

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

[Αρχική Συνάρτηση του κεφ.3.1 Μέρος Β του σχολικού βιβλίου].

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

Παράγουσα συνάρτησηΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού

$$G(x) = F(x) + c$$

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν

$$F'(x) = f(x) \text{ και } G'(x) = f(x), \text{ οπότε}$$

$$G'(x) = F'(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της § 2.6, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε

$$G(x) = F(x) + c, \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

Για την εύρεση των παραγουσών, χρησιμοποιώντας τους γνωστούς τύπους παραγωγίσης και το προηγούμενο θεώρημα, έχουμε τον ακόλουθο πίνακα παραγουσών μερικών βασικών συναρτήσεων.

- **Πίνακας παραγουσών μερικών βασικών συναρτήσεων**

Οι τύποι του παρακάτω πίνακα ισχύουν σε κάθε διάστημα στο οποίο οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται έχουν νόημα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

A/A	Συνάρτηση	Παράγουσες
1	$f(x) = 0$	$G(x) = c, c \in \mathbb{R}$
2	$f(x) = 1$	$G(x) = x + c, c \in \mathbb{R}$
3	$f(x) = \frac{1}{x}$	$G(x) = \ln x + c, c \in \mathbb{R}$
4	$f(x) = x^\alpha, \alpha \neq -1$	$G(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, c \in \mathbb{R}$
5	$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$G(x) = \sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}$
6	$f(x) = \sin x$	$G(x) = \eta\mu x + c, c \in \mathbb{R}$
7	$f(x) = \eta\mu x$	$G(x) = -\sin x + c, c \in \mathbb{R}$
8	$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$G(x) = \epsilon\phi x + c, c \in \mathbb{R}$
9	$f(x) = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$G(x) = -\sigma\phi x + c, c \in \mathbb{R}$
10	$f(x) = e^x$	$G(x) = e^x + c, c \in \mathbb{R}$
11	$f(x) = \alpha^x$	$G(x) = \frac{\alpha^x}{\ln \alpha} + c, c \in \mathbb{R}$

Ανατρέχοντας στα θεωρήματα παραγωγίσης αθροίσματος, γινομένου, πηλίκου, σύνθεσης συναρτήσεων και στο προηγούμενο θεώρημα, έχουμε τον ακόλουθο πίνακα παραγουσών (Πίνακας 2)

- Πίνακας παραγουσών συναρτήσεων που προκύπτουν με τη βοήθεια των κανόνων παραγωγίσης

Οι τύποι του παρακάτω πίνακα ισχύουν σε κάθε διάστημα στο οποίο οι συναρτήσεις του x που εμφανίζονται έχουν νόημα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

A/A	Συνάρτηση	Παράγουσες
1	$\kappa(x) = f'(x) + g'(x)$	$K(x) = f(x) + g(x) + c, c \in \mathbb{R}$
2	$\kappa(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	$K(x) = f(x) \cdot g(x) + c, c \in \mathbb{R}$
3	$\kappa(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$	$K(x) = \frac{f(x)}{g(x)} + c, c \in \mathbb{R}$
4	$\kappa(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$	$K(x) = g(f(x)) + c, c \in \mathbb{R}$

Λαμβάνοντας τέλος υπόψη την παραγωγή μιας σύνθετης συνάρτησης και το προηγούμενο θεώρημα, ο πίνακας παραγουσών των βασικών συναρτήσεων (Πίνακας 2) επεκτείνεται όπως παρουσιάζεται στον πίνακα 3.

- Πίνακας παραγουσών συναρτήσεων οι οποίες προκύπτουν ως σύνθεση μιας συνάρτησης f με μία βασική συνάρτηση

Οι τύποι του παρακάτω πίνακα ισχύουν σε κάθε διάστημα στο οποίο οι συναρτήσεις του x που εμφανίζονται έχουν νόημα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3

A/A	Συνάρτηση	Παράγουσες
1	$g(x) = f'(x)$	$G(x) = f(x) + c, c \in \mathbb{R}$
2	$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$G(x) = \ln f(x) + c, c \in \mathbb{R}$
3	$g(x) = f^\alpha(x) \cdot f'(x), \alpha \neq -1$	$G(x) = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c, c \in \mathbb{R}$
4	$g(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$G(x) = \sqrt{f(x)} + c, c \in \mathbb{R}$
5	$g(x) = \sin f(x) \cdot f'(x)$	$G(x) = \eta \mu f(x) + c, c \in \mathbb{R}$
6	$g(x) = \eta \mu f(x) \cdot f'(x)$	$G(x) = -\sin f(x) + c, c \in \mathbb{R}$
7	$g(x) = \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$	$G(x) = \varepsilon \varphi f(x) + c, c \in \mathbb{R}$
8	$g(x) = \frac{f'(x)}{\eta \mu^2 f(x)}$	$G(x) = -\sigma \varphi f(x) + c, c \in \mathbb{R}$
9	$g(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$G(x) = e^{f(x)} + c, c \in \mathbb{R}$
10	$g(x) = \alpha^{f(x)} \cdot f'(x)$	$G(x) = \frac{\alpha^{f(x)}}{\ln \alpha} + c, c \in \mathbb{R}$

Ιδιότητες παραγουσών:

Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντιστοίχως και $\lambda \in \mathbb{R}^*$, τότε:

- i) Η συνάρτηση $F+G$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f+g$ και
- ii) Η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf .

Γενικά:

Η συνάρτηση $\lambda F + \kappa G$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $\lambda f + \kappa g$ $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*$.

Σημαντικές παρατηρήσεις

- 1) Αν F_1, F_2 είναι δύο παράγουσες της συνάρτησης f , σε ένα διάστημα Δ , τότε αυτές θα διαφέρουν κατά ένα σταθερό πραγματικό αριθμό c . Δηλαδή:

$$F_1(x) = F_2(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- 2) Κάθε συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ , δεν έχει αναγκαία παράγουσα.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x \leq 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$, είναι ορισμένη στο διάστημα $\Delta = (-1, 1)$, αλλά δεν υπάρχει συνάρτηση F παραγωγίσιμη στο $\Delta = (-1, 1)$ τέτοια ώστε $F'(x) = f(x)$.

- 3) Αποδεικνύεται ότι: Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ , τότε:
- Έχει παράγουσα στο Δ .
 - Έχει άπειρες αρχικές συναρτήσεις.

Σημείωση: Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει. Υπάρχουν συναρτήσεις που έχουν παράγουσα σε ένα διάστημα Δ αλλά δεν είναι συνεχείς στο Δ .

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \eta \mu \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο 0 αλλά έχει παράγουσα στο $\mathbb{R}$ την $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

- 4) Η παράγουσα μιας συνάρτησης αναφέρεται σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων. Έτσι για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ και $F(x) = \ln|x|$, ορίζονται στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$, οπότε:
- Στο $(-\infty, 0)$, οι παράγουσες της f είναι $F(x) + c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$.
 - Στο $(0, +\infty)$, οι παράγουσες της f είναι $F(x) + c_2$, $c_2 \in \mathbb{R}$.

Στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, οι παράγουσες της f δεν είναι $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$

(Δηλαδή, δεν έχει έννοια η έκφραση « η F είναι παράγουσα της f » αλλά η έκφραση « η F είναι παράγουσα της f σε ένα διάστημα Δ »)

- 5) Για κάθε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ , οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων όλων των παραγουσών της, στο $x_0 \in \Delta$ είναι παράλληλες.
- 6) Η διαδικασία εύρεσης των παραγουσών μιας συνάρτησης f είναι η αντίστροφη από τη διαδικασία παραγώγισης. Επομένως πρέπει να γνωρίζουμε πολύ καλά τους κανόνες παραγώγισης.
- 7) Υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις, που δεν υπολογίζονται οι παράγουσες αυτών:

Παράδειγμα

$$e^{-x^2}, \frac{\eta\mu x}{x}, \frac{e^x}{x}, \frac{1}{\ln x}, \eta\mu x^2, \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}, \sqrt{\eta\mu x}$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 09/07/2018