (ή τα τμήματα) της C*f*  που είναι κάτω από τον x'x το αντικαθιστούμε με το συμμετρικό του (ή τα συμμετρικά τους) ως προς τον xx. (Σχήμα 6)

**1.2 Ισότητα και πράξεις συναρτήσεων – Σύνθεση συναρτήσεων (3)**

**ΟΡΙΣΜΟΣ**

Δίδονται οι συναρτήσεις  *f :*Α → $R$ και *g:* B → $R$ . Θα λέμε ότι οι *f* και *g* είναι ίσες  και θα γράφουμε *f* = *g* όταν:

1. έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α= Β.
2. για κάθε x $\in $ A ισχύει *f*(x) *= g* (x) . Συμβολικά:

*f* = *g* $⇔\left\{\begin{matrix}D\_{f}= D\_{g}=A\\και\\f\left(x\right)=g\left(x\right) για κάϑε xϵA\end{matrix}\right\}$

**Σημαντικές Παρατηρήσεις**

1. Από τον παραπάνω ορισμό είναι φανερό ότι οι ίσες συναρτήσεις  θα έχουν και ίδια σύνολα τιμών.
2. Αν οι συναρτήσεις *f* και *g* ορίζονται σε ένα σύνολο Δ $⊆D\_{f}⊆D\_{g}$  και για κάθε x$ϵ$Δ ισχύει $f\left(x\right)=g\left(x\right)$, τότε θα λέμε ότι οι *f , g* είναι ίσες στο Δ αλλά χωρίς απαραίτητα να είναι ίσες και σε όλο το πεδίο ορισμού τους.

*Παράδειγμα: Έστω οι συναρτήσεις* $f\left(x\right)=$ *|x| με Df =* $R$ *και g(x) = x με Dg =* $R$*.*

*Αν θεωρήσουμε Δ = [0 , +*$\infty $*) παρατηρούμε ότι ισχύει* $f\left(x\right)$ *= g(x) για κάθε****x***$\in $***Δ****.*

*Επίσης παρατηρώ ότι έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού. Όμως υπάρχει (τουλάχιστον ένα) x0* $\in $$R$ *π.χ το -8 με*$f\left(-8\right)$ *≠ g(-8), δηλαδή*$f\ne $*g .*

1. Απόρροια του ορισμού είναι ότι δύο συναρτήσεις θα είναι διάφορες μεταξύ τους $ f\ne $*g* , αν τουλάχιστον μία από τις δύο συνθήκες δεν ισχύει. Γι' αυτό το λόγο για να ελέγξουμε κατά πόσο δύο συναρτήσεις είναι ίσες εξετάζουμε **πρώτα** αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και ύστερα αν $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ **για κάθε** x$\in $Α.
2. Αν τους $ f=$*g* , τότε οι γραφικές τους παραστάσεις ταυτίζονται.
3. Συχνά όταν τους $ f\ne $*g*  ζητείται να βρεθεί το ***"ευρύτερο"*** υποσύνολο του $R$ στο οποίο να είναι ίσες οι συναρτήσεις. Σ' αυτή την περίπτωση προσδιορίζουμε το "ευρύτερο" υποσύνολο του $R$, έστω Ε $⊆D\_{f}⊆D\_{g}$, στο οποίο ορίζονται οι *f, g* και στο οποίο ισχύει ότι $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ για κάθε x$\in $Ε. Άρα $f= $*g*   **στο Ε.**

***Ερώτημα:*** *Στο προηγούμενο παράδειγμα της 2ης παρατήρησης να βρεθεί το "ευρύτερο" υποσύνολο του*$R$*στο οποίο οι συναρτήσεις* $f και $*g  είναι ίσες*

**ΟΡΙΣΜΟΣ**

Δίνονται δύο συναρτήσεις *f, g* με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα και Α $∩$ Β ≠ $∅$. Ορίζουμε ως:

* άθροισμα *f + g* με : ( *f + g*) (x) = *f* (x) + *g*(x) , x $\in $ Α $∩$ Β
* διαφορά *f – g* με: ( *f - g*) (x) = *f* (x) - *g*(x) , x $\in $ Α $∩$ Β
* γινόμενο *f ∙ g* με: ( *f ∙ g*) (x) = *f* (x) ∙ *g*(x) , x $\in $ Α $∩$ Β
* πηλίκο $\frac{f}{g}$ με: $\left(\frac{f}{g} \right)\left(x\right)=\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$ , x $\in $ Α $∩$ Β – { x $\in $ Α $∩$ Β : *g*(x) = 0}

**Σημαντικές Παρατηρήσεις**

* 1. Το σημείο που πρέπει να προσέξουμε είναι ο προσδιορισμός των πεδίων ορισμού και κυρίως του Α $∩$ Β. Στην περίπτωση που Α $∩$ Β = $∅$, τότε **δεν** ορίζονται οι πράξεις. Αυτό σημαίνει ότι **δεν** μπορούμε να κάνουμε πράξεις με τις συναρτήσεις αν πρώτα δεν εξασφαλίσουμε ότι Α $∩$ Β ≠ $∅$.
	2. Όλες οι παραπάνω πράξεις συναρτήσεων είναι και αυτές συναρτήσεις. Δηλαδή οι πράξεις είναι ένας τρόπος δημιουργίας νέων συναρτήσεων.
	3. Σ' αυτό το σημείο πρέπει να εξηγήσουμε επίσης τις έννοιες του «γινομένου πραγματικού αριθμού κ επί τη συνάρτηση f» καθώς και τη συνάρτηση «δύναμη». Δηλαδή:
* (κ*∙ f )*(x) = κ*∙ f* (x) με Dκf = Α και κ $\in $$R$ και
* ( *f ν)*(x) = *f ν*(x) = [*f* (x) ]ν με Dfν = Α και ν $\in $$N^{\*}$

**ΟΡΙΣΜΟΣ**

Έστω δύο συναρτήσεις *f :*Α → $R$ και *g:* B → $R $. Αν ισχύει ότι *f* (Α)$ ∩$ Β ≠ $∅$ τότε ορίζουμε μια νέα συνάρτηση που την ονομάζουμε ***σύνθεση της f με την g*** και τη συμβολίζουμε με ***g* ◦ *f*** τη συνάρτηση που έχει:

* πεδίο ορισμού το σύνολο Α1 ={ x $\in $ A: f(x)$ \in $ B} και τύπο
* (*g* ◦ *f* )(x) = *g*( *f* (x) ) , x $\in $ A

**Σημαντικές Παρατηρήσεις**

1. Εν γένει ισχύει *g* ◦ *f* ≠ *f* ◦ *g*. Δηλαδή δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στη σύνθεση συναρτήσεων. Ισχύει όμως η προσεταιριστική. Δηλαδή ισχύει ότι: [ (*f* ◦ *g*) ◦ *h*](x)= [ *f* ◦( *g* ◦ *h*)](x)
2. Πρέπει να προσέξουμε ότι πρώτα βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της σύνθεσης και μετά τον τύπο. **Είναι λάθος** να βρούμε πρώτα τον τύπο της σύνθεσης και από τον τύπο να βρούμε το πεδίο ορισμού.
3. Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις έχουν κλάδους πρέπει να **συνθέσουμε** τον κάθε κλάδο της μίας με κάθε κλάδο της άλλης.

Σχηματικά έχουμε:

*●*

*f* (x)

x

*g*

*f*

 ●

*●*

*g (f* (x))

*g ◦ f*