

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Γ Άσκηση 1.

Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^4 + 2x^3 + x^2}$$

Άσκηση 2.

Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής για τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} & \text{αν } x \leq 1 \\ (x-2)^3 + 2 & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2\alpha x \ln x - x^2 - 2\alpha x - \alpha^2 \ln \alpha^2$, $\alpha \neq 0$.

Να προσδιορίσετε το α ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

Ποια είναι η καμπύλη στην οποία κινείται το σημείο καμπής καθώς το α μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}^*$;

Άσκηση 4.

Αν $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$.

- Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.
- Να αποδείξετε ότι ισχύει $2 \ln \frac{(e^x + 1)}{2} \geq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 5.

Αν η f είναι κυρτή και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αποδείξτε ότι:

- Υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) > 0$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Άσκηση 6

Να μελετήσετε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$ ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Άσκηση 7

Έστω $\lambda > 0$ και η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x + \lambda \cdot \ln(\lambda^2 + x^2)$ με $x \in \mathbb{R}$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τα σημεία καμπής του γραφήματός της.
- Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f σε ένα τουλάχιστον από τα σημεία καμπής της, να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΘΕΜΑ Δ Άσκηση 8

Για την δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f ισχύει $(f'(x))^2 - f'(x) = (x+1)e^{-x} + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν παρουσιάζει σημείο καμπής.

Άσκηση 9.

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x \ln x - \frac{\alpha x^2}{2} - \frac{1}{2\alpha}$, $\alpha \neq 0$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει σημείο καμπής.

- i. Να αποδείξετε ότι $\alpha > 0$.
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής.
- iii. Αν $A(x_0, f(x_0))$ σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f να δείξετε ότι αυτό δεν μπορεί να είναι κάτω από την ευθεία $y = -1$.

Άσκηση 10

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x - e^{1-x}$, $x > 0$ και $g(x) = x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- α) η f είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$ και η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$
- β) οι γραφικές παραστάσεις των f , g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο $A(1, -1)$.
- γ) $2 + \ln x \leq x^2 + e^{1-x}$ για κάθε $x > 0$.

Άσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση f , παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[0, 9]$ με $f(5) = 0$.

- A. Να αποδείξετε ότι $4f(0) + 5f(9) > 0$.
- B. Αν επιπλέον $f(2) = 2$, $f(6) = 10$. Να δείξετε ότι:
 - α) $f(4) < 6$.
 - β) $f'(2) < 2 < f'(6)$.

Άσκηση 12.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, στρέφει τα κοίλα άνω (κυρτή) στο $\mathbb{R}$ και $f(\alpha) = f(\beta)$ για κάποια $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq \beta$, να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Άσκηση 13.

Έστω μία συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ η οποία στρέφει τα κοίλα προς τα άνω. Να δείξετε ότι:

- i) Για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ ισχύει: $\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} < \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x}$.
- ii) Ισχύει $f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$.
- iii) Αν $f(\alpha) = \alpha$ και $f(\beta) = \beta$ τότε $f(x) \leq x$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^4 + 2x^3 + x^2}$$

Λύση

Πρέπει $x^4 + 2x^3 + x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2(x+1)^2 \neq 0$.

Άρα πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq -1$.

Δηλαδή $x \in \Delta = D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

Ο τύπος της συνάρτησης ισοδύναμα γίνεται : $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$.

Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο Δ ως πράξεις παραγωγισίμων (άρα και συνεχής) με

$$\begin{aligned} \bullet \quad f'(x) &= \left(\frac{2x+1}{(x^2+x)^2} \right)' = \frac{(2x+1)'(x^2+x)^2 - (2x+1)[(x^2+x)^2]'}{(x^2+x)^4} = \\ &= \frac{2(x^2+x)^2 - 2(2x+1)(x^2+x)(2x+1)}{(x^2+x)^4} = \frac{2(x^2+x)[(x^2+x) - (2x+1)^2]}{(x^2+x)^4} = \\ &= \frac{2[-3x^2 - 3x - 1]}{(x^2+x)^3} = -2 \frac{[3x^2 + 3x + 1]}{(x^2+x)^3}. \\ \bullet \quad f''(x) &= -2 \left(\frac{3x^2 + 3x + 1}{(x^2+x)^3} \right)' = -2 \frac{(6x+3)(x^2+x)^3 - 3(3x^2 + 3x + 1)(x^2+x)^2(2x+1)}{(x^2+x)^6} = \\ &= -2 \frac{3(2x+1)(x^2+x)^3 - 3(3x^2 + 3x + 1)(x^2+x)^2(2x+1)}{(x^2+x)^6} = \\ &= -6 \frac{(2x+1)(x^2+x)^2[(x^2+x) - (3x^2 + 3x + 1)]}{(x^2+x)^6} = \end{aligned}$$

$$-6 \frac{(2x+1)(-2x^2-2x-1)}{(x^2+x)^4} = 6 \frac{(2x+1)(2x^2+2x+1)}{(x^2+x)^4}.$$

Είναι $2x^2+2x+1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $\Delta = -4 < 0$ και $(x^2+x)^4 > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

Επομένως

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow 6 \frac{(2x+1)(2x^2+2x+1)}{(x^2+x)^4} < 0 \Leftrightarrow 2x+1 < 0, x \neq 0, x \neq -1 \Leftrightarrow$

$$x < -\frac{1}{2}, x \neq -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-1, -\frac{1}{2})$$

X	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$		
$f''(x)$	-		-	○	+		+
$f(x)$							

Σ.Κ.

Άρα η f είναι κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα $[-\frac{1}{2}, 0)$ και $(0, +\infty)$ και κοίλη σε

καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(-1, -\frac{1}{2}]$. Παρουσιάζει σημείο καμπής το

$A(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}))$ δηλαδή $A(-\frac{1}{2}, 0)$.

Άσκηση 2.

Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής για τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} & \text{αν } x \leq 1 \\ \frac{(x-2)^3 + 2}{3} & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = D_f = \mathbb{R}$. Έχουμε:

Αν $x < 1$ τότε $f'(x) = x^2$.

Αν $x > 1$ τότε $f'(x) = (x-2)^2$.

Στο $x_0 = 1$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{3(x-1)} = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{(x-2)^3 + 2}{3} - \frac{1}{3}}{x - 1} = \frac{(x-2)^3 + 1}{3(x-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-2+1)[(x-2)^2 - (x-2) + 1]}{3(x-1)} = 1.$$

Οπότε η f είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 1$. Έτσι η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $\mathbb{R}$ με τύπο

$$f'(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ (x-2)^2, & x > 1 \end{cases}$$

οπότε η C_f δέχεται εφαπτομένη σε κάθε σημείο της $M(x, f(x))$, $x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x < 1$: $f''(x) = 2x$, οπότε $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Για κάθε $x > 1$: $f''(x) = 2(x-2)$, οπότε $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ και $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

Ο πίνακας μεταβολών της f ως προς την κυρτότητα είναι:

X	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f''(x)$	-		+	-		+
$f(x)$	$\Sigma.K.$ $\Sigma.K.$ $\Sigma.K.$ $\Sigma.K.$					

Επομένως η f :

στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα $(-\infty, 0]$ αφού είναι συνεχής σ' αυτό και $f''(x) < 0$ στο εσωτερικό του.

στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $[0, 1]$ αφού είναι συνεχής σ' αυτό και $f''(x) > 0$ στο εσωτερικό του.

στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα $[1, 2]$ αφού είναι συνεχής σ' αυτό και $f''(x) < 0$ στο εσωτερικό του.

στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $[2, +\infty)$ αφού είναι συνεχής σ' αυτό και $f''(x) > 0$ στο εσωτερικό του.

Παρουσιάζει σημεία καμπής στις θέσεις $x = 0$, $x = 1$ και $x = 2$ αφού η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν αυτών, $f''(0) = 0, f''(2) = 0$ και ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ (Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1).

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2\alpha x \ln x - x^2 - 2\alpha x - \alpha^2 \ln \alpha^2$, $\alpha \neq 0$.

Να προσδιορίσετε το α ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

Ποια είναι η καμπύλη στην οποία κινείται το σημείο καμπής καθώς το α μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}^*$;

Λύση

Η f ορίζεται όταν $x > 0$ δηλαδή το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\Delta = D_f = (0, +\infty)$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων και έχουμε :

$$f'(x) = (2\alpha x \ln x - x^2 - 2\alpha x - \alpha^2 \ln \alpha^2)' = 2\alpha \ln x + 2\alpha x \frac{1}{x} - 2x - 2\alpha = 2\alpha \ln x + 2\alpha - 2x - 2\alpha = 2(\alpha \ln x - x), x > 0$$

$$f''(x) = 2(\alpha \ln x - x)' = 2\left(\frac{\alpha}{x} - 1\right) = 2\frac{\alpha - x}{x}, x > 0.$$

Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, πιθανές θέσεις σημείων

καμπής είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\frac{\alpha - x}{x} = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$ με $x > 0$.

- Αν $\alpha < 0$ η εξίσωση $f''(x) = 0$ είναι αδύνατη (αφού $x \in (0, +\infty)$). Άρα για $\alpha < 0$ η f δεν παρουσιάζει σημείο καμπής.
- Αν $\alpha > 0$ η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει μοναδική λύση $x = \alpha$ (Πιθανή θέση σημείου καμπής)

$$\text{Επιπλέον: } f''(x) < 0 \Leftrightarrow 2\frac{\alpha - x}{x} < 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \alpha - x < 0 \Leftrightarrow x > \alpha$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2\frac{\alpha - x}{x} > 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \alpha - x > 0 \Leftrightarrow x < \alpha.$$

X	0	α	$+\infty$
$f''(x)$		$\begin{array}{c} \circ \\ \end{array}$	
$f(x)$		$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{Σ.Κ.} \\ \curvearrowleft \end{array}$	

Δηλαδή η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $x = \alpha$ και επιπλέον ορίζεται εφαπτομένη στο $x = \alpha$ αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\alpha > 0$.

Συνεπώς η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $M(\alpha, f(\alpha))$. Δηλαδή το $M(\alpha, -3\alpha^2)$ με $\alpha > 0$.

Επομένως η f παρουσιάζει σημείο καμπής στα σημεία $M(\alpha, f(\alpha))$ του γραφήματός της για κάθε $\alpha > 0$.

Καθώς το α μεταβάλλεται στο $(0, +\infty)$ η το σημείο $M(\alpha, -3\alpha^2)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις $x = \alpha$, $y = -3\alpha^2$ με $\alpha > 0$, από τις οποίες με απαλοιφή του α προκύπτει η εξίσωση $y = -3x^2$, $x > 0$.

Δηλαδή το σημείο καμπής της f κινείται στο τμήμα της παραβολής με εξίσωση $y = -3x^2$ το οποίο βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζουν οι ημιάξονες $Ox(x > 0)$ και $Oy'(y < 0)$ όπου $O(0,0)$.

Άσκηση 4.

Αν $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
- ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.
- iii. Να αποδείξετε ότι ισχύει $2\ln \frac{(e^x + 1)}{2} \geq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

- i. Η f ορίζεται στο $\mathbb{R}$ αφού $e^x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σ' αυτό, ως πράξεις παραγωγισίμων, με

$$f'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1},$$

$$f''(x) = -\frac{e^x(e^x + 1) - e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\mathbb{R}$.

- ii. Αν (ε) είναι εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ τότε

$$(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y + \ln 2 = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \ln 2$$

- iii. Η γραφική παράσταση της f στρέφει τα κοίλα κάτω όπως αποδείξαμε στο i. ερώτημα.

Επομένως θα βρίσκεται κάτω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Επομένως για την εφαπτομένη (ε) στο $M(0, -\ln 2)$ θα ισχύει

$$f(x) \leq \frac{1}{2}x - \ln 2 \Leftrightarrow x - \ln(e^x + 1) \leq \frac{1}{2}x - \ln 2$$

$$\ln(e^x + 1) - \ln 2 \geq \frac{1}{2}x \Leftrightarrow 2\ln \frac{(e^x + 1)}{2} \geq x$$

Άσκηση 5.

Αν η f είναι κυρτή και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αποδείξτε ότι:

i. Υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) > 0$.

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Λύση

i. Θεωρώ τυχαία x_1, x_2 στο $\mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$.

Η f ως κυρτή στο $\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε και στο $[x_1, x_2] \subseteq \mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $(x_1, x_2) \subseteq \mathbb{R}$.

Επομένως η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[x_1, x_2]$.

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1)

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και επομένως για

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $f'(\xi) > 0$.

ii. Η εφαπτομένη στο $A(\xi, f(\xi)) \in C_f$ έχει εξίσωση

$$(ε): y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = f'(\xi)x + f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ θα έχει γραφική παράσταση η οποία θα βρίσκεται από οποιαδήποτε εφαπτομένη της και “πάνω” δηλαδή και από την (ε).

Επομένως θα ισχύει $f(x) \geq f'(\xi)x + f(\xi) - \xi f'(\xi)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (3)

Αν $g(x) = f'(\xi)x + f(\xi) - \xi f'(\xi)$ είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(\xi)x + f(\xi) - \xi f'(\xi)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(\xi)x) = +\infty$$

αφού $f'(\xi) > 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.

Άρα $g(x) > 0$ για κάθε x κοντά στο $+\infty$.

Επομένως θα είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{g(x)} = 0$ και από την (3) παίρνουμε:

$$f(x) \geq g(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{g(x)} \text{ για κάθε } x \text{ κοντά στο } +\infty.$$

Από το κριτήριο της παρεμβολής θα έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

αφού $f(x) > 0$ για κάθε x κοντά στο $+\infty$.

Άσκηση 6

Να μελετήσετε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$ ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

Λύση

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

- $f'(x) = (2x + 2)e^{1-x} + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}(1-x)' = (2x + 2)e^{1-x} - (x^2 + 2x + 2)e^{1-x} = (2x + 2 - x^2 - 2x - 2)e^{1-x} = -x^2e^{1-x}$
- $f''(x) = (-x^2e^{1-x})' = -2xe^{1-x} - x^2e^{1-x}(1-x)' = -2xe^{1-x} + x^2e^{1-x} = (x^2 - 2x)e^{1-x} = x(x-2)e^{1-x}$

Οπότε:

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x)e^{1-x} < 0 \stackrel{e^{1-x} > 0}{\Leftrightarrow} x^2 - 2x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2.$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x)e^{1-x} > 0 \stackrel{e^{1-x} > 0}{\Leftrightarrow} x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x > 2.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2 \text{ (πιθανές θέσεις σημείων καμψής)}$$

Ο πίνακας μεταβολών της f ως προς την κυρτότητα της είναι:

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f''(x)$	+	$\circ$	-	$\circ$	+
$f(x)$		$\Sigma.Κ.$		$\Sigma.Κ.$	

Η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(-\infty, 0]$ αφού είναι $f''(x) > 0$ στο εσωτερικό του.

Η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[0, 2]$ αφού είναι $f''(x) < 0$ στο εσωτερικό του.

Η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $[2, +\infty)$ αφού είναι $f''(x) > 0$ στο εσωτερικό του.

Παρουσιάζει σημεία καμψής τα $A(0, f(0))$ και $B(2, f(2))$ δηλαδή τα $A(0, 2e)$ και $B\left(2, \frac{10}{e}\right)$

αφού ως παραγωγίσιμη δέχεται εφαπτομένη σ' αυτά και η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των $x = 0$ και $x = 2$ όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα μεταβολών.

Άσκηση 7

Έστω $\lambda > 0$ και η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x + \lambda \cdot \ln(\lambda^2 + x^2)$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τα σημεία καμπής του γραφήματός της.

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f σε ένα τουλάχιστον από τα σημεία καμπής της, να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ αφού $\lambda^2 + x^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda > 0$.

Είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = (x + \lambda \ln(\lambda^2 + x^2))' = 1 + \lambda \cdot \frac{2x}{\lambda^2 + x^2}$,

$$f''(x) = \left(1 + \lambda \frac{2x}{\lambda^2 + x^2}\right)' = \lambda \frac{2(\lambda^2 + x^2) - 4x^2}{(\lambda^2 + x^2)^2} = \lambda \frac{2\lambda^2 + 2x^2 - 4x^2}{(\lambda^2 + x^2)^2} = 2\lambda \frac{\lambda^2 - x^2}{(\lambda^2 + x^2)^2},$$

Είναι:

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 2\lambda \frac{\lambda^2 - x^2}{(\lambda^2 + x^2)^2} < 0 \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} x^2 > \lambda^2 \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} |x| > \lambda \Leftrightarrow x < -\lambda \text{ ή } x > \lambda,$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2\lambda \frac{\lambda^2 - x^2}{(\lambda^2 + x^2)^2} > 0 \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} x^2 < \lambda^2 \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} |x| < \lambda \Leftrightarrow -\lambda < x < \lambda.$$

Ο πίνακας μεταβολών της f ως προς την κυρτότητα της είναι

x	$-\infty$	$-\lambda$	λ	$+\infty$
$f''(x)$		-	+	-
$f(x)$		Σ.Κ.	Σ.Κ.	

Παρουσιάζει σημεία καμπής τα $A(-\lambda, f(-\lambda))$ και $B(\lambda, f(\lambda))$ δηλαδή τα

$$A(-\lambda, -\lambda + \lambda \ln(2\lambda^2)) \text{ και } B(\lambda, \lambda + \lambda \ln(2\lambda^2)).$$

β) Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο A έχει εξίσωση

$$(\varepsilon): \psi - f(-\lambda) = f'(-\lambda)(x + \lambda) \Leftrightarrow \psi + \lambda - \lambda \ln(2\lambda^2) = 0(x + \lambda) \Leftrightarrow \psi = -\lambda + \lambda \ln(2\lambda^2)$$

Η εφαπτομένη (η) της C_f στο B έχει εξίσωση

$$(\eta): \psi - f(\lambda) = f'(\lambda)(x - \lambda) \Leftrightarrow \psi - \lambda - \lambda \ln(2\lambda^2) = 2(x - \lambda) \Leftrightarrow \psi = 2x - \lambda + \lambda \ln(2\lambda^2)$$

Για να διέρχεται μία τουλάχιστον από τις (ε), (η) από την αρχή των αξόνων πρέπει

$$-\lambda + \lambda \ln(2\lambda^2) = 0 \Leftrightarrow \lambda(-1 + \ln(2\lambda^2)) = 0 \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} \ln(2\lambda^2) = 1 \Leftrightarrow \ln(2\lambda^2) = \ln e \Leftrightarrow 2\lambda^2 = e \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 = \frac{e}{2} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \sqrt{\frac{e}{2}}}$$

Άσκηση 8

Για την δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f ισχύει $(f'(x))^2 - f'(x) = (x+1)e^{-x} + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν παρουσιάζει σημείο καμπής.

Λύση

Υποθέτουμε ότι η f παρουσιάζει σημείο καμπής σε κάποιο $x_0 \in D_f = \mathbb{R}$.

Τότε, αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0 θα ισχύει $f''(x_0) = 0$ (1).

Όμως παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της δεδομένης ισότητας έχουμε:

$$\begin{aligned} \left[(f'(x))^2 - f'(x) \right]' &= \left[(x+1)e^{-x} + x \right]' \Leftrightarrow 2f'(x)f''(x) - f''(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} + 1 \Leftrightarrow \\ 2f'(x)f''(x) - f''(x) &= -xe^{-x} + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{και για } x = x_0 \text{ έχουμε } 2f'(x_0)f''(x_0) - f''(x_0) &= -x_0e^{-x_0} + 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} -x_0e^{-x_0} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0}{e^{x_0}} = 1 \Leftrightarrow \\ x_0 - e^{x_0} &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Όμως θεωρώντας τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = x - e^x$, $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$g'(x) = 1 - e^x.$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - e^x < 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 0.$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 0.$$

Δηλαδή

- Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ αφού ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής σ' αυτό και $g'(x) < 0$ στο εσωτερικό του. Οπότε αν $x_0 > 0$ τότε $g(x_0) < g(0) \Leftrightarrow x_0 - e^{x_0} < -1 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 0 < -1$ Άτοπο
- Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ αφού ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής σ' αυτό και $g'(x) > 0$ στο εσωτερικό του. Οπότε αν $x_0 < 0$ τότε $g(x_0) < g(0) \Leftrightarrow x_0 - e^{x_0} < -1 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 0 < -1$ Άτοπο
- Προφανώς για $x_0 = 0$ είναι $g(x_0) = g(0) \Leftrightarrow x_0 - e^{x_0} = -1 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 0 = -1$ Άτοπο.

Έτσι σε κάθε περίπτωση οδηγούμαστε σε άτοπο και συνεπώς η αρχική υπόθεση ότι η f παρουσιάζει σημείο καμπής σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι λανθασμένη.

Επομένως η f δεν παρουσιάζει σημείο καμπής στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 9.

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x \ln x - \frac{\alpha x^2}{2} - \frac{1}{2\alpha}$, $\alpha \neq 0$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει σημείο καμπής.

- Να αποδείξετε ότι $\alpha > 0$.
- Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής.
- Αν $A(x_0, f(x_0))$ σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f να δείξετε ότι αυτό δεν μπορεί να είναι κάτω από την ευθεία $y = -1$.

Λύση

- Η f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, ως πράξεις παραγωγισίμων, με

$$f'(x) = \left(x \ln x - \frac{\alpha x^2}{2} - \frac{1}{2\alpha} \right)' = \ln x + 1 - \alpha x, \quad x > 0 \quad \text{και} \quad f''(x) = \frac{1}{x} - \alpha = \frac{1 - \alpha x}{x}, \quad x > 0.$$

Αν $A(x_0, f(x_0))$ σημείο καμπής της C_f , και επειδή είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0 , θα είναι

$$f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \alpha x_0}{x_0} = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha x_0 = 0 \Leftrightarrow \alpha x_0 = 1 \stackrel{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} x_0 = \frac{1}{\alpha}$$

Επειδή $D_f = (0, +\infty)$, θα είναι $x_0 = \frac{1}{\alpha} > 0$ οπότε $\alpha > 0$

$$\text{ii. Είναι: } f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \alpha x}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha x = 0 \Leftrightarrow \alpha x = 1 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{1}{\alpha} \quad (1)$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \alpha x}{x} > 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} 1 - \alpha x > 0 \Leftrightarrow \alpha x < 1 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} x < \frac{1}{\alpha}, \quad x > 0 \quad (2)$$

x	0	$1/\alpha$	$+\infty$
$f''(x)$	+	$\bigcirc$	-
$f(x)$		Σ.Κ.	

- Η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\left(0, \frac{1}{\alpha}\right]$ αφού είναι $f''(x) > 0$ στο εσωτερικό του και

$$f \text{ συνεχής στο } \left(0, \frac{1}{\alpha}\right].$$

- Η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\left[\frac{1}{\alpha}, +\infty\right)$ αφού είναι $f''(x) < 0$ στο εσωτερικό του και f συνεχής στο $\left[\frac{1}{\alpha}, +\infty\right)$.

- Η C_f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x_0 = \frac{1}{\alpha}$ που είναι το $A\left(\frac{1}{\alpha}, f\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)$ δηλαδή το $A\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{-\ln \alpha - 1}{\alpha}\right)$.

iii. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{-\ln \alpha - 1}{\alpha} \geq -1 \Leftrightarrow \overset{\alpha > 0}{-\ln \alpha - 1 \geq -\alpha} \Leftrightarrow \ln \alpha - \alpha + 1 \leq 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \ln x, x > 0$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = \frac{1}{x}$ και $g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ δηλαδή είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$.

Η εφαπτομένη της C_g στο $B(1, g(1))$ είναι $(\varepsilon): y - \ln 1 = 1(x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1$.

Η g στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(0, +\infty)$ και επομένως η γραφική της παράσταση θα βρίσκεται κάτω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της οπότε κάτω και από την εφαπτομένη της στο B , δηλαδή θα ισχύει

$g(x) \leq x - 1 \Leftrightarrow \ln x - x + 1 \leq 0$ για κάθε $x > 0$ οπότε και $\ln \alpha - \alpha + 1 \leq 0$, για κάθε $\alpha > 0$.

Άσκηση 10

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x - e^{1-x}$, $x > 0$ και $g(x) = x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$ και η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

β) οι γραφικές παραστάσεις των f , g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο $A(1, -1)$.

γ) $2 + \ln x \leq x^2 + e^{1-x}$ για κάθε $x > 0$.

Λύση

α) Είναι $f'(x) = \frac{1}{x} + e^{1-x}$ και $f''(x) = \frac{1}{x^2} - e^{1-x} < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Επομένως η C_f στρέφει τα κοίλα κάτω (κοίλη) στο $(0, +\infty)$

Επίσης $g'(x) = 2x$ και $g''(x) = 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η C_g στρέφει τα κοίλα άνω (κυρτή) στο $\mathbb{R}$.

β) Η εφαπτομένη της C_f στο $x = 1$ έχει εξίσωση:

$$\psi - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow \psi + 1 = 2(x - 1) \Leftrightarrow \psi = 2x - 3$$

Η εφαπτομένη της C_g στο $x = 1$ έχει εξίσωση:

$$\psi - g(1) = g'(1)(x - 1) \Leftrightarrow \psi + 1 = 2(x - 1) \Leftrightarrow \psi = 2x - 3$$

Επομένως οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο $A(1, -1)$ την

(ε): $\psi = 2x - 3$.

γ) Η C_f στρέφει τα κοίλα κάτω (κοίλη) στο $(0, +\infty)$ και επομένως θα βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της στο $A(1, -1)$ με εξαίρεση το A το οποίο είναι και το μοναδικό κοινό σημείο τους.

Επομένως θα ισχύει $f(x) \leq 2x - 3$ κάθε $x > 0$ (η ισότητα ισχύει για $x = 1$)

Η C_g στρέφει τα κοίλα άνω (κυρτή) στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $(0, +\infty)$ και επομένως θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της στο $A(1, -1)$ με εξαίρεση το A το οποίο είναι και το μοναδικό κοινό σημείο τους.

Επομένως θα ισχύει $g(x) \geq 2x - 3$ κάθε $x > 0$ (η ισότητα ισχύει για $x = 1$)

Άρα $f(x) \leq 2x - 3 \leq g(x)$ δηλαδή $\ln x - e^{1-x} \leq x^2 - 2 \Leftrightarrow 2 + \ln x \leq x^2 + e^{1-x}$ για κάθε

$x \in (0, +\infty)$.

Άσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση f , παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[0,9]$ με $f(5) = 0$.

A. Να αποδείξετε ότι $4f(0) + 5f(9) > 0$.

B. Αν επιπλέον $f(2) = 2$, $f(6) = 10$. Να δείξετε ότι :

α) $f(4) < 6$.

β) $f'(2) < 2 < f'(6)$.

Λύση

A. Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[0,5]$ και $[5,9]$ και επομένως θα υπάρχουν τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (0,5)$ και τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (5,9)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} \Leftrightarrow f'(\xi_1) = \frac{-f(0)}{5} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(9) - f(5)}{9 - 5} \Leftrightarrow f'(\xi_2) = \frac{f(9)}{4}$$

Όμως η f είναι κυρτή στο $[0,9]$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,9]$ και επειδή $0 < \xi_1 < \xi_2 < 9$ θα είναι

$$f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{-f(0)}{5} < \frac{f(9)}{4} \Leftrightarrow -4f(0) < 5f(9) \Leftrightarrow 4f(0) + 5f(9) > 0.$$

B. Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[2,4]$ και $[4,6]$ και επομένως θα υπάρχουν τουλάχιστον ένα $\rho_1 \in (2,4)$ και τουλάχιστον ένα $\rho_2 \in (4,6)$ τέτοια ώστε

$$f'(\rho_1) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} \Leftrightarrow f'(\rho_1) = \frac{f(4) - 2}{2} \text{ και}$$

$$f'(\rho_2) = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} \Leftrightarrow f'(\rho_2) = \frac{10 - f(4)}{2}$$

Όμως η f είναι κυρτή στο $[2,6]$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,6]$ και επειδή $2 < \rho_1 < \rho_2 < 6$ θα είναι:

α) $f'(\rho_1) < f'(\rho_2) \Leftrightarrow \frac{f(4) - 2}{2} < \frac{10 - f(4)}{2} \Leftrightarrow f(4) - 2 < 10 - f(4) \Leftrightarrow 2f(4) < 12 \Leftrightarrow f(4) < 6$

β) $f'(2) < f'(\rho_1) \Leftrightarrow f'(2) < \frac{f(4) - 2}{2} \Leftrightarrow 2f'(2) < f(4) - 2$ και λόγω του (α)

$$2f'(2) < 6 - 2 \Leftrightarrow 2f'(2) < 4 \Leftrightarrow f'(2) < 2.$$

Ομοίως $f'(\rho_2) < f'(6) \Leftrightarrow \frac{10 - f(4)}{2} < f'(6) \Leftrightarrow 10 - f(4) < 2f'(6)$ και λόγω του (α)

$$10 - 6 < 2f'(6) \Leftrightarrow 2 < f'(6)$$

Οπότε τελικά έχουμε $f'(2) < 2 < f'(6)$.

Άσκηση 12.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, στρέφει τα κοίλα άνω (κυρτή) στο $\mathbb{R}$ και $f(\alpha) = f(\beta)$ για κάποια $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq \beta$, να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Λύση

Υποθέτουμε ότι $\alpha < \beta$.

- Η f είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$.
- $f(\alpha) = f(\beta)$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle για την f στο $[\alpha, \beta]$ οπότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Η εφαπτομένη στο $A(\xi, f(\xi))$ είναι

$$(\varepsilon): \psi - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow \psi - f(\xi) = 0(x - \xi) \Leftrightarrow \psi = f(\xi)$$

και επειδή η C_f στρέφει τα κοίλα άνω (κυρτή) στο $\mathbb{R}$ θα βρίσκεται πάνω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της οπότε και από την (ε) και συνεπώς θα ισχύει $f(x) \geq f(\xi)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = \xi$ με ελάχιστη τιμή $f(\xi)$.

Ομοίως αποδεικνύεται η πρόταση αν $\alpha > \beta$.

Άσκηση 13.

Έστω μία συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ η οποία στρέφει τα κοίλα προς τα άνω. Να δείξετε ότι:

i) Για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ ισχύει: $\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} < \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x}$.

ii) Ισχύει $f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$.

iii) Αν $f(\alpha) = \alpha$ και $f(\beta) = \beta$ τότε $f(x) \leq x$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Λύση

i) Θεωρούμε τυχαίο $x \in (\alpha, \beta)$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, άρα και συνεχής σ' αυτό και επομένως είναι συνεχής και στα διαστήματα $[\alpha, x]$, $[x, \beta]$. Ομοίως είναι παραγωγίσιμη στα (α, x) , (x, β) . Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. θα υπάρχουν τουλάχιστον ένα

$\xi_1 \in (\alpha, x)$ και τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$, (1), και

$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x}$, (2).

Όμως η f στρέφει τα κοίλα άνω (κυρτή) στο $[\alpha, \beta]$ δηλαδή η f' είναι γνησίως αύξουσα σ' αυτό

και $\xi_1 < \xi_2$. Άρα $f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} < \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x}$

ii) Από το i) ερώτημα για $x = \frac{\alpha + \beta}{2} \in (\alpha, \beta)$ έχουμε $\frac{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha} < \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha + \beta}{2}} \Leftrightarrow$

$\frac{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} < \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} \Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha) < f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) < \frac{f(\beta) + f(\alpha)}{2}$

iii) Από το i) ερώτημα αν $f(\alpha) = \alpha$ και $f(\beta) = \beta$ έχουμε ότι για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ θα είναι

$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} < \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x} \Leftrightarrow \frac{f(x) - \alpha}{x - \alpha} < \frac{\beta - f(x)}{\beta - x} \Leftrightarrow$

$\beta f(x) - x f(x) - \alpha \beta + \alpha x < \beta x - \alpha \beta - x f(x) + \alpha f(x) \Leftrightarrow (\beta - \alpha) f(x) < (\beta - \alpha) x \Leftrightarrow f(x) < x$

Αν $x = \alpha$ ή $x = \beta$ ισχύει ισότητα $f(x) = x$.

Επομένως για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \leq x$.