

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

Αν μία συνάρτηση f είναι

- Συνεχής στο **κλειστό** διάστημα $[\alpha, \beta]$
- Παραγωγίσιμη στο **ανοικτό** διάστημα (α, β)
- $f(\alpha) = f(\beta)$

Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$

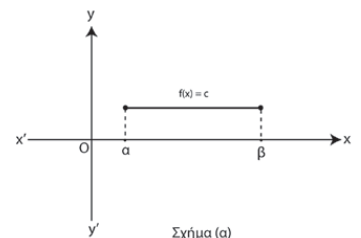
Προσοχή:

1. Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε σε ότι αφορά στο συμπέρασμα του, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

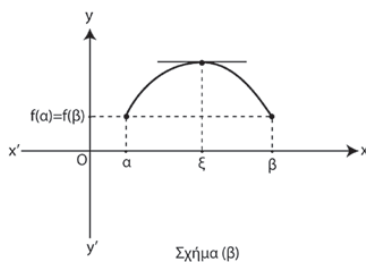
- υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$
- η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα στο ανοικτό διάστημα (α, β)
- η f' έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο ανοικτό διάστημα (α, β)
(ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ του θεωρήματος Rolle)
- η γραφική παράσταση της f' τέμνει τον άξονα xx' τουλάχιστον σε ένα σημείο.
- υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα xx' [Σχήματα (α), (β), (γ)].

(ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ του θεωρήματος Rolle)

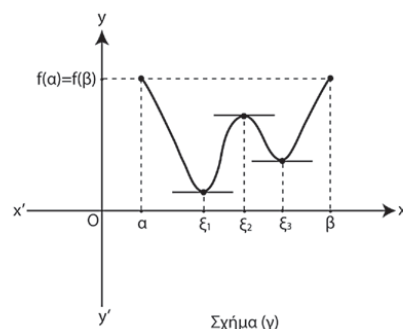
i. Αν η συνάρτηση είναι σταθερή έχουμε $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$



ii.



iii.



Σημαντικές παρατηρήσεις

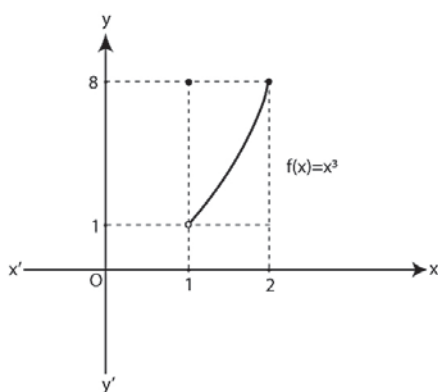
1. Οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle πρέπει να ελέγχονται πολύ προσεκτικά διότι αν κάποια από αυτές δεν ισχύει τότε δεν ισχύει και το θεώρημα.

Π.χ. (α) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{αν } 1 < x \leq 2 \\ 8 & \text{αν } x = 1 \end{cases}$.

Η συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με

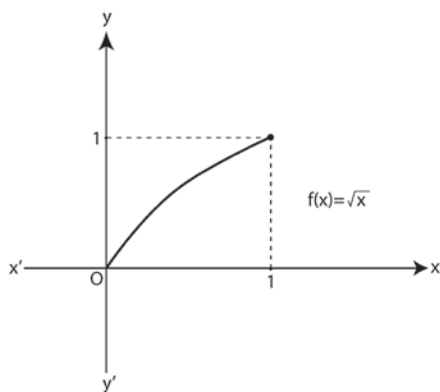
$$f'(x) = 3x^2 \quad \text{και} \quad f(1) = f(2) = 8.$$

Επειδή όμως η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο 1 δεν πληρούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle.



Π.χ. (β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$. Όμως $f(0) = 0 \neq 1 = f(1)$.

Άρα δεν πληρούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle.



Π.χ. (γ) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{αν } 1 \leq x \leq 2 \\ x-3 & \text{αν } 2 < x \leq 3 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $[1,3]$ διότι οι δύο κλάδοι είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις και

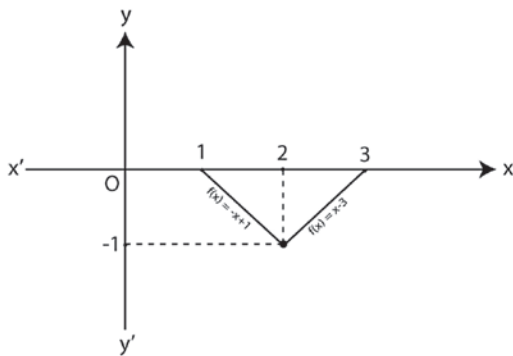
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (-x+1) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-3) = f(2) = -1.$$

Επίσης $f(1) = f(3) = 0$. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στον κάθε κλάδο ως πολυωνυμική αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(-x+1) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(-x+1) - (-1)}{x - 2} = -1$$

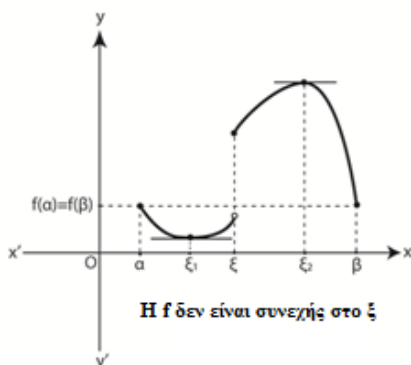
$$\text{ενώ } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-3) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-3) - (-1)}{x - 2} = 1$$

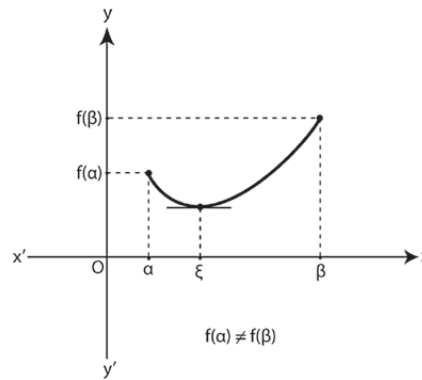
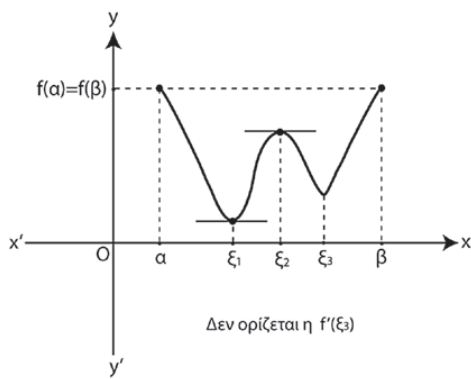
Άρα δεν πληρούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle.



2. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ (άρα θα είναι και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$), για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Rolle αρκεί να ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$
3. Το αντίστροφο του θεωρήματος Rolle δεν ισχύει κατ' ανάγκη. Δηλαδή αν η παράγωγος μιας συνάρτησης f μηδενίζεται σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f δεν σημαίνει ότι πληρούνται αναγκαία οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle (Σχήματα 1,2,3).

•





4. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και έχει δύο ρίζες τότε η f' έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$ και έστω ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$ οι δύο ρίζες της f με $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$. Τότε στο κλειστό διάστημα $[\rho_1, \rho_2] \subset \mathbb{R}$ ισχύουν για την f οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$ που είναι και το ζητούμενο.

5. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ρίζες της f' υπάρχει το πολύ μία ρίζα της συνάρτησης f

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$ οι δύο διαδοχικές ρίζες της f' .

Έστω ότι η συνάρτηση f έχει δύο ρίζες στο διάστημα (ρ_1, ρ_2) τις x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ άρα θα έχουμε $f(x_1) = f(x_2) = 0$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle στο $[x_1, x_2]$

Έχουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Επομένως ισχύουν για την f στο $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$ οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2) \subset (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Συνεπώς η f' έχει ρίζα ανάμεσα στις διαδοχικές της ρ_1, ρ_2 άτοπο, άρα η f δεν έχει δύο ρίζες άρα θα έχει το πολύ μία ρίζα ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ρίζες της f'

6. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και έχει τρεις ρίζες τότε η f' έχει δύο τουλάχιστον ρίζες και η f'' τουλάχιστον μία.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής σε αυτό και έστω ρ_1, ρ_2, ρ_3 τρεις διαδοχικές ρίζες της f με $f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$ ($\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$). Τότε στα κλειστά διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$ και $[\rho_2, \rho_3]$ ισχύουν για την f οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

Άρα υπάρχουν τουλάχιστον $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοιοι ώστε $f'(\xi_1) = 0$ και $f'(\xi_2) = 0$, δηλαδή η f' έχει δυο τουλάχιστον ρίζες. Επειδή η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνεπάγεται ότι η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) και επειδή ισχύει $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$, η f' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle. Επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$, δηλαδή η f'' έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

7. Γενικότερα, αν μία συνάρτηση f είναι n -φορές παραγωγίσιμη ($n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 1$) και έχει $n+1$ ρίζες τότε η $f^{(n)}$ (νιοστή παράγωγος) έχει μία τουλάχιστον ρίζα.
8. Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f έχει το πολύ μία ρίζα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω ότι η συνάρτηση f έχει δύο ρίζες τις x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ άρα θα έχουμε $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle στο $[x_1, x_2]$. Έχουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Άρα ισχύουν για την f στο $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$ οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$ άτοπο γιατί $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

9. Αν $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f έχει δύο το πολύ ρίζες.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ

1. Αν στα ζητούμενα μιας άσκησης υπάρχει η εξίσωση $f'(\xi) = 0$ ή $f''(\xi) = 0$ αυτό είναι μία πρώτη ένδειξη ότι για τη λύση της άσκησης θα κάνουμε χρήση του θεωρήματος Rolle για την f ή την f' .
2. Αν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = c$ ή $f''(\xi) = c$ όπου $c =$ σταθερά, τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση $g(x) = f'(x) - c$ ή την $h(x) = f''(x) - c$ ή να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - cx$ ή την $h(x) = f'(x) - cx + c_1$.
3. Κάνουμε χρήση του Θεωρήματος του Rolle αν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι:
 - Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β)
 - Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα (α, β)
 - Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα (α, β)
 - Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ k - ρίζες στο διάστημα (α, β)
 - Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς k - ρίζες
 - Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον k -ρίζες
 - Η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο διάστημα (α, β)

Πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι πολλές από αυτές τις περιπτώσεις επιλύονται με το θεώρημα Bolzano ή με εύρεση του συνόλου τιμών και εφαρμογή του Θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών, ή βρίσκοντας την προφανή ρίζα της f (αν υπάρχει).

Το Θεώρημα Rolle μερικές φορές το χρησιμοποιούμε για την F δηλαδή την παράγουσα της συνάρτησης f , όπως θα δούμε και στο κεφάλαιο 4.

4. Για να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε να ισχύει κάποια ισότητα αρκεί να αποδείξουμε ότι, η εξίσωση που προκύπτει από την ισότητα αν θέσουμε όπου ξ το x , έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

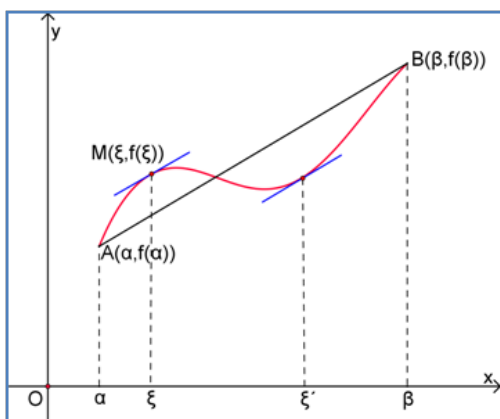
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB , που ορίζουν τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$. (Βλέπε «Σχήμα 1»)



Σχήμα 1

Σημαντικές παρατηρήσεις

1. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε συνάρτηση f διπλού τύπου, με το σημείο (x_0) στο οποίο αλλάζει τύπο η f να είναι εσωτερικό σημείο του $[\alpha, \beta]$, τότε χρησιμοποιούμε τον ορισμό της παραγώγου για να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
2. Αν ερμηνεύσουμε το Θ.Μ.Τ. στη Φυσική, σημαίνει ότι κατά την ευθύγραμμη κίνηση ενός κινητού στο χρονικό διάστημα $[t_1, t_2]$ υπάρχει μία τουλάχιστον χρονική στιγμή $t_0 \in (t_1, t_2)$ τέτοια ώστε η ταχύτητα του κινητού να ισούται με την μέση ταχύτητα του.
3. Αν ισχύουν για μια συνάρτηση f οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. (συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β)) και επιπλέον $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε ισχύει και το θεώρημα Rolle. Άρα το Θ. Rolle είναι ειδική περίπτωση του Θ.Μ.Τ.
4. Αν σε μία άσκηση δεν μπορούμε να ξεχωρίσουμε ποιο από τα δύο θεωρήματα (Θ.Μ.Τ. - Θ.Rolle) πρέπει να εφαρμόσουμε, τότε εφαρμόζουμε πρώτα το Θ.Μ.Τ.

3. Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha, \beta]$ και επιπλέον :
- $f(\alpha) < f(\beta)$ τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ μὲν $f'(\xi) > 0$ που σημαίνει ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης θετικό, άρα σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα $x'x$.
 - $f(\alpha) > f(\beta)$ τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ μὲν $f'(\xi) < 0$ που σημαίνει ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης αρνητικό, άρα σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$.
4. Η εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. στην f' μας δίνει αντίστοιχα συμπεράσματα για την $f''(\xi)$.
7. Αν σε μια σχέση υπάρχει ο λόγος $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ ή η διαφορά $f(\beta) - f(\alpha)$ τότε χρησιμοποιούμε το Θ.Μ.Τ. στην f .
8. Αν μία σχέση περιέχει $f'(x_1), f'(x_2), \dots, f'(x_\lambda)$ με $x_1, x_2, \dots, x_\lambda \in (\alpha, \beta)$ και ισχύουν για την f οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε συνήθως εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. λ φορές σε κατάλληλα υποδιαστήματα του $[\alpha, \beta]$.
9. Αν μία συνθήκη περιέχει μόνο $f'(x_1), f'(x_2)$ με $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ και ισχύουν για την f οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε συνήθως εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[\alpha, \mu], [\mu, \beta]$ όπου μ το μέσο του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ ($\mu = \frac{\alpha + \beta}{2}$)
10. Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και επιπλέον:
- f' γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ τότε $f'(\alpha) < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < f'(\beta)$, ενώ αν
 - f' γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$ τότε $f'(\beta) < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < f'(\alpha)$.
11. Το Θ.Μ.Τ. δεν χρησιμοποιείται συνήθως για την επίλυση εξισώσεων. Εξαίρεση αποτελούν ορισμένες εξισώσεις όπως για παράδειγμα η $7^x - 6^x = 9^x - 8^x$.
12. Όταν θέλουμε να δείξουμε μια διπλή ανισότητα εξετάζουμε αν μπορούμε να την μετασχηματίσουμε σε ισοδύναμη της μορφής $\kappa < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < \lambda$ και έπειτα εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στην f στο $[\alpha, \beta]$.