

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .
- Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

Σχόλιο: Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (ή κοίλη) σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ , βρίσκεται κάτω (αντιστοίχως πάνω) από τη γραφική παράσταση με εξαίρεση κάποιο σημείο επαφής τους.

Θεώρημα:

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κοίλη στο Δ .

Σχόλιο: Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει αφού για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^4$ έχει $f'(x) = 4x^3$ και $f''(x) = 12x^2$

Η $f(x)$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, αλλά η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο $\mathbb{R}$ αφού $f''(0) = 0$.

Ορισμός:

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 . Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) , ή αντιστρόφως και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$

Τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

Όταν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f τότε λέμε ότι η f παρουσιάζει καμπή στο x_0 και λέγεται θέση σημείου καμπής. Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f “διαπερνά” την καμπύλη.

Θεώρημα:

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα τα πιθανά σημεία καμπής μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ είναι:

- Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται.
- Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f'' .

Συμπέρασμα: Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν

- Η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 .
- Ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$.

Τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

Σημαντικές παρατηρήσεις.

- Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο Δ τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε $x_0 \in \Delta$, βρίσκεται κάτω από την C_f , με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Δηλαδή:
Για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
 - Αν η συνάρτηση f είναι κοίλη στο Δ τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε $x_0 \in \Delta$, βρίσκεται πάνω από την C_f , με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Δηλαδή:
Για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
- Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο Δ και η C_f εφάπτεται στον xx' στο x_0 τότε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
 - Αν η συνάρτηση f είναι κοίλη στο Δ και η C_f εφάπτεται στον xx' στο x_0 τότε $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
- Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f “διαπερνά” την καμπύλη.
- Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία η f'' είναι διαφορετική του 0 δεν είναι θέσεις σημείων καμπής.
- Αν η $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε η f δεν παρουσιάζει καμπή στο Δ .
- Αν μια συνάρτηση f είναι πολυωνυμική 3^{ου} βαθμού έχει οπωσδήποτε σημείο καμπής.