

& 1.3: Μονότονες Συναρτήσεις - Αντίστροφη Συνάρτηση

Μονοτονία συνάρτησης

Ορισμοί:

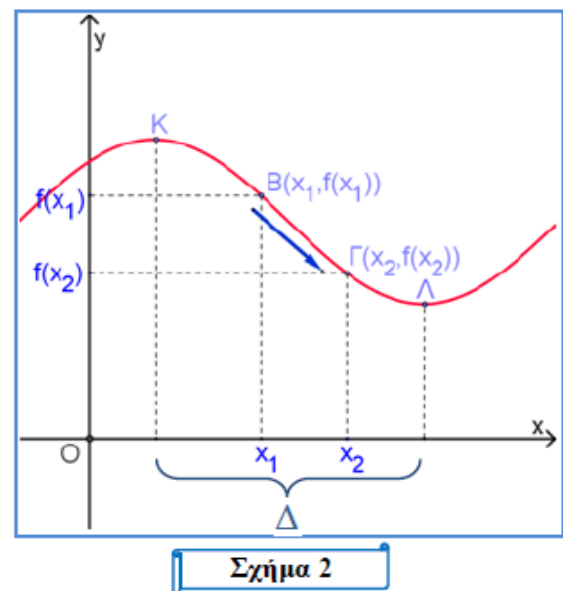
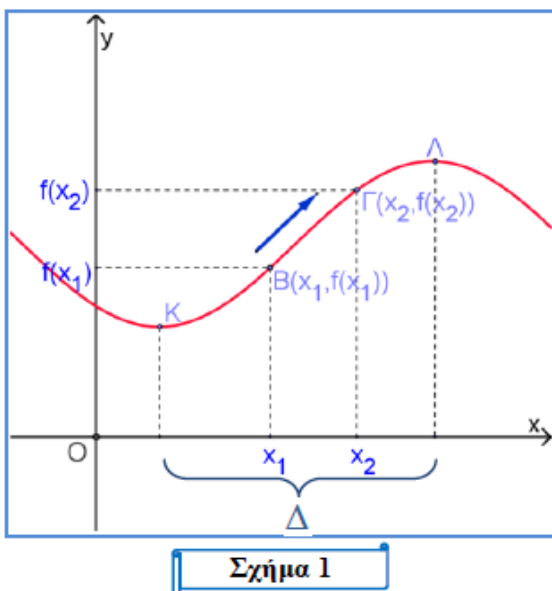
Μία συνάρτηση f λέγεται:

- **γνησίως αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{«Σχήμα 1»})$$

- **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2) \quad (\text{«Σχήμα 2»})$$



- Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως μονότονη** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο Δ .

Μία συνάρτηση f λέγεται απλώς:

- **αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

- **φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

Ακρότατα συνάρτησης

Ορισμοί:

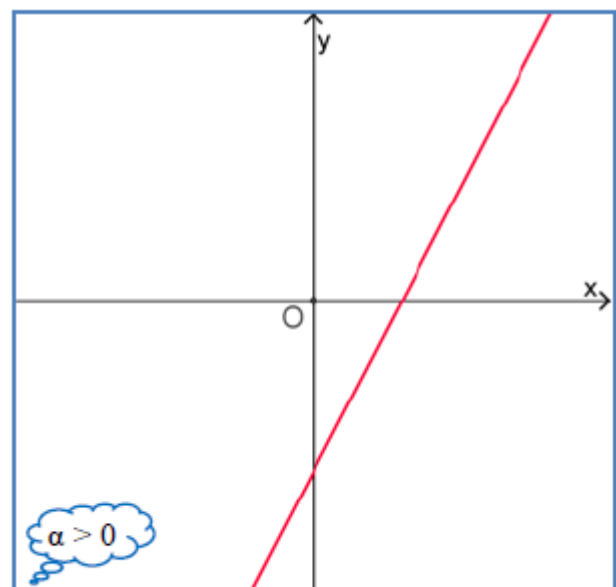
Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.
- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.
- **Ολικά ακρότατα** μίας συνάρτησης f λέγονται το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο της f .

Μονοτονία - ακρότατα βασικών συναρτήσεων

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha > 0$ είναι
γνησίως αύξουσα στο $A = D_f = \mathbf{R}$ και
δεν έχει ακρότατα ($f(A) = \mathbf{R}$).

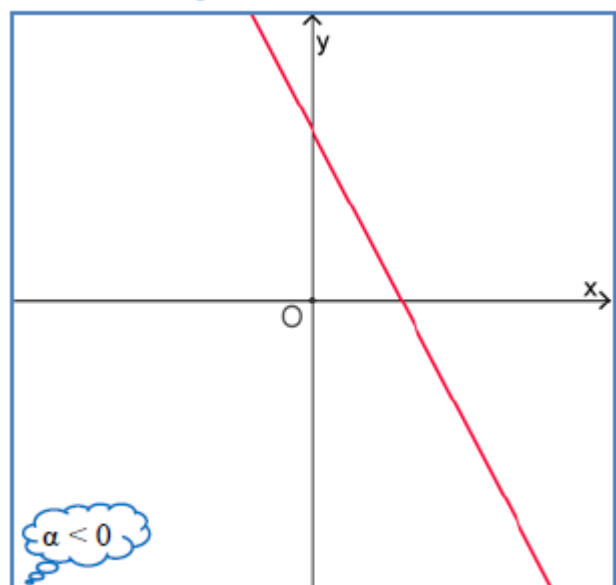
Παράδειγμα ανάλογης συνάρτησης βλέπουμε
στο «Σχήμα 3».



Σχήμα 3

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha < 0$ είναι
γνησίως φθίνουσα στο $A = D_f = \mathbf{R}$ και
δεν έχει ακρότατα ($f(A) = \mathbf{R}$).

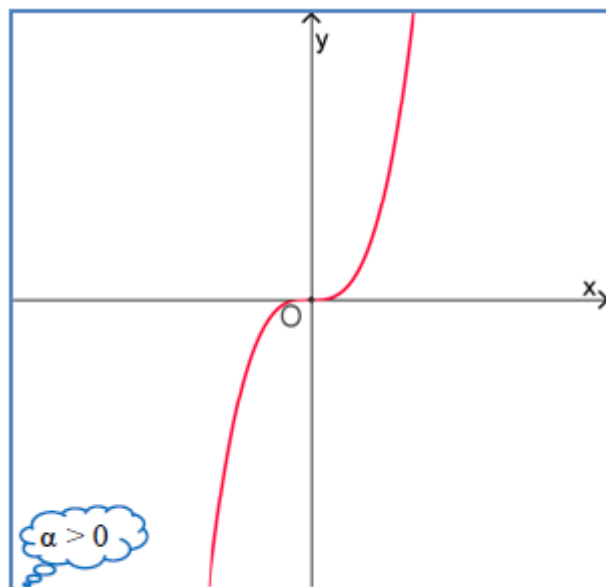
Παράδειγμα ανάλογης συνάρτησης βλέπουμε
στο «Σχήμα 4».



Σχήμα 4

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3$, με $\alpha > 0$ είναι
 γνησίως αύξουσα στο $A = D_f = \mathbb{R}$ και
 δεν έχει ακρότατα ($f(A) = \mathbb{R}$).

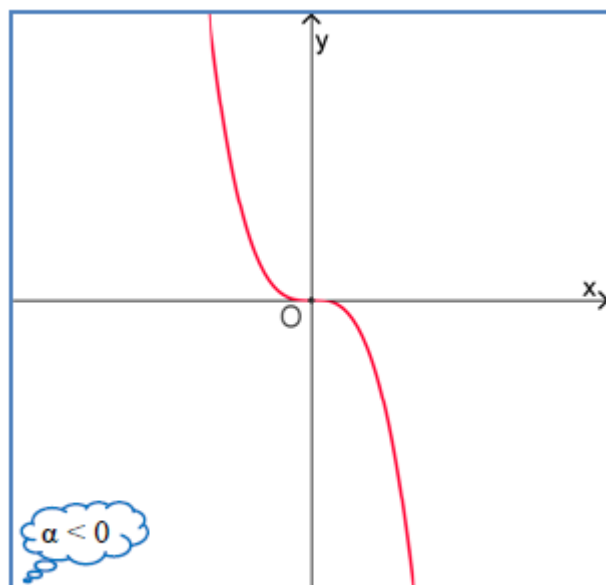
Παράδειγμα ανάλογης συνάρτησης βλέπουμε
 στο «Σχήμα 5».



Σχήμα 5

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3$, με $\alpha < 0$ είναι
 γνησίως φθίνουσα στο $A = D_f = \mathbb{R}$ και
 δεν έχει ακρότατα ($f(A) = \mathbb{R}$).

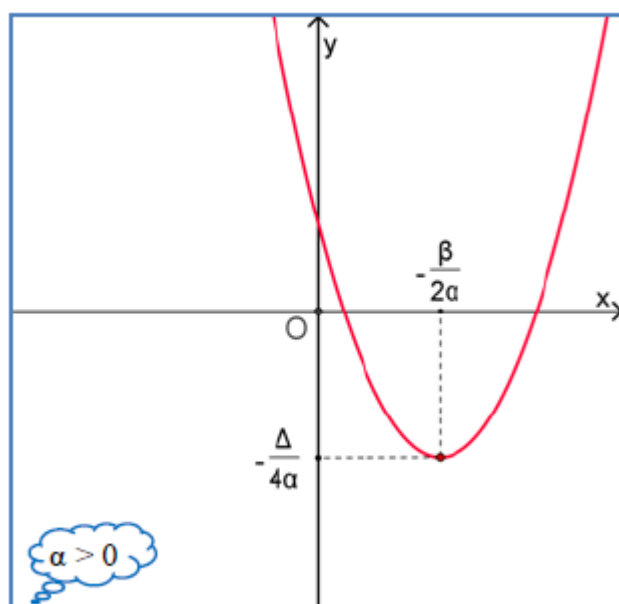
Παράδειγμα ανάλογης συνάρτησης βλέπουμε
 στο «Σχήμα 6».



Σχήμα 6

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha > 0$
 είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και
 γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$. Έχει
 ελάχιστο για $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ το $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$.

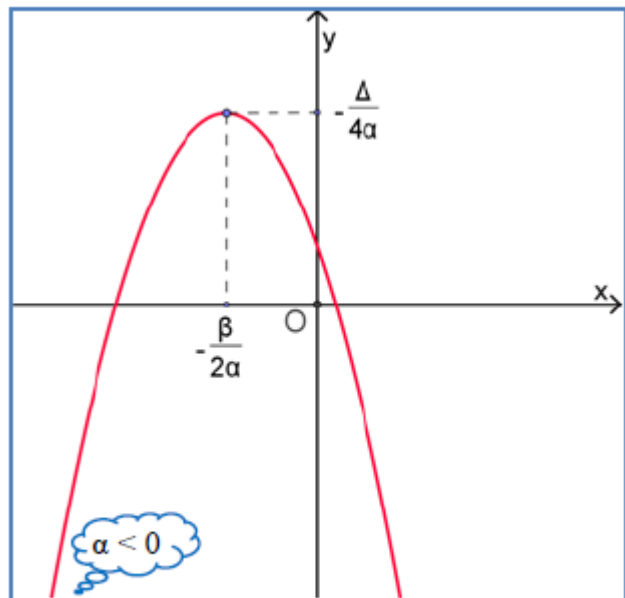
Παράδειγμα ανάλογης συνάρτησης βλέπουμε
 στο «Σχήμα 7».



Σχήμα 7

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha < 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$. Έχει μέγιστο για $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ το $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$.

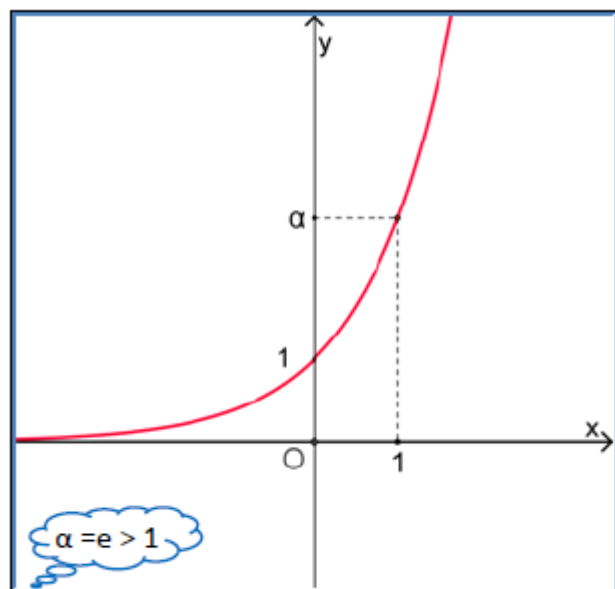
Παράδειγμα ανάλογης συνάρτησης βλέπουμε στο «Σχήμα 8».



Σχήμα 8

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, με $\alpha > 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $A = D_f = \mathbf{R}$ και δεν έχει ακρότατα ($f(A) = (0, +\infty)$).

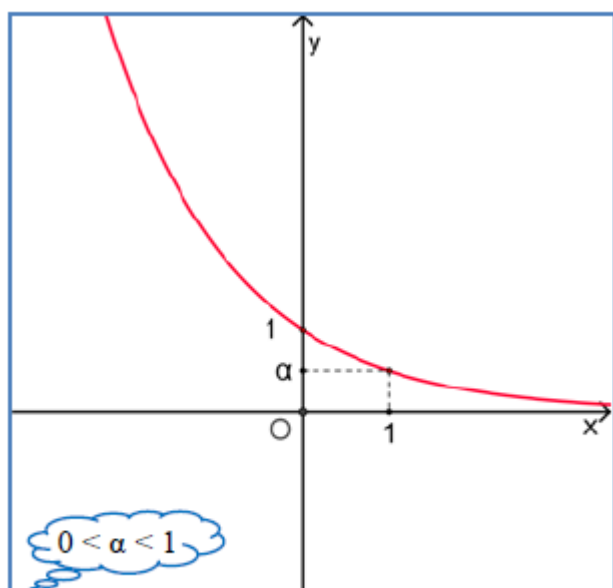
Παράδειγμα ανάλογης συνάρτησης, η $f(x) = e^x$, «Σχήμα 9».



Σχήμα 9

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, με $0 < \alpha < 1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $A = D_f = \mathbf{R}$ και δεν έχει ακρότατα ($f(A) = (0, +\infty)$).

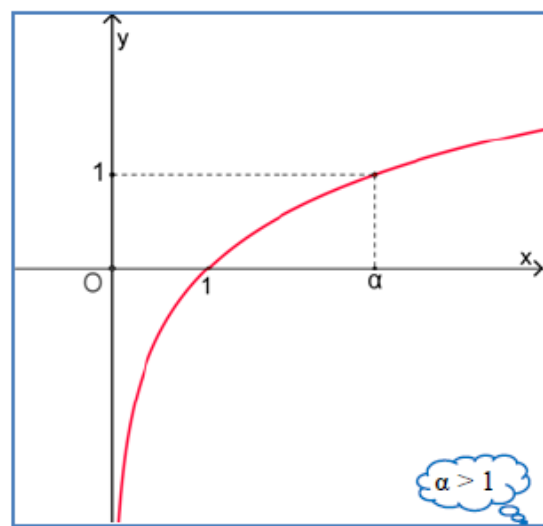
Παράδειγμα ανάλογης συνάρτησης βλέπουμε στο «Σχήμα 10».



Σχήμα 10

Η συνάρτηση $f(x) = \log_{\alpha} x$, με $\alpha > 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $A = D_f = (0, +\infty)$ και δεν έχει ακρότατα ($f(A) = \mathbb{R}$).

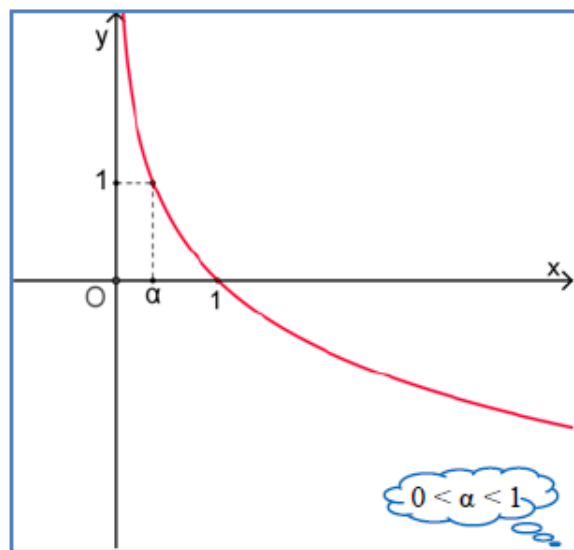
Παράδειγμα ανάλογης συνάρτησης βλέπουμε στο «Σχήμα 11».



Σχήμα 11

Η συνάρτηση $f(x) = \log_{\alpha} x$, με $0 < \alpha < 1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $A = D_f = (0, +\infty)$ και δεν έχει ακρότατα ($f(A) = \mathbb{R}$).

Παράδειγμα ανάλογης συνάρτησης βλέπουμε στο «Σχήμα 12».



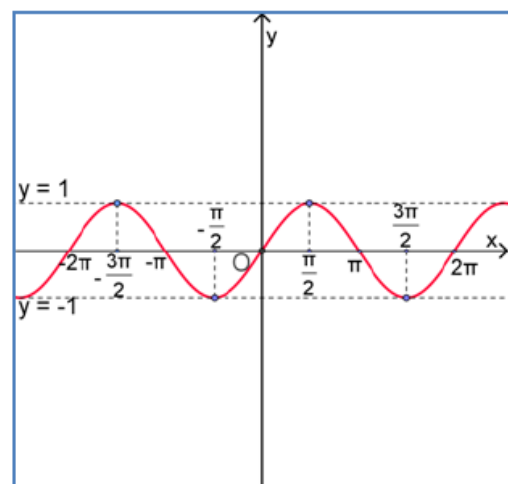
Σχήμα 12

Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ και επειδή είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = 2\pi$ η f θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε διάστημα της μορφής $\left[2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, γνησίως φθίνουσα σε κάθε διάστημα της μορφής $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \pi\right]$ και γνησίως αύξουσα σε κάθε διάστημα της μορφής $\left[2k\pi + \frac{3\pi}{2}, 2(k+1)\pi\right]$, με $k \in \mathbb{Z}$.

Παρουσιάζει ελάχιστο για κάθε $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, το -1 και μέγιστο για

κάθε $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, το 1, (

$f(A) = [-1, 1]$).



Σχήμα 13

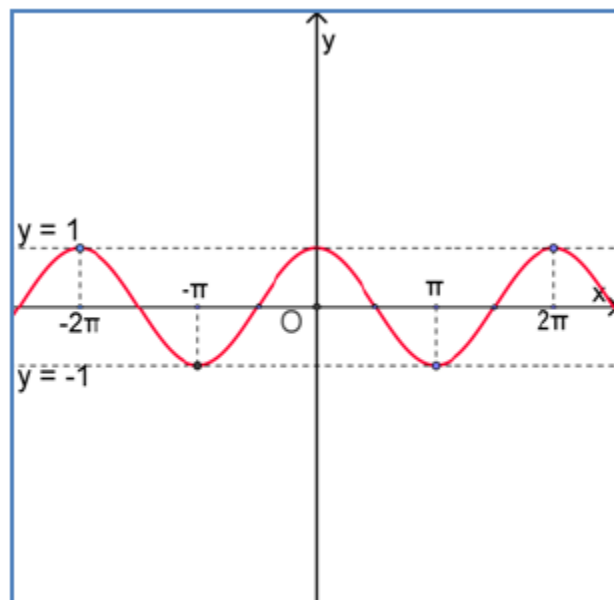
Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$, έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbf{R}$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\pi, 2\pi]$. Επειδή είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο

$T = 2\pi$ η f θα είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε διάστημα της μορφής $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ και γνησίως αύξουσα σε κάθε διάστημα της μορφής

$[(2k+1)\pi, 2(k+1)\pi]$, με $k \in \mathbf{Z}$.

Παρουσιάζει ελάχιστο για κάθε $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, το -1 και μέγιστο για κάθε $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, το 1 , ($f(A) = [-1, 1]$).

Τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, βλέπουμε στο «Σχήμα 14».



Σχήμα 14

Η συνάρτηση $f(x) = \tan x$, έχει

$A = D_f = \left\{ x \in \mathbf{R} : x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, είναι

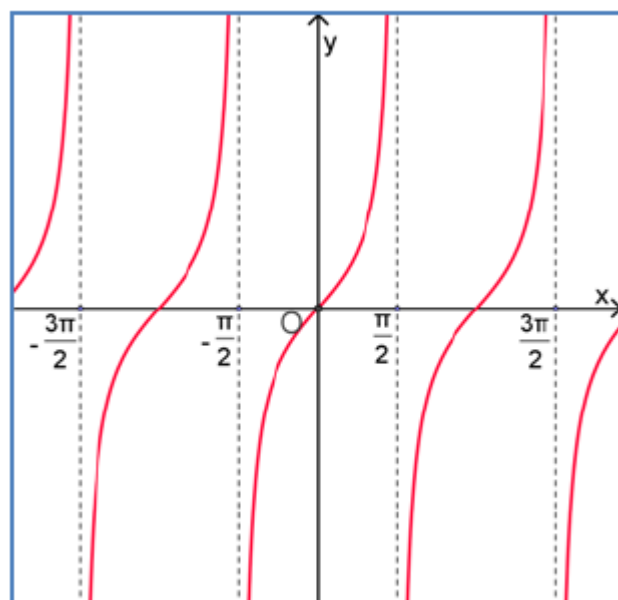
γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και επειδή

είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = \pi$ η f θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε

διάστημα της μορφής $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ με

$k \in \mathbf{Z}$ και δεν έχει ακρότατα ($f(A) = \mathbf{R}$).

Τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, βλέπουμε στο «Σχήμα 15».



Σχήμα 15

Σημαντικές παρατηρήσεις

1. Έστω συνάρτηση f , ορισμένη σε διάστημα Δ με $x_1, x_2 \in \Delta$ και $x_1 \neq x_2$ τότε:

α) Αν $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2, f(x_1) - f(x_2)$ ομόσημοι $\Leftrightarrow f$ γνησίως αύξουσα.

β) Αν $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2, f(x_1) - f(x_2)$ ετερόσημοι $\Leftrightarrow f$ γνησίως φθίνουσα.

2. Μια συνάρτηση f , μπορεί να έχει το ίδιο είδος μονοτονίας στα διαστήματα Δ_1, Δ_2 ($\Delta_1, \Delta_2 \subseteq D_f$) αλλά όχι και στην ένωση $\Delta_1 \cup \Delta_2$.

Παράδειγμα

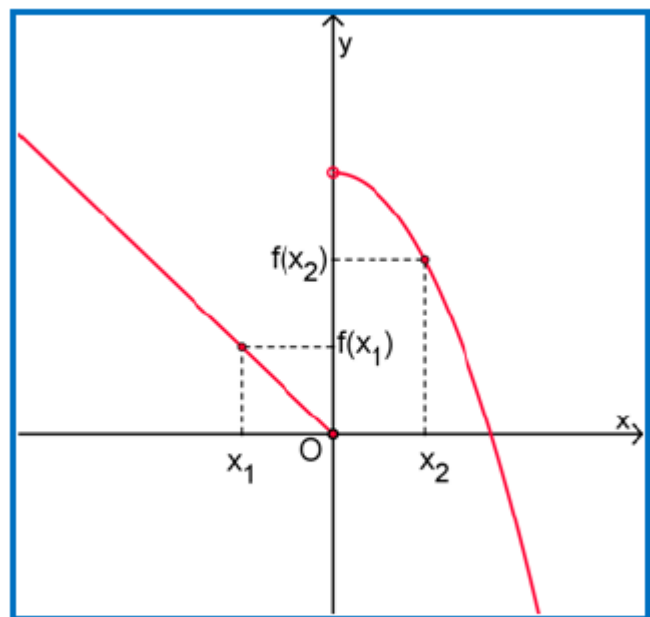
Έστω συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{αν } x \leq 0 \\ -x^2 + 3, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$, αλλά δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0] \cup (0, +\infty) = \mathbf{R}$, γιατί υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ με $x_1 < x_2$ και $f(x_1) < f(x_2)$.

(Για $-1 < 1$ έχουμε $f(-1) < f(1)$)

Η γραφική παράσταση της φαίνεται στο «Σχήμα 16».



Σχήμα 16

3. Αν μια μη σταθερή συνάρτηση είναι άρτια τότε σε συμμετρικά διαστήματα ως προς το μηδέν, θα έχει αντίθετο είδος μονοτονίας, δηλαδή αν στο $[\alpha, \beta]$ είναι γνησίως φθίνουσα, στο $[-\beta, -\alpha]$ είναι γνησίως αύξουσα. Παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ («Σχήμα 14»).

Επομένως:

Αν f άρτια συνάρτηση $\Rightarrow$ Η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη.

4. Αν μια μη μηδενική συνάρτηση είναι περιττή τότε σε συμμετρικά διαστήματα ως προς το μηδέν, θα έχει το ίδιο είδος μονοτονίας, δηλαδή αν στο (α, β) είναι γνησίως αύξουσα, και στο $(-\beta, -\alpha)$ είναι γνησίως αύξουσα. Παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$ («Σχήμα 15»).

5. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα (ή γνησίως φθίνουσα) στα διαστήματα $(\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma)$ τότε θα είναι γνησίως αύξουσα (ή γνησίως φθίνουσα) στο διάστημα (α, γ) .

6. Αν f συνάρτηση γνησίως μονότονη στο Δ , τότε η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ το πολύ σε ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in \Delta$, που σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία λύση στο Δ .
7. Επομένως, αν f συνάρτηση γνησίως μονότονη στο Δ και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία λύση στο Δ , τότε θα είναι και μοναδική.
8. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει ότι:
 f γνησίως φθίνουσα στο Δ και g γνησίως αύξουσα στο Δ τότε η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει το πολύ μία ρίζα στο Δ .
9. Για να δείξουμε μία συνάρτηση f ορισμένη στο Δ ότι δεν είναι γνησίως φθίνουσα, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) \leq f(x_2)$. Αντίστοιχα για να δείξουμε ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) \geq f(x_2)$.
10. Σε κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση f , η γραφική της παράσταση (C_f) τέμνει κάθε οριζόντια ευθεία $\epsilon: y = \kappa, \kappa \in \mathbf{R}$ ($\epsilon \parallel x'x$) το πολύ σε ένα σημείο.
11. i) Αν γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$.
 ii) Αν γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2$.
 (Αυτές οι δύο προτάσεις μας βοηθούν στην απόδειξη ανισοτήτων ή και στην επίλυση εξισώσεων. Μπορούν να χρησιμοποιούνται **αναπόδεικτα**.)

Απόδειξη

- i) Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ για τα οποία ισχύει η υπόθεση και δεν ισχύει το συμπέρασμα της συνεπαγωγής. Τότε θα ισχύει: $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 \geq x_2$.
 - Αν ήταν $x_1 > x_2$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, θα ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$ που αντίκειται στην υπόθεση.
 - Αν ήταν $x_1 = x_2$, από τον ορισμό της συνάρτησης, θα ισχύει: $f(x_1) = f(x_2)$, που αντίκειται και αυτό στην υπόθεση.
 Επομένως ισχύει το ζητούμενο.
- ii) Αντίστοιχη με την i.
12. α) Αν μια πολωνυμική συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε η f θα έχει μέγιστο το $f(\beta)$ και ελάχιστο το $f(\alpha)$.
 β) Ενώ αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$ τότε θα έχει μέγιστο το $f(\alpha)$ και ελάχιστο το $f(\beta)$.

13. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα (α, β) τότε δεν έχει ακρότατα.
14. α) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(\alpha, x_0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$ τότε η f στο διάστημα (α, β) έχει για $x = x_0$ μέγιστη τιμή την $f(x_0)$.
- β) Ενώ αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(\alpha, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$ τότε η f στο διάστημα (α, β) έχει για $x = x_0$ ελάχιστη τιμή την $f(x_0)$.
15. Αν το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f είναι το διάστημα:
- α) $[\lambda, \mu]$ τότε η f έχει ελάχιστο το λ και μέγιστο το μ .
- β) $[\lambda, \mu)$ τότε η f έχει ελάχιστο το λ και δεν έχει μέγιστο.
- γ) $(\lambda, \mu]$ τότε η f έχει μέγιστο το μ και δεν έχει ελάχιστο.
- δ) (λ, μ) τότε η f δεν έχει ακρότατα.
16. α) Αν μια συνάρτηση f είναι άρτια και παρουσιάζει μέγιστο (ή ελάχιστο) σε ένα σημείο της x_0 , το $f(x_0)$, τότε θα παρουσιάζει και στο $-x_0$ μέγιστο (ή ελάχιστο αντίστοιχα) το $f(-x_0) = f(x_0)$. Παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \sin x$, («Σχήμα 14»).
- β) Αν μια συνάρτηση f είναι περιττή και παρουσιάζει μέγιστο (ή ελάχιστο) σε ένα σημείο της x_0 , το $f(x_0)$, τότε θα παρουσιάζει στο $-x_0$ ελάχιστο (ή μέγιστο αντίστοιχα) το $f(-x_0) = -f(x_0)$. Παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$, («Σχήμα 13»).
17. α) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο το μ και $\mu < 0$ τότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in D_f$.
- β) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο το ϵ και $\epsilon > 0$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in D_f$.
18. α) Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $f(x) \leq \alpha$ (ή $f(x) \geq \alpha$) για κάθε $x \in D_f$, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η f έχει μέγιστο το α (ή ελάχιστο αντίστοιχα το α).
- β) Αν όμως γνωρίζουμε επιπλέον ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει λύση στο D_f τότε η f θα έχει μέγιστο το α (ή ελάχιστο αντίστοιχα το α).