

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\alpha$ με $\alpha > 1$.

Άσκηση 2.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 - 3x + 2$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=3$.

Άσκηση 3.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ x^2 - x, & x \geq 0 \end{cases}$.

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-1$ και $x=2$.

Άσκηση 4.

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει:

$$f(x) - g(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f και C_g .

Άσκηση 5.

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3 - x^2 + 5$ και $g(x) = x^2 - x + 5$.

Άσκηση 6.

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = 4 - x^2$ και την ευθεία $y = x + 2$.

Άσκηση 7.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = \sqrt{x}$ και την ευθεία $y = \frac{1}{2}x$.

Άσκηση 8.

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{1-x}{x}$ και της κατακόρυφης ευθείας $x=2$.

Άσκηση 9.

Θεωρούμε δυο συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι συνεχείς στο $[1, 4]$. Αν επιπλέον

$f'(x) - g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ για κάθε $x \in (1, 4)$ και $f(1) = g(1) - 2$, τότε να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις κατακόρυφες ευθείες $x=1$ και $x=4$.

ΘΕΜΑ Γ Άσκηση 10.

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = g''(x) + \eta \mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν στα σημεία $(0, f(0))$ και $(0, g(0))$ οι εφαπτόμενες των C_f και C_g αντίστοιχα, είναι παράλληλες και επιπλέον $f(0) = g(0) = 0$, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = \frac{\pi}{2}$ και $x = \pi$.

Άσκηση 11

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = e^{-x+2}$. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και την ευθεία $y = e^2$.

Άσκηση 12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ln x, x > 0$.

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τα σημεία $M(x, y)$ με $\frac{1}{e} \leq x \leq 1$ και $f(x) \leq y \leq 0$.

Άσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x$.

- Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της C_f , στα σημεία που τέμνει τον άξονα $x'x$.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις δυο εφαπτόμενες και τη C_f .

Άσκηση 14

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x \cdot \ln x}$ με $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

- Να δείξετε ότι η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2x + 1$.
- Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ασύμπτωτη και τις κατακόρυφες ευθείες $x = e$ και $x = e^2$.

Άσκηση 15

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+1}$ με $x \geq -1$. Στο σημείο $A(0, 1)$ της C_f φέρνουμε την εφαπτομένη της ε . Να δείξετε ότι το τρίγωνο το οποίο σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες, χωρίζεται από τη C_f σε δυο χωρία των οποίων τα εμβαδά έχουν λόγο 2:1.

Άσκηση 16

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 3 + e^{-x}$.

- Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ασύμπτωτη και τις ευθείες $x = 1$ και $x = \lambda$ με $\lambda > 1$.
- Να υπολογίσετε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

Άσκηση 17

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$.

- Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την εφαπτομένη της στο $A(2, f(2))$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=1$ και $x=3$.

Άσκηση 18

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3$. Να βρείτε αριθμό $\alpha \in (0, 2)$, ώστε η ευθεία $y = \alpha^3$ να χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $y'y$ και την οριζόντια ευθεία $y=8$, σε δυο ισεμβαδικά χωρία.

Άσκηση 19

- Να υπολογίσετε το εμβαδό $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = e^x$, την ευθεία $y = e^\alpha$ με $\alpha \in [0, 2]$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=0$ και $x=2$.
- Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες το προηγούμενο εμβαδό γίνεται ελάχιστο και μέγιστο αντίστοιχα.

ΘΕΜΑ Δ Άσκηση 20

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x + 1$.

- Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Αν f^{-1} , η αντίστροφη της f , είναι συνεχής, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=4$ και $x=13$.

Άσκηση 21

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 2$ με $x \geq 1$.

- Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο $[1, +\infty)$.
- Αν f^{-1} , η αντίστροφη της f , είναι συνεχής, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στις C_f και $C_{f^{-1}}$.

Άσκηση 22

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και $f'(x) > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, τότε να δείξετε ότι $E > \frac{1}{6}$.

Άσκηση 23

i. Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

Πότε ισχύουν οι ισότητες;

ii. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x^2)$.

Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες

$$x=0 \text{ και } x=1, \text{ τότε να δείξετε ότι } \frac{7}{30} < E < \frac{1}{3}.$$

Άσκηση 24

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, $x > 0$.

- I. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- II. Να βρείτε το εμβαδό $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις κατακόρυφες ευθείες $x = \sqrt{e}$ και $x = \alpha$ με $\alpha \in (0, \sqrt{e})$.
- III. Να βρείτε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} E(\alpha)$.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1.

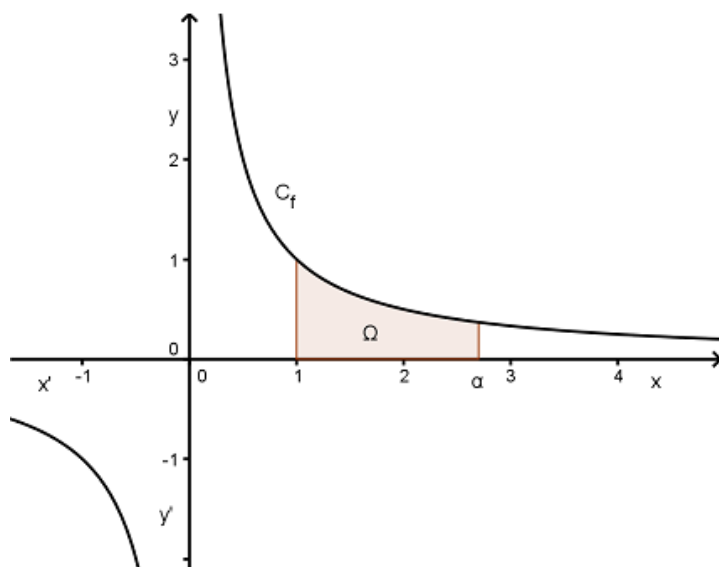
Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\alpha$ με $\alpha > 1$.

Λύση

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, ορίζεται και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.

Επιπλέον $f(x) > 0$ για $x > 0$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου Ω (βλέπε Σχήμα) που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\alpha$ με $\alpha > 1$, ισούται με:

$$E(\Omega) = \int_1^{\alpha} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{\alpha} = \ln \alpha - \ln 1 = \ln \alpha \text{ τ.μον.}$$



Άσκηση 2.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 - 3x + 2$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 3$.

Λύση

Η συνάρτηση ορίζεται και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$ και ρίζες $x = 1$ και $x = 2$, οπότε το πρόσημό του είναι:

X	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	+	○	○	+

Άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 3$, ισούται με:

$$E = \int_1^3 |x^2 - 3x + 2| dx = -\int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx + \int_2^3 (x^2 - 3x + 2) dx =$$

$$-\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_2^3 = 1 \text{ τ.μον.}$$

Άσκηση 3.

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ x^2 - x, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 2$.

Λύση

Η f είναι ορισμένη στο $A = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R}$.

(α) Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ η f με τύπο $f(x) = e^x - 1$, είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

(β) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ η f με τύπο $f(x) = x^2 - x$, είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

(γ) Στη θέση $x = 0$, έχουμε:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x - 1) = 0 \\ f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - x) = 0 \end{cases} \quad \text{συνεπώς η } f \text{ είναι συνεχής στη θέση } x = 0.$$

Συνεπώς από (α), (β) και (γ) η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[-1, 2] \subseteq \mathbb{R}$.

Για $x < 0$ $\stackrel{e^x \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} e^x < 1 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0$ άρα $f(x) < 0$.

Για το $x^2 - x$ έχουμε:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x^2 - x$	+			+

άρα $f(x) < 0$ για $x \in (0, 1)$ και $f(x) > 0$ για $x \in (1, 2]$.

Οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 2$ ισούται με:

$$E = \int_{-1}^2 |f(x)| dx = -\int_{-1}^0 (e^x - 1) dx - \int_0^1 (x^2 - x) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx =$$

$$\left[x - e^x \right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{1}{e} + 1 \text{ τ.μον.}$$

Άσκηση 4.

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει:

$$f(x) - g(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f και C_g .

Λύση

Βρίσκουμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x) - g(x)$.

X	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
$x-1$	-	○	+	+	+	
$x-2$	-	-	○	+	+	
$x-3$	-	-	-	○	+	
$f(x)-g(x)$	-	○	+	○	-	+

Από τον πίνακα έπεται ότι το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στις γραφικές παραστάσεις των f, g ισούται με

$$E = \int_1^3 |f(x) - g(x)| dx = \int_1^2 [f(x) - g(x)] dx - \int_2^3 [f(x) - g(x)] dx.$$

Όμως $f(x) - g(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, άρα

$$E = \int_1^2 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) dx - \int_2^3 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) dx =$$

$$\left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x \right]_1^2 - \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x \right]_2^3 = \frac{1}{2} \text{ τ.μον.}$$

Άσκηση 5.

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3 - x^2 + 5$ και $g(x) = x^2 - x + 5$.

Λύση

Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμικές, οπότε και η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Παίρνουμε τη διαφορά $f(x) - g(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$ και σχηματίζουμε τον πίνακα του προσήμου της:

X	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
f(x) - g(x)	-		+		-

Οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g ισούται με:

$$E = \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{12} \text{ τ.μον.}$$

Άσκηση 6.

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = 4 - x^2$ και την ευθεία $y = x + 2$.

Λύση

Οι συναρτήσεις f και $g(x) = y = x + 2$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμικές, οπότε και η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

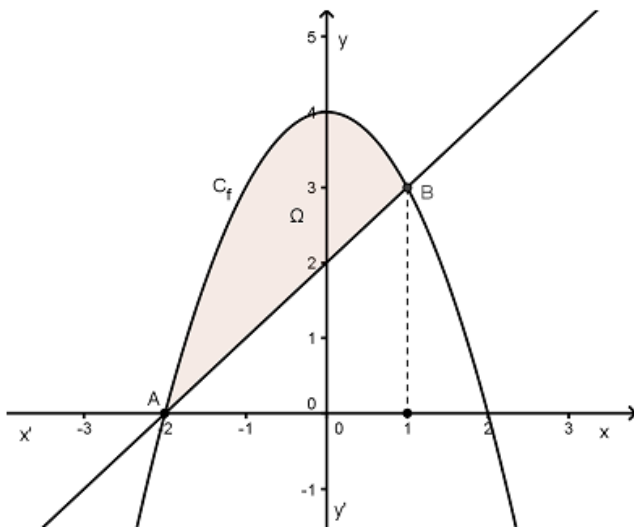
Έχουμε $f(x) - g(x) = 4 - x^2 - (x + 2) = -x^2 - x + 2$. Το τριώνυμο έχει ρίζες $x = -2$ και $x = 1$.

Στον παρακάτω πίνακα βρίσκουμε το πρόσημο του τριωνύμου:

X	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
f(x)−g(x)	-	○	+	○	-

Το εμβαδόν λοιπόν του χωρίου Ω (βλέπε Σχήμα) που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και την ευθεία $y = x + 2$ θα ισούται με:

$$E = \int_{-2}^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 = \frac{9}{2} \text{ τ.μον.}$$



Άσκηση 7.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = \sqrt{x}$ και την ευθεία $y = \frac{1}{2}x$.

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται και είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x = \sqrt{x} \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot (x-4) = 0 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$, οπότε βρίσκουμε τις λύσεις

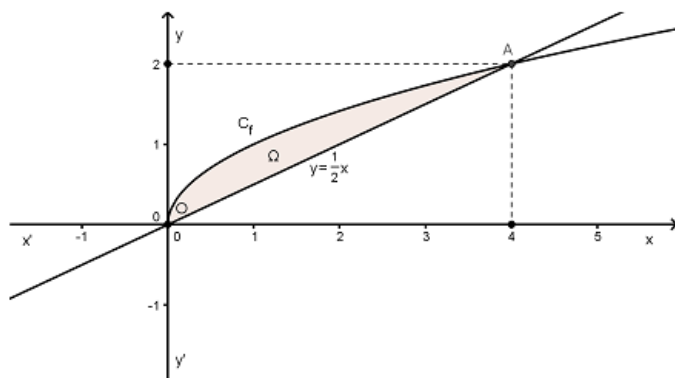
$(0,0)$ και $(4,2)$.

Άρα η C_f και η ευθεία $y = \frac{1}{2}x$ τέμνονται στα σημεία $O(0,0)$ και $A(4,2)$. (βλέπε Σχήμα)

Επίσης $\sqrt{x} - \frac{1}{2}x = \frac{\sqrt{x} \cdot (2 - \sqrt{x})}{2} \geq 0$ για κάθε $x \in [0,4]$, άρα το εμβαδόν E του χωρίου Ω

που περικλείεται από τη C_f και την ευθεία $y = \frac{1}{2}x$ ισούται με:

$$E(\Omega) = \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x \right) dx = \frac{2}{3} \left[x^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 - \frac{1}{4} \left[x^2 \right]_0^4 = \frac{4}{3} \text{ τ.μον.}$$



Άσκηση 8.

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{1-x}{x}$ και της κατακόρυφης ευθείας $x = 2$.

Λύση

Η $f(x) = \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$, είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Η

$g(x) = \frac{1-x}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, είναι συνεχής και γνησίως

φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, αφού $g'(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0$.

Η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει προφανή λύση τη $x = 1$, η οποία είναι και μοναδική.

Πράγματι αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) = \ln x - \frac{1-x}{x}$ με $x > 0$,

τότε $h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ στο $(0, +\infty)$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, το οποίο συνεπάγεται ότι η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

Επίσης,

για $x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) = 0$ και

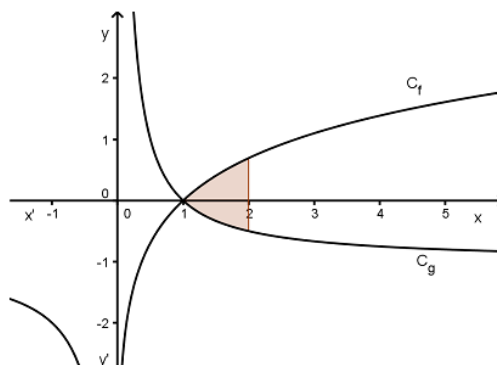
για $x > 1 \Rightarrow g(x) < g(1) = 0$,

Άρα το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{1-x}{x}$ και της κατακόρυφης ευθείας $x = 2$, (βλέπε Σχήμα)

$$\text{ισούται με } E = \int_1^2 |f(x) - g(x)| dx =$$

$$\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx = \int_1^2 \left(\ln x - \frac{1-x}{x} \right) dx = \int_1^2 (x)' \ln x dx - [\ln x]_1^2 + [x]_1^2 =$$

$$= [x \cdot \ln x]_1^2 - \int_1^2 x \cdot (\ln x)' dx - [\ln x]_1^2 + [x]_1^2 = [x \cdot \ln x]_1^2 - [x]_1^2 - [\ln x]_1^2 + [x]_1^2 = \ln 2 \text{ τ.μον.}$$



Παρατήρηση: Επειδή δεν είναι απαραίτητη η επιμέρους μονοτονία των f και g , το πρόσημο της $h(x)$ στο $[1, 2]$ μπορούσε να προσδιοριστεί και ως εξής: Επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ τότε για κάθε $x \in [1, 2]$ ισχύει $h(x) \geq h(1) \Leftrightarrow h(x) \geq 0$.

Άσκηση 9.

Θεωρούμε δυο συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι συνεχείς στο $[1, 4]$. Αν επιπλέον

$f'(x) - g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ για κάθε $x \in (1, 4)$ και $f(1) = g(1) - 2$, τότε να υπολογίσετε το εμβαδό του

χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις κατακόρυφες ευθείες $x=1$ και $x=4$.

Λύση

Ισχύει:

$f'(x) - g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow (f(x) - g(x))' = (2\sqrt{x})'$, οπότε σύμφωνα με γνωστό πόρισμα θα

υπάρχει πραγματική σταθερά c τέτοια, ώστε:

$$f(x) - g(x) = 2\sqrt{x} + c \text{ για κάθε } x \in [1, 4].$$

Για $x=1$ η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$f(1) - g(1) = 2\sqrt{1} + c \Leftrightarrow -2 = 2 + c \Leftrightarrow c = -4.$$

Άρα $f(x) - g(x) = 2\sqrt{x} - 4$ για κάθε $x \in [1, 4]$.

Όμως $1 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{x} \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 2\sqrt{x} - 4 \leq 0$, οπότε $f(x) - g(x) = 2\sqrt{x} - 4 \leq 0$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις κατακόρυφες ευθείες $x=1$ και $x=4$, ισούται με:

$$E = \int_1^4 |f(x) - g(x)| dx = - \int_1^4 (2\sqrt{x} - 4) dx = -2 \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2x \right]_1^4 = \frac{8}{3} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 10.

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x) = g''(x) + \eta \mu x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν στα σημεία $(0, f(0))$ και $(0, g(0))$ οι εφαπτόμενες των C_f και C_g αντίστοιχα, είναι παράλληλες και επιπλέον $f(0) = g(0) = 0$, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που

περικλείεται από τις C_f , C_g και τις ευθείες $x = \frac{\pi}{2}$ και $x = \pi$.

Λύση

Η σχέση $f''(x) = g''(x) + \eta \mu x$ γίνεται:

$$(f'(x))' = (g'(x) - \sigma \nu x)' , \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} ,$$

οπότε σύμφωνα με γνωστό πόρισμα θα υπάρχει μια πραγματική σταθερά c_1 τέτοια, ώστε:

$$f'(x) = g'(x) - \sigma \nu x + c_1 , \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1).$$

Επειδή $f'(0) = g'(0)$, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f'(0) = g'(0) - \sigma \nu 0 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 1.$$

Αντικαθιστούμε και έχουμε:

$$f'(x) = g'(x) - \sigma \nu x + 1 \Leftrightarrow f'(x) = (g(x) - \eta \mu x + x)' , \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} ,$$

οπότε πάλι θα υπάρχει μια πραγματική σταθερά c_2 τέτοια, ώστε:

$$f(x) = g(x) - \eta \mu x + x + c_2 , \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (2).$$

Για $x = 0$, από τη σχέση (2) παίρνουμε $c_2 = 0$, άρα

$$f(x) = g(x) - \eta \mu x + x \Leftrightarrow f(x) - g(x) = -\eta \mu x + x , \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (3).$$

Από τη γνωστή μας ανισότητα $|\eta \mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι $\eta \mu x < x$, για κάθε

$x > 0$, και από τη σχέση (3) συμπεραίνουμε ότι $f(x) - g(x) > 0$, για κάθε $x > 0$, οπότε το

εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g και τις ευθείες $x = \frac{\pi}{2}$ και $x = \pi$ ισούται με:

$$E = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |f(x) - g(x)| dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\eta \mu x + x) dx = \left[\sigma \nu x + \frac{x^2}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{3}{8} \pi^2 - 1 \text{ τ.μον.}$$

Άσκηση 11

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = e^{-x+2}$. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και την ευθεία $y = e^{\frac{3}{2}}$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως εκθετική και η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση πολυωνυμικής με εκθετική, οπότε και η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Βρίσκουμε που τέμνονται οι γραφικές παραστάσεις των f, g :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^x = e^{-x+2} \Leftrightarrow x = -x+2 \Leftrightarrow x=1, \text{ άρα τέμνονται στο σημείο } \Gamma(1, e).$$

Επίσης η ευθεία $y = e^{\frac{3}{2}}$ τέμνει τις C_f και C_g στα σημεία $B\left(\frac{3}{2}, e^{\frac{3}{2}}\right)$ και $A\left(\frac{1}{2}, e^{\frac{3}{2}}\right)$ αντίστοιχα.

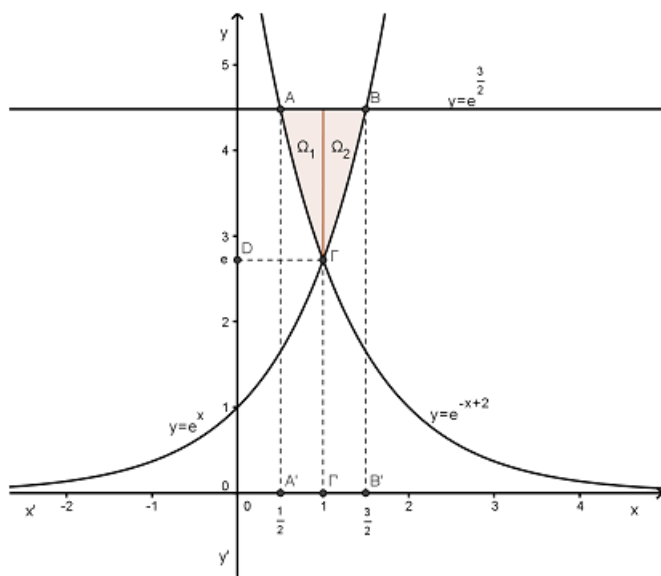
$$(\text{Αφού } e^x = e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ και } e^{2-x} = e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2})$$

Επειδή $e^{2-x} = e^{-(x-2)}$, η C_g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $h(x) = e^{-x}$ μετά από οριζόντια μετατόπιση κατά $+2$.

Το εμβαδόν του χωρίου (βλέπε Σχήμα) που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και την ευθεία $y = e^{\frac{3}{2}}$, ισούται με:

$$E = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(e^{\frac{3}{2}} - e^{-x+2} \right) dx + \int_1^{\frac{3}{2}} \left(e^{\frac{3}{2}} - e^x \right) dx = \left[e^{\frac{3}{2}} \cdot x + e^{-x+2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \left[e^{\frac{3}{2}} \cdot x - e^x \right]_1^{\frac{3}{2}} =$$

$$2e - \sqrt{e^3} \text{ τ.μον.}$$



Άσκηση 12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ln x$, $x > 0$.

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τα σημεία $M(x, y)$ με $\frac{1}{e} \leq x \leq 1$ και $f(x) \leq y \leq 0$.

Λύση

Για $x < 1 \stackrel{\ln x \text{ (γν. αύξ)}}{\Leftrightarrow} \ln x < \ln 1 = 0$, άρα $f(x) \leq 0$, όταν $\frac{1}{e} \leq x \leq 1$.

Το χωρίο όπως περιγράφεται από τις δυο ανισότητες $\frac{1}{e} \leq x \leq 1$ και $f(x) \leq y \leq 0$, είναι το χωρίο το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f [$y = f(x)$], τον άξονα $x'x$ (δηλ. την ευθεία $y = 0$) και τις ευθείες $x = \frac{1}{e}$ και $x = 1$.

Το εμβαδόν του χωρίου αυτού θα είναι:

$$E(\Omega) = - \int_{\frac{1}{e}}^1 x \cdot \ln x \, dx = - \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(\frac{x^2}{2} \right)' \cdot \ln x \, dx = - \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln x \right]_{\frac{1}{e}}^1 + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{x^2}{2} \cdot (\ln x)' \, dx =$$

$$- \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln x \right]_{\frac{1}{e}}^1 + \left[\frac{x^2}{4} \right]_{\frac{1}{e}}^1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2} \text{ τ.μον.}$$

Άσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x$.

- Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της C_f , στα σημεία που τέμνει τον άξονα $x'x$.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις δυο εφαπτόμενες και τη C_f .

Λύση

Η συνάρτηση ορίζεται και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

- Βρίσκουμε πρώτα που τέμνει η συνάρτηση f τον άξονα $x'x$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x - 4) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ή } x = 4),$$

άρα τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $O(0,0)$ και $A(4,0)$.

$$\text{Είναι } f'(x) = (x^2 - 4x)' = 2x - 4, \text{ οπότε } f'(0) = -4 \text{ και } f'(4) = 4.$$

Έτσι οι εξισώσεις των εφαπτόμενων στα σημεία $O(0,0)$ και $A(4,0)$ είναι

$$y - 0 = -4(x - 0) \text{ και } y - 0 = 4(x - 4), \text{ άρα έχουμε τις παρακάτω εξισώσεις για τις εφαπτόμενες } \varepsilon_1 \text{ και } \varepsilon_2: \quad \varepsilon_1: y = -4x \quad \varepsilon_2: y = 4x - 16$$

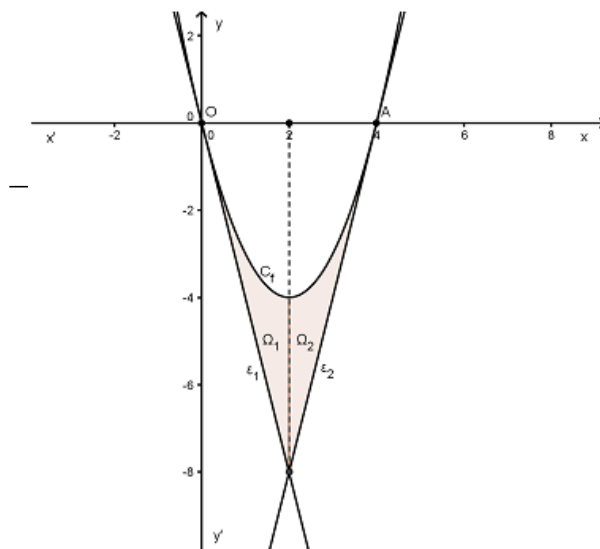
- Η συνάρτηση f είναι κυρτή, αφού $f''(x) = 2 > 0$, άρα η C_f είναι «πάνω» από τις

εφαπτόμενες. Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} y = -4x \\ y = 4x - 16 \end{cases}$ και βρίσκουμε ότι οι εφαπτόμενες ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο $(2, -8)$.

Οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις δυο εφαπτόμενες και τη C_f , ισούται με:
(βλέπε Σχήμα)

$$E = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) = \int_0^2 [x^2 - 4x - (-4x)] dx + \int_2^4 [x^2 - 4x - (4x - 16)] dx =$$

$$\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 16x \right]_2^4 = \frac{16}{3} \text{ τ.μον.}$$



Άσκηση 14

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x \cdot \ln x}$ με $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

- i. Να δείξετε ότι η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2x + 1$.
- ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ασύμπτωτη και τις κατακόρυφες ευθείες $x = e$ και $x = e^2$.

Λύση

i. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x \cdot \ln x} \right) = 0, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \ln x) = +\infty.$$

Άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2x + 1$.

ii. Επειδή $f(x) - (2x + 1) = -\frac{1}{x \cdot \ln x} < 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ασύμπτωτη και τις κατακόρυφες ευθείες $x = e$ και $x = e^2$ ισούται με:

$$E = \int_e^{e^2} |f(x) - (2x + 1)| dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \int_1^2 \frac{1}{u} du = [\ln u]_1^2 = \ln 2 \text{ τ.μον.},$$

όπου θέσαμε $u = \ln x$, οπότε $du = \frac{1}{x} dx$, $u_1 = \ln e = 1$ και $u_2 = \ln e^2 = 2$.

Άσκηση 15

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+1}$ με $x \geq -1$. Στο σημείο $A(0,1)$ της C_f φέρνουμε την εφαπτομένη της ε . Να δείξετε ότι το τρίγωνο το οποίο σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες, χωρίζεται από τη C_f σε δυο χωρία των οποίων τα εμβαδά έχουν λόγο 2:1.

Λύση

Έχουμε $f'(x) = (\sqrt{x+1})' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, με $x > -1$, οπότε $f'(0) = \frac{1}{2}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(0,1)$ της C_f θα είναι:

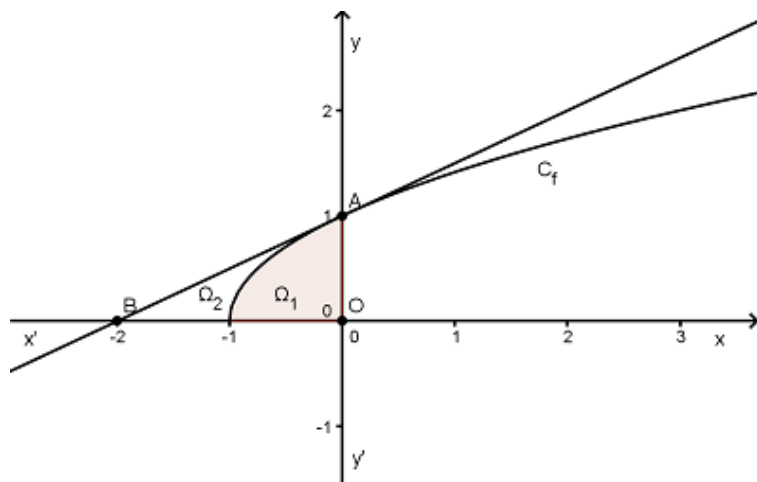
$$y-1 = \frac{1}{2}(x-0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 1.$$

- Για $x=0$ είναι $y=1$, άρα η εφαπτομένη τέμνει τον $y'y$ στο $A(0,1)$.
- Για $y=0$ είναι $x=-2$, άρα η εφαπτομένη τέμνει τον $x'x$ στο $B(-2,0)$.

Το τρίγωνο OAB έχει εμβαδό $E = \frac{1}{2}(OA)(OB) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$ τ.μον.

Το χωρίο Ω_1 (βλέπε Σχήμα) έχει εμβαδόν $E_1 = \int_{-1}^0 \sqrt{x+1} dx = \left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^0 = \frac{2}{3}$ τ.μον., οπότε το

χωρίο Ω_2 έχει εμβαδόν $E_2 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ τ.μον. Άρα τα εμβαδά των δυο χωρίων έχουν λόγο 2:1.



Άσκηση 16

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 3 + e^{-x}$.

- i. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.
- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ασύμπτωτη και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$ με $\lambda > 1$.
- iii. Να υπολογίσετε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής σ' αυτό ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

i. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$,

έπεται ότι η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ είναι η ευθεία $y = x - 3$.

ii. $E(\lambda) = \int_1^\lambda |f(x) - (x - 3)| dx = \int_1^\lambda e^{-x} dx = -[e^{-x}]_1^\lambda = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^\lambda}$ τ.μον.

iii. $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^\lambda} \right) = \frac{1}{e}$, αφού

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^\lambda = +\infty, \text{ άρα } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^\lambda} = 0.$$

Άσκηση 17

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$.

- i. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.
- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την εφαπτομένη της στο $A(2, f(2))$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=1$ και $x=3$.

Λύση

Η f ορίζεται και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική συνάρτηση.

i. Είναι $f'(x) = 3x^2 - 6x$ και $f''(x) = 6x - 6$. Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

X	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-		+

Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 1]$ και κυρτή στο $[1, +\infty)$.

ii. Είναι $f(2) = 3$ και $f'(2) = 0$ οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(2, f(2))$ είναι: $y = 3$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$, η C_f θα βρίσκεται «πάνω» από την εφαπτομένη, άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την εφαπτομένη της στο $A(2, f(2))$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=1$ και $x=3$ θα είναι:

$$E = \int_1^3 (x^3 - 3x^2 + 7 - 3) dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 4x \right]_1^3 = 2 \text{ τ.μον.}$$

Άσκηση 18

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3$. Να βρείτε αριθμό $\alpha \in (0, 2)$, ώστε η ευθεία $y = \alpha^3$ να χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $y'y$ και την οριζόντια ευθεία $y = 8$, σε δυο ισεμβαδικά χωρία.

Λύση

Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3$, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής σ' αυτό ως πολυωνυμική.

Οι συντεταγμένες του κοινού σημείου A των C_f και της ευθείας $y = 8$ είναι η λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 8 \\ y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases}. \text{ Άρα } A(2, 8)$$

Επειδή $f'(x) = 3x^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$ και η f συνεχής στο $x = 0$, συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Λόγω της μονοτονίας της f για $x \leq 2$ έπεται ότι:

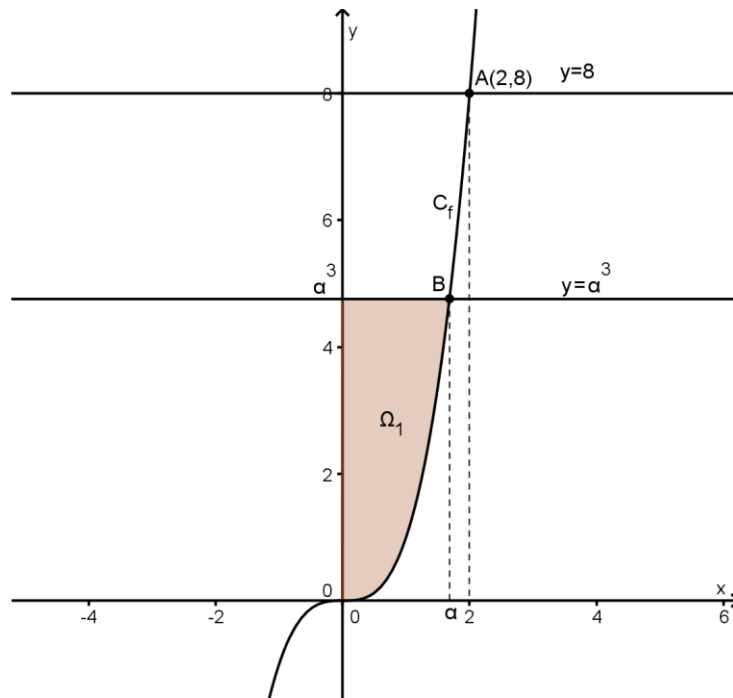
$$f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow f(x) \leq 8 \Leftrightarrow 8 - f(x) \geq 0. \quad (1)$$

Βάσει της σχέσεως (1), το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $y'y$ και την οριζόντια ευθεία $y = 8$ ισούται με:

$$E = \int_0^2 |8 - x^3| dx = \int_0^2 (8 - x^3) dx = \left[8x - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 12 \text{ τ.μ.}$$

Ομοίως οι συντεταγμένες του κοινού σημείου B των C_f και της ευθείας $y = \alpha^3$ είναι η λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = \alpha^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = \alpha^3 \\ y = \alpha^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha^3 \end{cases}. \text{ Άρα } B(\alpha, \alpha^3), \quad (\text{βλέπε σχήμα}).$$



Οπότε το εμβαδό του χωρίου Ω_1 που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $y'y$ (δηλαδή την ευθεία $x=0$) και την οριζόντια ευθεία $y=\alpha^3$ ισούται με:

$$E(\Omega_1) = \int_0^{\alpha} |x^3 - \alpha^3| dx = \int_0^{\alpha} (\alpha^3 - x^3) dx = \left[\alpha^3 x - \frac{x^4}{4} \right]_0^{\alpha} = \frac{3\alpha^4}{4} \text{ τ.μ.}$$

Άρα πρέπει:

$$E(\Omega_1) = \frac{E}{2} \text{ δηλαδή } \frac{3\alpha^4}{4} = \frac{12}{2} \Leftrightarrow \alpha = \sqrt[4]{8}$$

Άσκηση 19

- I. Να υπολογίσετε το εμβαδό $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = e^x$, την ευθεία $y = e^\alpha$ με $\alpha \in [0, 2]$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = 0$ και $x = 2$.
- II. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες το προηγούμενο εμβαδό γίνεται ελάχιστο και μέγιστο αντίστοιχα.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως εκθετική.

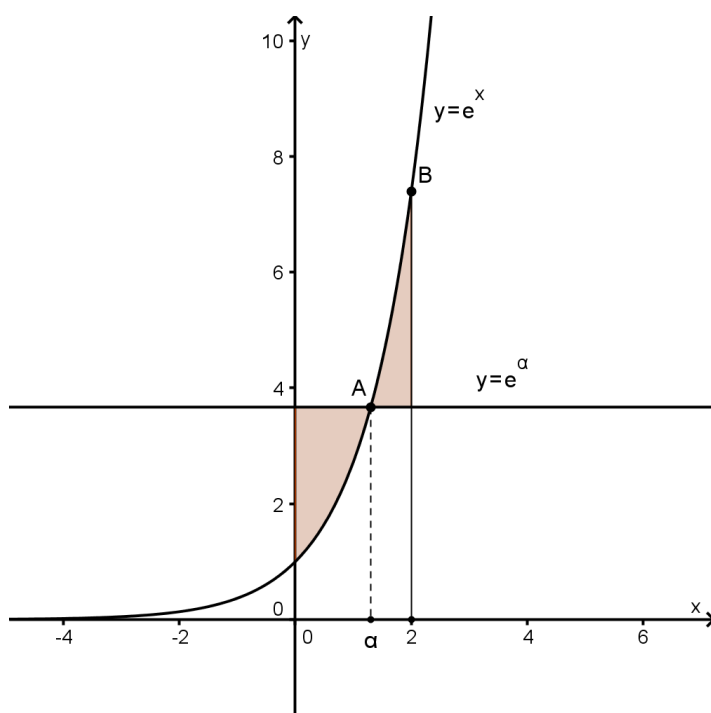
- I. Οι συντεταγμένες του σημείου τομής A της C_f και της ευθείας $y = e^\alpha$, είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y = e^x \\ y = e^\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = e^\alpha \\ y = e^\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = e^\alpha \end{cases} \cdot \text{Άρα } A(\alpha, e^\alpha)$$

Για $x < \alpha \Leftrightarrow e^x < e^\alpha$ και

για $x > \alpha \Leftrightarrow e^x > e^\alpha$, οπότε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη C_f την ευθεία $y = e^\alpha$ με $\alpha \in [0, 2]$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = 0$ και $x = 2$ ισούται με:
(βλέπε σχήμα)

$$E(\alpha) = \int_0^\alpha (e^\alpha - e^x) dx + \int_\alpha^2 (e^x - e^\alpha) dx = [e^\alpha x - e^x]_0^\alpha + [e^x - e^\alpha x]_\alpha^2 = (2 \cdot \alpha \cdot e^\alpha - 4 \cdot e^\alpha + e^2 + 1) \text{ τ.μ.}$$



II. Παραγωγίζουμε ως προς α τη συνάρτηση $E(\alpha)$ και παίρνουμε ότι:

$$E'(\alpha) = (2 \cdot \alpha \cdot e^\alpha - 4 \cdot e^\alpha + e^2 + 1)' = 2 \cdot e^\alpha \cdot (\alpha - 1).$$

Έχουμε:

$$E'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot e^\alpha \cdot (\alpha - 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ και}$$

$$E'(\alpha) > 0 \Leftrightarrow 2 \cdot e^\alpha \cdot (\alpha - 1) > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

Επίσης $E(0) = e^2 - 3$ και $E(2) = e^2 + 1$, οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα:

α	0	1	2
$E'(\alpha)$	–	0	+
$E(\alpha)$	$e^2 - 3$	$(e-1)^2$	$e^2 + 1$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$, άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\alpha = 1$, το $E(1) = (e-1)^2$ και ολικό μέγιστο στο $\alpha = 2$, το $E(2) = e^2 + 1$, αφού $e^2 - 3 < e^2 + 1$.

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 20

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x + 1$.

- i. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- ii. Αν f^{-1} , η αντίστροφη της f , είναι συνεχής, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 4$ και $x = 13$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής σ' αυτό ως πολυωνυμική συνάρτηση.

i. Έχουμε $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως και 1-1, άρα αντιστρέφεται στο $\mathbb{R}$.

ii. Έστω f^{-1} η αντίστροφη της f , η οποία είναι επίσης γνησίως αύξουσα και έχουμε ότι:

$$\begin{cases} f(1) = 4 \Leftrightarrow f^{-1}(4) = 1 \\ f(2) = 13 \Leftrightarrow f^{-1}(13) = 2 \end{cases}$$

Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 4$ και $x = 13$ ισούται με:

$$E = \int_4^{13} |f^{-1}(x)| dx, \quad (1).$$

Θέτοντας $x = f(u)$, έχουμε:

$$dx = f'(u) du$$

$$4 = f(u) \Leftrightarrow f(1) = f(u) \text{ και επειδή η } f \text{ είναι 1-1 έπεται ότι } u = 1,$$

$$13 = f(u) \Leftrightarrow f(2) = f(u) \text{ και επειδή η } f \text{ είναι 1-1 έπεται ότι } u = 2.$$

Συνεπώς από τη σχέση (1), έπεται ότι:

$$E = \int_1^2 |f^{-1}(f(u))| f'(u) du \stackrel{f^{-1}(f(u))=u}{=} \int_1^2 |u| \cdot f'(u) du = \int_1^2 (3u^3 + 2u) du = \left[\frac{3u^4}{4} + u^2 \right]_1^2 = \frac{57}{4} \text{ τ.μον.}$$

Άσκηση 21

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 2$ με $x \geq 1$.

- i. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο $[1, +\infty)$.
- ii. Αν f^{-1} , η αντίστροφη της f , είναι συνεχής, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στις C_f και $C_{f^{-1}}$.

Λύση

i. Έχουμε $f'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1) > 0$ για κάθε $x > 1$ και η f είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, επομένως και $1-1$, άρα αντιστρέφεται στο $[1, +\infty)$.

ii. Έστω f^{-1} η αντίστροφη της f . Τότε,

- Η f^{-1} έχει την ίδια μονοτονία με την f , άρα είναι και αυτή γνησίως αύξουσα.

Πράγματι, για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 \neq x_2$ και $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$, εφ' όσον η f είναι

γνησίως αύξουσα έχουμε ότι $(x_2 - x_1) \cdot (f(x_2) - f(x_1)) > 0$, δηλαδή $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$. Συνεπώς, για κάθε $y_1, y_2 \in D_{f^{-1}}$ με $y_1 \neq y_2$ και $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$, έχουμε:

$$\frac{f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} > 0.$$

Δηλαδή $(y_2 - y_1) \cdot (f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)) > 0$, συνεπώς η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

- Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, τα κοινά σημεία που έχει με την f^{-1} βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = x$.

Πράγματι, έστω $f^{-1}(x_0) = f(x_0)$ τότε θα δείξουμε ότι $f(x_0) = x_0$.

Αν $f(x_0) > x_0$ τότε επειδή f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα έχουμε $f^{-1}(f(x_0)) > f^{-1}(x_0) = f(x_0)$, άρα $f(x_0) < x_0$ το οποίο είναι άτοπο.

Ομοίως, αν $f(x_0) < x_0$ τότε επειδή f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα έχουμε

$f^{-1}(f(x_0)) < f^{-1}(x_0) = f(x_0)$, άρα $f(x_0) > x_0$ το οποίο είναι άτοπο.

Άρα $f(x_0) = x_0$.

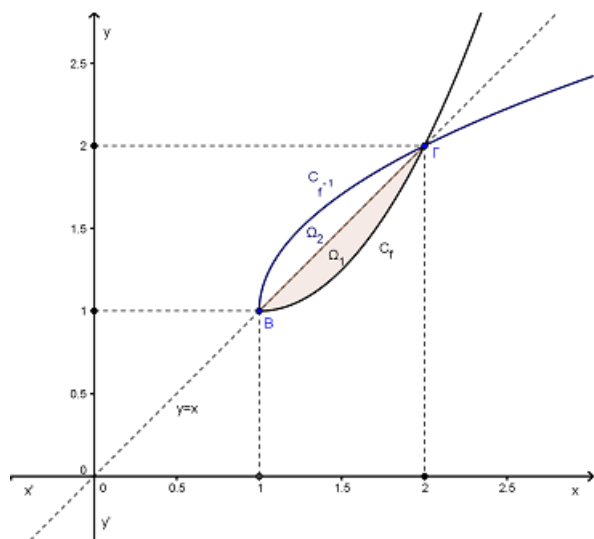
Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1) \vee (x - 2)$.

Τα κοινά σημεία είναι λοιπόν τα $B(1,1)$ και $\Gamma(2,2)$. (Βλέπε Σχήμα)

Λόγω συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} ως προς την πρώτη διχοτόμο των αξόνων $y = x$, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στις C_f και $C_{f^{-1}}$, ισούται με το διπλάσιο του εμβαδού του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στις C_f και την $y = x$.

Επίσης από το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 3x + 2$ συμπεραίνουμε ότι:
 $x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 \leq x$ για κάθε $x \in [1, 2]$.

$$\text{Έτσι: } E = 2 \int_1^2 (x - x^2 + 2x - 2) dx = 2 \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 2x \right]_1^2 = \frac{1}{3} \text{ τ.μον.}$$



Παρατήρηση: Μπορούμε να προσδιορίσουμε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$, χωρίς να χρησιμοποιηθεί η μονοτονία των συναρτήσεων f και f^{-1} , ως εξής:

Τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι (x, y) όπου

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 2x + 2 \\ x = y^2 - 2y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = x^2 - y^2 - 2x + 2y \\ y = x^2 - 2x + 2 \end{cases}$$

Άρα $(x - y) \cdot (x + y - 1) = 0 \Leftrightarrow x = y$ αφού $x + y - 1 > 0$ για κάθε $x, y \in [1, +\infty)$.

Άρα $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = 2)$.

Τα κοινά σημεία είναι λοιπόν τα $B(1,1)$ και $\Gamma(2,2)$. (Βλέπε Σχήμα)

Άσκηση 22

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\square$ και για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και $f'(x) > x$ για κάθε $x \in \square$.

Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$, τότε να δείξετε ότι $E > \frac{1}{6}$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αφού είναι παραγωγίσιμη.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (άρα και συνεχής) ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων και $g'(x) = f'(x) - x > 0$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\square$.

Τότε θα ισχύει:

για $x > 0$ έπεται ότι $g(x) > g(0) = f(0) - 0 = 0 \Leftrightarrow f(x) - \frac{x^2}{2} > 0$.

Άρα $f(x) - \frac{x^2}{2} \geq 0$ στο $[0,1]$ και ολοκληρώνοντας την ανισότητα αυτή, παίρνουμε:

$$\int_0^1 \left[f(x) - \frac{x^2}{2} \right] dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx > \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6} \text{ επομένως } \int_0^1 f(x) dx > \frac{1}{6}.$$

Η ανισότητα $\int_0^1 \left[f(x) - \frac{x^2}{2} \right] dx > 0$ είναι γνήσια, γιατί η $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$ είναι συνεχής συνάρτηση και δεν είναι παντού μηδέν στο $[0,1]$.

Επίσης επειδή $f(x) \geq \frac{x^2}{2} \geq 0$ στο $[0,1]$, το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη

C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$, είναι $E = \int_0^1 f(x) dx > \frac{1}{6}$.

Άσκηση 23

i. Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

Πότε ισχύουν οι ισότητες;

ii. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x^2)$.

Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες

$$x=0 \text{ και } x=1, \text{ τότε να δείξετε ότι } \frac{7}{30} < E < \frac{1}{3}.$$

Λύση

i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \ln(1+x) - x$ με $x > -1$.

Έχουμε $h'(x) = [\ln(1+x) - x]' = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1}$, οπότε σχηματίζουμε τον εξής πίνακα προσήμου:

X	-1	0	$+\infty$
$h'(x)$			
	+	○	-

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε:

$$\text{για } x > 0 \text{ έπεται } h(x) = \ln(1+x) - x < h(0) = 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) < x.$$

Άρα $\ln(1+x) \leq x$ για κάθε $x \geq 0$ και η ισότητα ισχύει για $x=0$.

Ομοίως θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$, $x > -1$. Η παράγωγός της είναι

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{x+1}, \quad x > -1, \text{ οπότε}$$

X	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$			
	+	○	+

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε

$$\text{για } x > 0 \text{ έπεται } g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} > g(0) = 0.$$

Άρα $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$ για κάθε $x \geq 0$ και η ισότητα ισχύει για $x=0$.

ii. Με βάση το προηγούμενο ερώτημα ισχύει:

$$x^2 - \frac{x^4}{2} \leq \ln(1+x^2) \leq x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ (αφού } x^2 \geq 0)$$

$$\text{άρα } x^2 - \frac{x^4}{2} \leq f(x) \leq x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επίσης $1+x^2 \geq 1$ άρα $f(x) = \ln(1+x^2) \geq \ln 1 = 0$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου E που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, ισούται με

$$E = \int_0^1 f(x) dx.$$

Ολοκληρώνουμε τη σχέση $x^2 - f(x) \geq 0$ παίρνουμε:

$$\int_0^1 [x^2 - f(x)] dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \Leftrightarrow E < \frac{1}{3}.$$

Η ανισότητα είναι γνήσια, γιατί η συνεχής συνάρτηση $x^2 - f(x)$ δεν είναι παντού μηδέν.

Ομοίως ολοκληρώνοντας την ανισότητα $f(x) - x^2 + \frac{x^4}{2} \geq 0$ παίρνουμε:

$$\int_0^1 \left[f(x) - x^2 + \frac{x^4}{2} \right] dx > 0 \Leftrightarrow E = \int_0^1 f(x) dx > \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \frac{7}{30}.$$

Η ανισότητα και πάλι είναι γνήσια, γιατί η συνεχής συνάρτηση $f(x) - x^2 + \frac{x^4}{2}$ δεν είναι παντού μηδέν.

$$\text{Άρα } \frac{7}{30} < E < \frac{1}{3}.$$

Άσκηση 24

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, $x > 0$.

- I. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- II. Να βρείτε το εμβαδό $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις κατακόρυφες ευθείες $x = \sqrt{e}$ και $x = \alpha$ με $\alpha \in (0, \sqrt{e})$.
- III. Να βρείτε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} E(\alpha)$.

Λύση

- I. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα και συνεχής στο $(0, +\infty)$, με $f'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$, $x > 0$, οπότε :

- Για $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$.
- Επίσης, επειδή η συνάρτηση $\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα ισχύει ότι :

$$0 < x < \sqrt{e} \Leftrightarrow \ln x < \ln \sqrt{e} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - 2\ln x > 0,$$
$$\text{συνεπώς } 1 - 2\ln x < 0, \text{ για τα } x > \sqrt{e}.$$

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι :

- $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, \sqrt{e})$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, \sqrt{e}]$, έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \sqrt{e}]$.
- $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (\sqrt{e}, +\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[\sqrt{e}, +\infty)$, έπεται ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\sqrt{e}, +\infty)$.

Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\sqrt{e}$, το $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$.

Επίσης :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \cdot \ln x = -\infty,$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.

Τα παραπάνω συνοψίζονται στον πίνακα που ακολουθεί:

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
f'(x)	+	0	-
f(x)	$-\infty$	$\frac{1}{2e}$	0

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το :

$$f(A) = f\left(\left(0, \sqrt{e}\right]\right) \cup f\left(\left[\sqrt{e}, +\infty\right)\right) = \left(-\infty, \frac{1}{2e}\right] \cup \left(0, \frac{1}{2e}\right] = \left(-\infty, \frac{1}{2e}\right].$$

II. Επειδή

- για $x \in (0, 1)$ ισχύει $f(x) < 0$, διότι για $0 < x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow \ln x < 0$,
ενώ
- για $x \in (1, \sqrt{e})$ ισχύει $f(x) > 0$, διότι για $x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow \ln x > 0$,

διακρίνουμε δυο περιπτώσεις για το α :

1^η περίπτωση:

Έστω $\alpha \in [1, \sqrt{e})$, τότε

$$\begin{aligned} E(\alpha) &= \int_{\alpha}^{\sqrt{e}} |f(x)| dx = \int_{\alpha}^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x^2} dx = - \int_{\alpha}^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{x}\right)' \ln x dx = \left[-\frac{1}{x} \ln x\right]_{\alpha}^{\sqrt{e}} + \int_{\alpha}^{\sqrt{e}} \frac{1}{x} (\ln x)' dx = \\ &= \left[-\frac{1}{x} \ln x\right]_{\alpha}^{\sqrt{e}} + \int_{\alpha}^{\sqrt{e}} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \ln x\right]_{\alpha}^{\sqrt{e}} + \left[-\frac{1}{x}\right]_{\alpha}^{\sqrt{e}} = \frac{-3}{2\sqrt{e}} + \frac{\ln \alpha + 1}{\alpha} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Ειδικότερα για $\alpha = 1$ έχουμε $E(1) = \left(1 - \frac{3}{2\sqrt{e}}\right) \text{ τ.μ.}$

2^η περίπτωση:

Έστω $\alpha \in (0, 1)$, τότε

$$\begin{aligned} E(\alpha) &= \int_{\alpha}^{\sqrt{e}} |f(x)| dx = \int_{\alpha}^1 |f(x)| dx + \int_1^{\sqrt{e}} |f(x)| dx = \int_{\alpha}^1 \frac{\ln x}{x^2} dx + \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x^2} dx = \\ &= - \int_{\alpha}^1 \frac{\ln x}{x^2} dx + \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x^2} dx = \int_{\alpha}^1 \left(\frac{1}{x}\right)' \ln x dx + \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x^2} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{x} \ln x \right]_{\alpha}^1 - \int_{\alpha}^1 \frac{1}{x} (\ln x)' dx + \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln \alpha}{\alpha} + \left[\frac{1}{x} \right]_{\alpha}^1 + 1 - \frac{3}{2\sqrt{e}} = \\
&= \left(2 - \frac{\ln \alpha + 1}{\alpha} - \frac{3}{2\sqrt{e}} \right) \tau. \mu.
\end{aligned}$$

III. $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} E(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(2 - \frac{\ln \alpha + 1}{\alpha} - \frac{3}{2\sqrt{e}} \right) = +\infty$, αφού

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\ln \alpha + 1}{\alpha} \right) = -\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (\ln \alpha + 1) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty.$$