

Τράπεζα Θεμάτων (ΙΕΠ)
Γεωμετρία Β' Λυκείου

Εκφωνήσεις

2024-2025

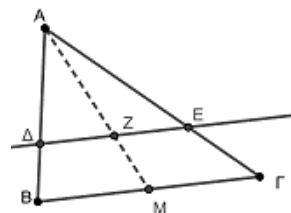
Τα θέματα προέρχονται από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

Αναλογίες

Θεώρημα Θαλή

2^ο Θέμα

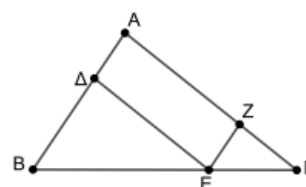
14534. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=6$ και $AG=9$. AM είναι η διάμεσος του τριγώνου και το σημείο Z εσωτερικό στην AM ώστε να σχηματίζει λόγο $\frac{AZ}{AM} = \frac{2}{3}$. Από το σημείο Z φέρουμε ευθεία παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και AG στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3}$ και $\frac{AE}{EG} = 2$.

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων $A\Delta$ και GE .

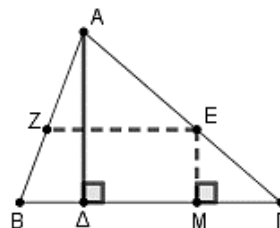
14579. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ , E και Z των πλευρών του AB , $B\Gamma$ και AG αντίστοιχα, ώστε η DE να είναι παράλληλη στην AG . Επίσης $AB = 3A\Delta$.



α) Να βρείτε τους λόγους $\frac{B\Delta}{A\Delta}$ και $\frac{BE}{EG}$.

β) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $AG = 3,9$ και $\Gamma Z = 1,3$ να αποδείξετε ότι η ZE είναι παράλληλη της AB .

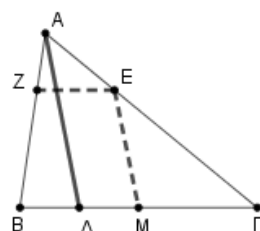
15830. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος, το $A\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου. Η κάθετος στην πλευρά $B\Gamma$ σε ένα άλλο σημείο της M τέμνει την AG στο E . Από το E φέρνουμε παράλληλη στην $B\Gamma$, που τέμνει την AB στο Z . Να αποδείξετε ότι:



α) $\frac{ZA}{ZB} = \frac{EA}{EG}$

β) $\frac{ZA}{ZB} = \frac{MA}{MG}$

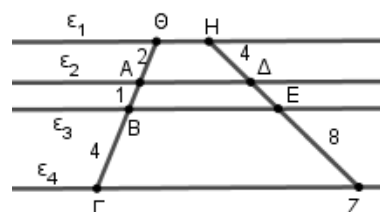
15831. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος, το M είναι μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και το Δ είναι το μέσο του MB . Από το M φέρνουμε παράλληλη στην $A\Delta$, που τέμνει την AG στο E . Από το E φέρνουμε παράλληλη στην $B\Gamma$, που τέμνει την AB στο Z . Να αποδείξετε ότι:



α) $\frac{EA}{EG} = \frac{1}{2}$

β) $\frac{ZA}{ZB} = \frac{1}{2}$

21987. Οι ευθείες $\Gamma\Theta$ και ZH τέμνουν τις παράλληλες ευθείες ϵ_1 , ϵ_2 και ϵ_3 στα σημεία Θ , A , B και H , Δ , E αντίστοιχα και την ευθεία ϵ_4 στα σημεία Γ και Z όπως στο παρακάτω σχήμα. Επίσης δίνονται τα μήκη $\Theta A = 2$, $AB = 1$, $B\Gamma = H\Delta = 4$ και $EZ = 8$.



α) Να αποδείξετε ότι $\Delta E = 2$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ϵ_4 είναι παράλληλη στις ευθείες ϵ_1 , ϵ_2 και ϵ_3 .

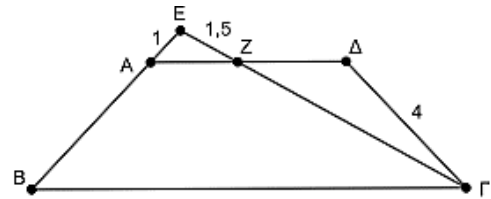
γ) Να σχεδιάσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΘZ το οποίο τέμνει την ευθεία ε_2 στο K και την ευθεία ε_3 στο Λ και να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{\Lambda Z}{K\Lambda}$.

22132. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = \Gamma\Delta = 4$ και με βάσεις $A\Delta$ και $B\Gamma$. Στην προέκταση της πλευράς BA προς το A παίρνουμε σημείο E , ώστε $EA = 1$. Το ευθύγραμμο τμήμα $E\Gamma$ τέμνει την $A\Delta$ στο σημείο Z και $EZ = 1,5$.

α) Να αποδείξετε ότι $Z\Gamma = 1,5AB$.

β) Να υπολογίσετε το μήκος του $Z\Gamma$.

γ) Αν επιπλέον $B\Gamma = 10$, να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς AZ του τριγώνου EAZ .



Ομοιότητα

2^ο Θέμα

14535. Δίνονται δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ για τα οποία γνωρίζουμε ότι: $AB = 9$, $A\Gamma = 15$ και $\hat{A} = 48^\circ$, $Z\Delta = 12$, $ZE = 20$ και $\hat{Z} = 48^\circ$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι όμοια.

β) i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

ii. Να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

14536. Για δύο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και $E\Delta Z$ ($E\Delta = EZ$) γνωρίζουμε ότι: $\hat{A} = 48^\circ$, $\hat{Z} = 66^\circ$ και $AB = 3 \cdot E\Delta$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Delta Z$ είναι όμοια.

β) i. Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των δυο τριγώνων.

ii. Να βρείτε το λόγο των βάσεων των δυο τριγώνων.

14537. Δίνονται δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ για τα οποία γνωρίζουμε ότι:

$\hat{A} = 48^\circ$, $\hat{B} = 53^\circ$, $\hat{E} = 79^\circ$ και $\hat{Z} = 48^\circ$.

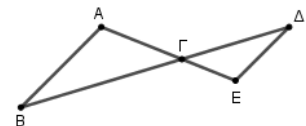
α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι όμοια.

β) i. Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων;

ii. Να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

14538. Στο διπλανό σχήμα τα τμήματα AB και ΔE είναι παράλληλα και τα τμήματα $A\Gamma$ και ΓE είναι τέτοια, ώστε $A\Gamma = 2\Gamma E$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Delta\Gamma$ είναι όμοια.



β) i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δύο τριγώνων.

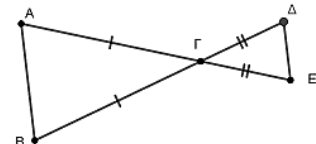
ii. Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων;

14546. Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα AE και $B\Delta$ τέμνονται στο Γ , τα τρίγωνα ΓAB και $\Gamma \Delta E$ που σχηματίζονται είναι ισοσκελή και οι βάσεις τους AB και ΔE είναι τέτοιες, ώστε $AB = 2 \cdot \Delta E$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓAB και $\Gamma \Delta E$ είναι όμοια.

β) i. Να γράψετε την ισότητα των λόγων που προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων του ερωτήματος α).

ii. Ποια σχέση συνδέει τις πλευρές $A\Gamma$ και ΓE των δύο τριγώνων;



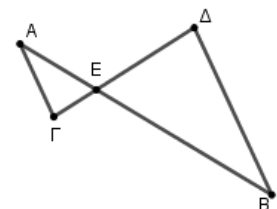
16100. Στο διπλανό σχήμα δίνονται ότι $AE = 5$, $A\Gamma = 4$, $E\Gamma = 2$, $\Delta E = 6$, $BE = 15$ και $B\Delta = 12$.

α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{B\Delta}{A\Gamma}$, $\frac{\Delta E}{E\Gamma}$, $\frac{BE}{AE}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Gamma E$ και $B\Gamma \Delta$ είναι όμοια.

γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων $A\Gamma E$ και $B\Gamma \Delta$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$\hat{A} = \dots\dots\dots$, $\hat{\Gamma} = \dots\dots\dots$, $A\hat{E}\Gamma = \dots\dots\dots$

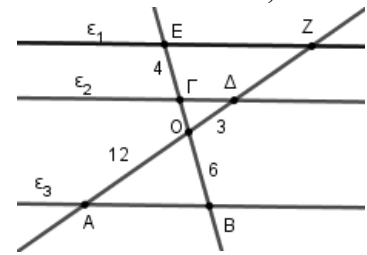


16086. Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ε_1 , ε_2 και ε_3 είναι παράλληλες. Δίνονται ότι $GE = 4$, $OD = 3$, $OA = 12$, $OB = 6$.

α) Να υπολογίσετε τα τμήματα OG και ΔZ .

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OEZ και OBA είναι όμοια.

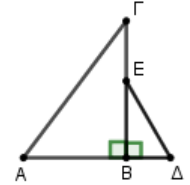
γ) Αν $OG = 1.5$ και $\Delta Z = 8$, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{EZ}{AB}$.



16099. Στο διπλανό σχήμα δίνονται $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $AG = 36$, $BD = 16$ και $E\Delta = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔBE είναι όμοια.

β) Να υπολογίσετε την πλευρά AB .

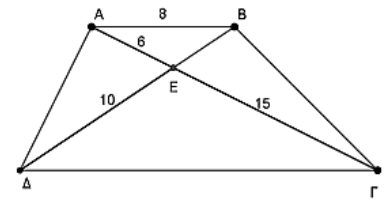


16113. Δίνεται το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Delta\Gamma$, E σημείο τομής των διαγώνων, $AE = 6$, $AB = 8$, $GE = 15$ και $DE = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AEB και GED είναι όμοια.

β) Να γράψετε την αναλογία των ομόλογων πλευρών τους.

γ) Να υπολογίσετε τα τμήματα BE και $\Gamma\Delta$.

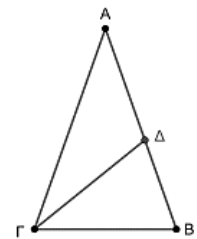


16126. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = AG = 36$ και $B\Gamma = 24$.

Το σημείο της Δ πλευράς AB είναι τέτοιο ώστε $B\Delta = 16$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma B\Delta$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{3}{2}$.

β) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\Delta$.



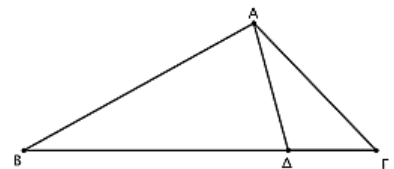
16755. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 2AG$ και σημείο Δ στην πλευρά $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $AG = 2\Gamma\Delta$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{B\Gamma}{AG}$ και $\frac{AG}{\Gamma\Delta}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta A\Gamma$ είναι όμοια.

γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων $AB\Gamma$ και $\Delta A\Gamma$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$B\hat{A}\Gamma = \dots\dots\dots$, $\hat{B} = \dots\dots\dots$

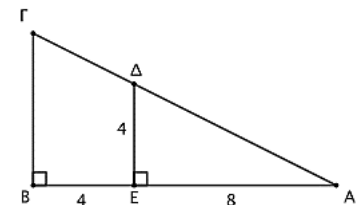


21350. Στο σχήμα δίνονται ότι $\hat{B} = \hat{E} = 90^\circ$, $AE = 8$, $EB = 4$ και $\Delta E = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια.

β) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων $AE\Delta$ και $AB\Gamma$.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.

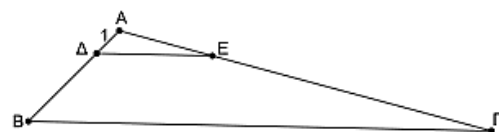


21986. Στις πλευρές AB και AG τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ και E αντίστοιχα ώστε η ΔE να είναι παράλληλη στην $B\Gamma$ και $\Delta\Delta = 1$, όπως στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $AE \cdot B\Delta = \Gamma E$.

β) Αν επιπλέον $B\Delta = AE$ και $\Gamma E = 9$:

i. Να αποδείξετε ότι $B\Delta = 3$ και $AB = 4$.



ii. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\triangle A\Delta E$ και $\triangle AB\Gamma$ είναι όμοια και να υπολογίσετε το λόγο ομοιότητάς τους.

4^ο Θέμα

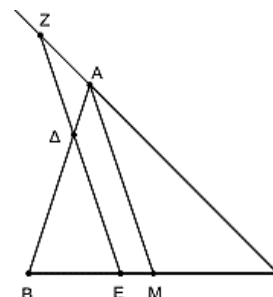
14499. Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$. Θεωρούμε AM τη διάμεσό του και E τυχαίο σημείο του τμήματος BM . Από το E φέρουμε ευθεία παράλληλη στην AM που τέμνει την πλευρά AB στο Δ και την προέκταση της ΓA στο Z .

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

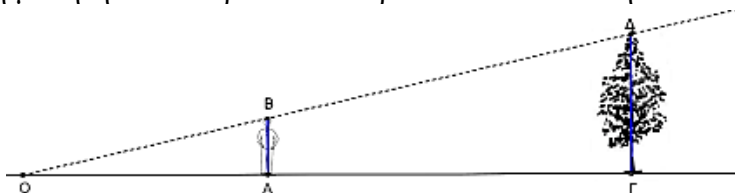
i. $\frac{\Delta E}{\dots} = \frac{\dots}{BM} = \frac{BA}{\dots}$

ii. $\frac{\dots}{AM} = \frac{\Gamma E}{\dots} = \frac{\dots}{\Gamma A}$

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta E + EZ = 2AM$ για οποιαδήποτε θέση του E στο BM .



22102. Για να βρει το ύψος ενός δέντρου, ένας μαθητής ύψους 1,60 m σκέφτηκε να μετρήσει το μήκος της σκιάς του δέντρου και το μήκος της δικιάς του σκιάς πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο κάποια χρονική στιγμή μιας ηλιόλουστης ημέρας. Στέκεται σε θέση έτσι ώστε, η άκρη της σκιάς του να συμπίπτει με την άκρη της σκιάς του δέντρου. Ο μαθητής μετράει και βρίσκει ότι η σκιά του έχει μήκος 2m και η σκιά του δέντρου ότι έχει μήκος 5m. Στο σχέδιο που ακολουθεί, τα τμήματα OA και OG , με κοινό άκρο O , αναπαριστούν τα μήκη των σκιών του μαθητή και του δέντρου αντίστοιχα και έχουν τον ίδιο φορέα OG , τα δε τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ αναπαριστούν τα αντίστοιχα ύψη μαθητή και δέντρου και θεωρούνται κάθετα στην OG .



α) i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\triangle AOB$ και $\triangle OD\Gamma$ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

ii. Να βρείτε το ύψος του δέντρου.

β) Μπορεί ο μαθητής να χρησιμοποιήσει την ίδια μέθοδο για να μετρήσει το ύψος του ίδιου δέντρου μια άλλη ώρα της ημέρας; Ποια από τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος θα άλλαζαν στην περίπτωση αυτή; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(σημειώνεται ότι τα σχέδια δεν έχουν γίνει υπό κλίμακα)

22565. Οι μαθητές θέλοντας να μετρήσουν την απόσταση των σημείων A και

B στην αυλή του σχολείου τους μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται ένα κτίσμα και η απευθείας μέτρηση του μήκους AB είναι αδύνατη, εργάστηκαν ως εξής.

Στην αυλή τους επέλεξαν σημείο O ώστε η μέτρηση των τμημάτων OA και OB να είναι εφικτή, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

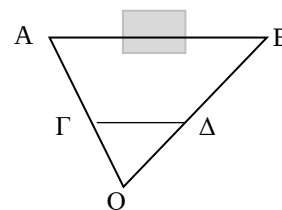
Μέτρησαν και βρήκαν $OA=20m$ και $OB=30m$. Στις OA και OB πήραν σημεία Γ και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε $OG=2m$ και $OD=3m$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλη με την AB ,

ii. τα τρίγωνα $\triangle O\Gamma\Delta$ και $\triangle OAB$ είναι όμοια.

β) Ένας από τους μαθητές υποστηρίζει ότι μπορούν να υπολογίσουν την απόσταση των σημείων



A και B αν γνωρίζουν την απόσταση των δύο σημείων Γ και Δ . Είναι ο ισχυρισμός του μαθητή αληθής;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μετρικές σχέσεις

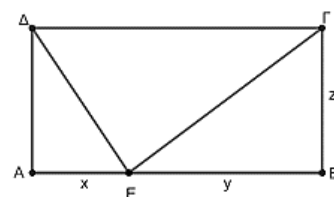
Πυθαγόρειο Θεώρημα

2^ο Θέμα

16805. Η περίμετρος του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι 72 και το E είναι σημείο στην πλευρά AB . Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $x = 8, y = 16$ και $z = 12$.

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $\Gamma E\Delta$.

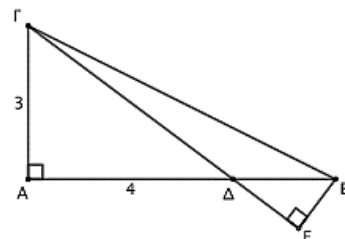


16757. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $AB = 6$ και $A\Gamma = 3$. Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά AB , τέτοιο ώστε $A\Delta = 4$. Φέρουμε την απόσταση BE της κορυφής B από την $\Gamma\Delta$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το τμήμα $\Gamma\Delta$.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $E\Delta B$ είναι όμοια.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος BE .



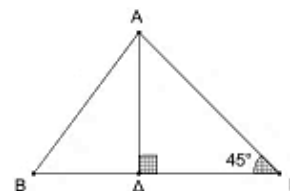
17342. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 7$, $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ και ύψος $A\Delta = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\Gamma\Delta = 4$.

ii. $A\Gamma = 4\sqrt{2}$.

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς AB .



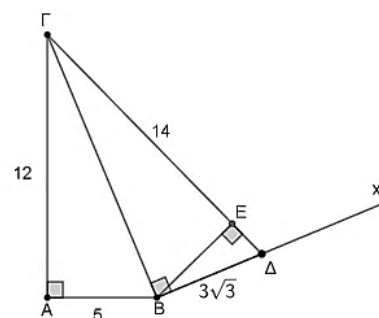
21067. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $A\Gamma = 12$ και $AB = 5$.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 13$.

β) Φέρουμε ημιευθεία Bx κάθετη στη $B\Gamma$ στο σημείο B και παίρνουμε σε αυτή σημείο Δ , τέτοιο ώστε $\Delta\Gamma = 14$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι $B\Delta = 3\sqrt{3}$.

ii. Να υπολογίσετε την προβολή της $B\Delta$ στην $\Delta\Gamma$.



22130. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R . Αν οι πλευρές του τριγώνου είναι $B\Gamma = \alpha$, $A\Gamma = \beta$ και $AB = \gamma$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha = 2R$

β) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 8R^2$.

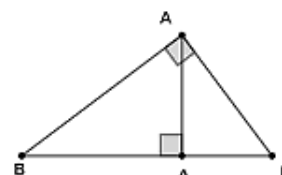
22514. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Gamma = 5$ και $AB =$

4. Να υπολογίσετε:

α) την πλευρά $A\Gamma$.

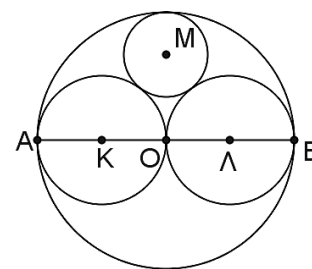
β) την προβολή της πλευράς AB πάνω στη $B\Gamma$.

γ) το ύψος $A\Delta$.



4^ο Θέμα

14500. Δύο ίσοι κύκλοι (K,R) και (Λ,R) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο O. Ένας τρίτος κύκλος (M, ρ) εφάπτεται εξωτερικά με τους δύο κύκλους κέντρων K και Λ. Με κέντρο το σημείο O και ακτίνα 2R γράφουμε κύκλο, ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά των 3 παραπάνω κύκλων, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



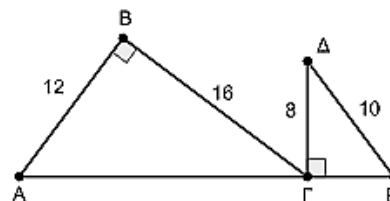
α) Στον παρακάτω πίνακα, στη στήλη A είναι οι διάκεντροι KM, ΛM και OM των κύκλων με κέντρα K, Λ, M και O και στη στήλη B τα μήκη των διακεντρών αυτών. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης A με τα αντίστοιχα της στήλης B, γράφοντας στη κόλλα σας μόνο τις αντιστοιχίες.

Στήλη A	Στήλη B
Διάκεντρος	Μήκος
1. KΛ	i. R
2. ΛM	ii. 2R
3. OM	iii. R+ρ
	iv. 2R-ρ

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MKΛ είναι ισοσκελές και ότι το τμήμα MO είναι το ύψος προς τη βάση του.

γ) Να βρείτε την ακτίνα ρ του κύκλου κέντρου M ως συνάρτηση του R όπου R η ακτίνα των κύκλων κέντρων K και Λ.

16133. Στο διπλανό σχήμα, τα ευθύγραμμα τμήματα AB, BΓ, ΓΔ και ΔΕ έχουν μήκη αντίστοιχα 12, 16, 8 και 10, οι γωνίες ABΓ και ΔΓΕ και είναι ορθές και τα σημεία A, Γ και E ανήκουν στην ίδια ευθεία.



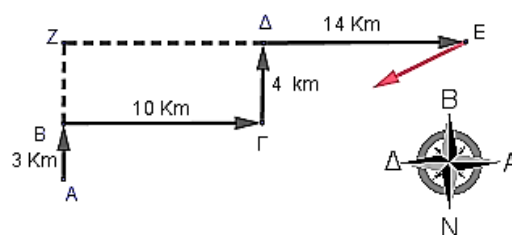
α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΕ.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABΓ και ΕΓΔ είναι όμοια.

γ) Έστω ότι το σημείο τομής των ευθειών AB και ΕΔ είναι το Z και ΣΗ είναι το ύψος του τριγώνου ZAE από την κορυφή του Z. Να αποδείξετε ότι:

- i. $EH = 13$, ii. $ZH = \frac{52}{3}$

14533. Δύο κινητά βρίσκονται στο σημείο A και σκοπεύουν να μεταβούν στο σημείο E, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο A και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια προχωράει 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο E. Το δεύτερο κινητό ξεκινάει από το σημείο A κινείται βόρεια μέχρι το σημείο Z και συνεχίζει ανατολικά μέχρι το σημείο E. Όταν συναντιούνται στο σημείο E επιστρέφουν μαζί στο σημείο A κινούμενα ευθύγραμμα.

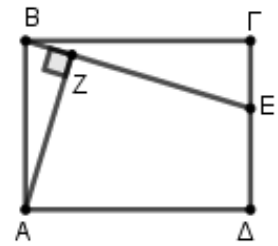


α) i. Πόσα χιλιόμετρα διάνυσε το κάθε κινητό από το σημείο A στο σημείο E με τον τρόπο που κινήθηκε;

ii. Να βρείτε την απόσταση AE που διάνυσαν τα δύο κινητά κατά την επιστροφή από το σημείο E στο σημείο A κινούμενα ευθύγραμμα.

β) Επιστρέφοντας τα δύο κινητά από το σημείο E στο σημείο A, θα περάσουν από το σημείο Γ; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

17348. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $AB = 6$ και το E σημείο της πλευράς $B\Gamma$, ώστε $BE = 2$. Έστω ΔZ το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο Δ προς την AE .



α) Να αποδείξετε ότι $AE = 2\sqrt{10}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και ΔZA είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία που προκύπτει από τους λόγους των ομόλογων πλευρών τους.

γ) Αν $\Delta Z = ZE$, να υπολογίσετε το μήκος του $A\Delta$.

21149. Σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας R θεωρούμε διάμετρο AB και σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 30^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

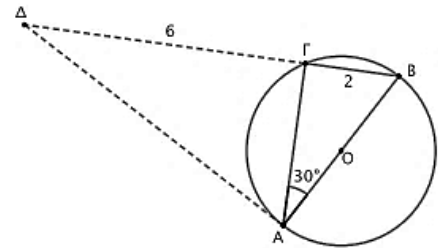
Αν $B\Gamma = 2$, τότε:

α) Να υπολογίσετε:

i. Την ακτίνα R .

ii. Το μήκος της πλευράς $A\Gamma$.

β) Θεωρούμε σημείο Δ στην προέκταση της $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = 6$. Να εξετάσετε αν το τμήμα ΔA εφάπτεται του κύκλου στο σημείο A . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Γενίκευση πυθαγορείου θεωρήματος

2^ο Θέμα

14549. Τα μήκη των πλευρών α, β, γ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι : $\alpha=7, \beta=3$ και $\gamma=5$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.

β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς AB στην πλευρά AG και να υπολογίσετε το μήκος της.

16080. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 5, B\Gamma = \sqrt{41}$ και $AG = 8$.

α) Να σχεδιάσετε την προβολή AD , της AB στην AG και να υπολογίσετε το μήκος της.

β) Αν $AD = 3$, να υπολογίσετε το μήκος του ύψους BD .

16101. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = 8, AG = 6$ και $B\Gamma = 11$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.

β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς AG πάνω στην AB και να υπολογίσετε το μήκος της.

16804. Στο διπλανό τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τα όψη του AH και $B\Theta$.

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i. Η προβολή την πλευράς $B\Gamma$ στην πλευρά AG είναι το τμήμα

ii. Η προβολή τη πλευράς AB στην πλευρά $B\Gamma$ είναι το τμήμα

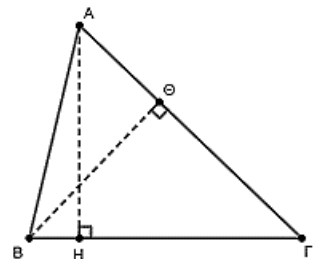
iii. Το τμήμα $H\Gamma$ είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά

iv. Το τμήμα $A\Theta$ είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά

v. $AG^2 = AB^2 + \dots - 2B\Gamma \cdot \dots$

vi. $B\Gamma^2 = \dots + AG^2 - 2\dots \cdot A\Theta$

β) Αν $AB = 4, B\Gamma = 5$ και $AG = 6$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος $A\Theta$.



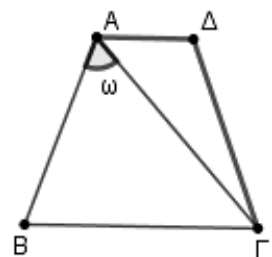
17343. Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος είναι $A\Delta = 3$,

$AB = \Gamma\Delta = 5, B\Gamma = 8$ και $\hat{A} = 120^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $AG = 7$.

β) Να αποδείξετε ότι $\text{syn}\omega = \frac{1}{7}$, όπου ω είναι η γωνία BAG .

Δίνεται ότι $\text{syn}120^\circ = -\frac{1}{2}$.



17354. Στα παρακάτω τρίγωνο ΔEZ φέρουμε τα όψη του ΔK και ZI .

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i. Η προβολή της πλευράς ΔE στην πλευρά EZ είναι το τμήμα

ii. Η προβολή της πλευράς ΔZ στην πλευρά EZ είναι το τμήμα

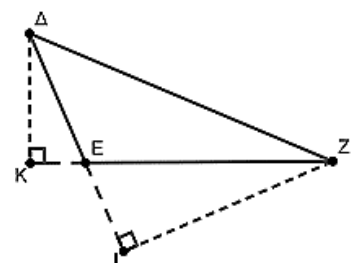
iii. Το τμήμα ΔI είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά

iv. Το τμήμα EI είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά

v. $\Delta Z^2 = \Delta E^2 + \dots + 2EZ \cdot \dots$

vi. $EZ^2 = \dots + \Delta Z^2 - 2\dots \cdot \Delta I$

β) Αν $\Delta E = 2, EZ = 4$ και $\Delta Z = 5$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔI .

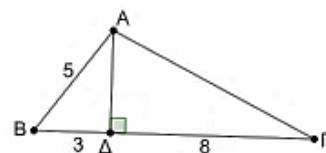


21302. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 5$ και $A\Delta$ το ύψος του από την κορυφή A . Αν $B\Delta = 3$ και $\Gamma\Delta = 8$ να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = 4$.

β) $A\Gamma = \sqrt{80}$.

γ) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.



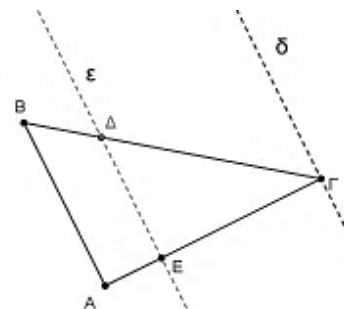
22248. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 9$, $\Gamma A = 12$ και $\Gamma B = 15$ και ευθείες ϵ , δ παράλληλες στην AB , όπως αυτές του σχήματος.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να βρείτε ποια πλευρά είναι η υποτείνουσά του.

β) Αν η ευθεία (ϵ) τέμνει τις πλευρές ΓA , ΓB σε σημεία E και Δ αντίστοιχα έτσι ώστε $EA = 4$ και η ευθεία (δ) διέρχεται από το σημείο Γ , τότε να υπολογίσετε

i. το τμήμα ΔB ,

ii. τις πλευρές του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.

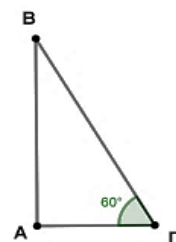


22512. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 4$, $A\Gamma = 2$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

α) Να υπολογίσετε την πλευρά AB .

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.



4ο Θέμα

21185. Τρία ευθύγραμμα τμήματα α , β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα αυτά μπορούν να σχηματίσουν ορθογώνιο τρίγωνο.

β) Αν τα ευθύγραμμα τμήματα α , β και γ είναι σχεδιασμένα πάνω σε ένα χαρτί και αυτό το φωτοτυπήσουμε με μεγέθυνση $\lambda\%$, να αποδείξετε ότι και με τα νέα ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζεται πάλι ορθογώνιο τρίγωνο.

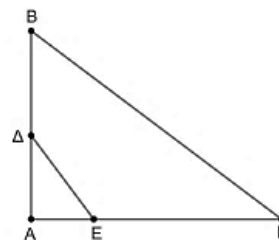
γ) Να εξετάσετε αν μπορεί να σχηματιστεί τρίγωνο με πλευρές 10α , 8β και 6γ .

22400. Τα Δ και E είναι σημεία των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ενός τριγώνου $AB\Gamma$. Δίνεται ότι $AB=9$, $A\Gamma = 12$, $A\Delta = 4$ και $AE=3$.

α) Έστω ότι στο παραπάνω τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B\Gamma = 15$ (Σχήμα 1). Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

ii. $\Delta E = 5$.



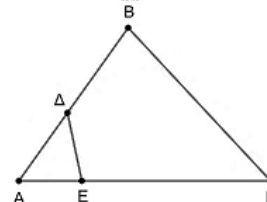
Σχήμα 1

β) Έστω τώρα ότι στο αρχικό τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B\Gamma = 10$, (Σχήμα 2).

Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ δεν είναι ορθογώνιο.

ii. $\Delta E = \frac{10}{3}$.



Σχήμα 2

3^ο Θέμα

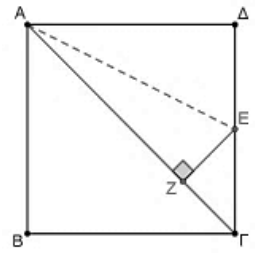
21102. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς α και έστω E το μέσο της $\Delta\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $A\Gamma = \alpha\sqrt{2}$.

ii. $AE = \alpha \frac{\sqrt{3}}{2}$.

β) Να υπολογίσετε την προβολή του τμήματος AE στην $A\Gamma$.



Εμβαδά

Εμβαδά βασικών σχημάτων

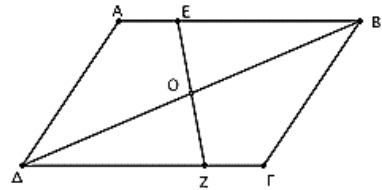
2^ο Θέμα

16102. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Από το κέντρο O φέρουμε ευθεία η οποία τέμνει τις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία E και Z όπως φαίνεται στο σχήμα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $(\Delta OZ) = (BOE)$.

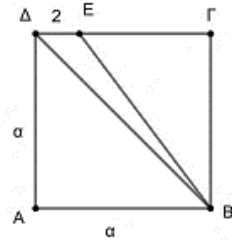
β) $(\Delta OEA) = (B\Gamma ZO)$.



16817. Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς α , θεωρούμε σημείο E της πλευράς του $\Delta\Gamma$ έτσι ώστε $\Delta E = 2$. Αν γνωρίζουμε ότι: $(BE\Delta) = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{8}$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η πλευρά του τετραγώνου α είναι ίση με 8.

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος BE .

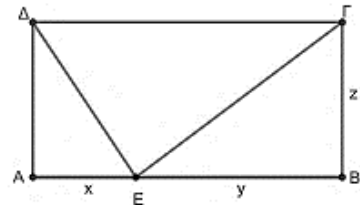


18550. Η περίμετρος του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι 36 και το E είναι σημείο στην πλευρά AB . Τα μήκη των τμημάτων x , y , z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $x = 4$, $y = 8$ και $z = 6$.

β) i. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $\Gamma E\Delta$.

ii. Να βρεθεί ο λόγος του εμβαδού του τριγώνου $\Gamma\Delta E$ προς το εμβαδό του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$.

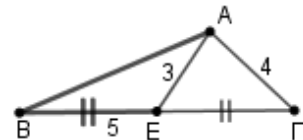


18559. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά $B\Gamma$ έχει μήκος 3 και η πλευρά $A\Gamma$ είναι ίση με 4. Αν $BE=5$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η διάμεσος AE είναι κάθετη στην πλευρά $A\Gamma$.

β) i. Να δικαιολογήσετε γιατί $(ABE) = (A\Gamma E)$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.



18560. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $B\Gamma=13$ και $\Gamma\Delta=14$. Αν ΓE είναι το κάθετο τμήμα από το σημείο Γ στην πλευρά AB και το τμήμα AE έχει μήκος 9, τότε:

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΓE .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό

i. του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

ii. του τραπεζίου $A\Gamma E\Delta$.

21101. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $B\Gamma = \sqrt{3}$, $AB = \sqrt{2}$, $A\Gamma = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 90^\circ$.

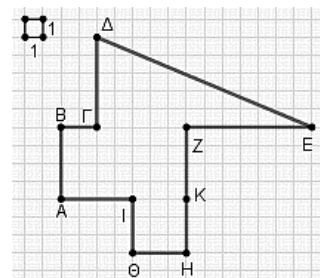
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

γ) Να υπολογίσετε το ύψος AD .

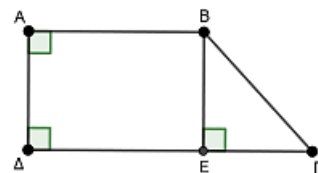
18558. Στο παρακάτω σχήμα:

α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΔE .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την τεθλασμένη γραμμή $AB\Gamma\Delta EZH\Theta IA$.



21823. Δίνεται το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος, με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $A\Delta = 4$, $AB = 5$, $\Delta\Gamma = 8$. Από την κορυφή B του τραπέζιου, φέρνουμε την BE κάθετη στην πλευρά $\Delta\Gamma$.

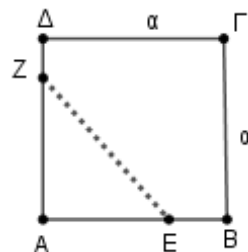


α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος $ΕΓ$.

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$ του τραπέζιου.

γ) Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{(B\Delta\Gamma)}{(AB\Gamma\Delta)}$.

16821. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a . Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $AE = \frac{3}{5}AB$ και στην πλευρά $A\Delta$ θεωρούμε σημείο Z

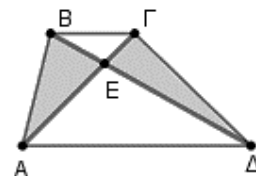


έτσι ώστε $AZ = \frac{4}{5}A\Delta$.

α) Να υπολογίσετε συναρτήσει του a τα εμβαδά, του τριγώνου AEZ και του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

β) Αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του πενταγώνου $EB\Gamma\Delta Z$ είναι ίσο με 76 να υπολογίσετε το μήκος a της πλευράς του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

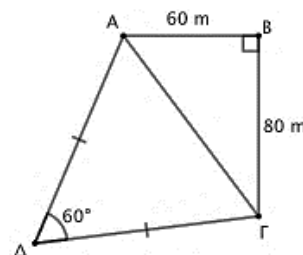
22032. Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($B\Gamma \parallel A\Delta$) και έστω E το σημείο τομής των διαγωνίων του $A\Gamma$ και $B\Delta$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ισοδύναμα.

β) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των γραμμοσκιασμένων τριγώνων ABE και ΔGE .

22035. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος παριστάνει την κάτοψη ενός κτήματος με $AB = 60\text{ m}$, $B\Gamma = 80\text{ m}$, $\hat{\Delta} = 60^\circ$ και $A\Delta = \Gamma\Delta$.



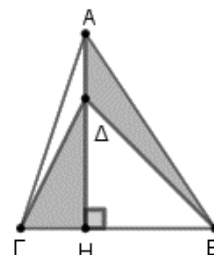
α) Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου $A\Gamma$.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta\Gamma$.

Πόσο είναι το συνολικό εμβαδόν του κτήματος;

22331. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος το AH είναι ύψος και το Δ σημείο του AH . Δίνονται $AB = 20$,



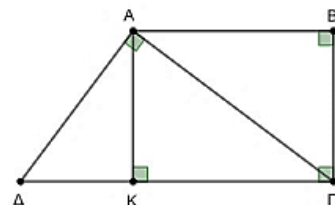
$BH = 12$, $\Gamma H = 5$, και ότι το εμβαδόν του $AB\Delta$ είναι $(AB\Delta) = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι $AH = 16$.

β) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = 4$.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $\Gamma\Delta H$.

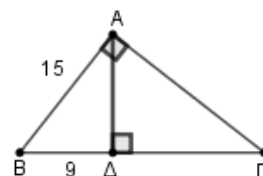
22338. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ και στο οποίο η πλευρά $A\Delta$ και η διαγώνιος $A\Gamma$ είναι κάθετες. Έστω K η προβολή της κορυφής A στην πλευρά $\Gamma\Delta$, $K\Delta = 9$ και $K\Gamma = 16$.



α) Να αποδείξετε ότι $AK = 12$.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$.

22339. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και έστω Δ η προβολή της κορυφής A στην υποτείνουσα $B\Gamma$. Έστω επίσης $AB = 15$ και $\Delta B = 9$.



α) Να αποδείξετε ότι:

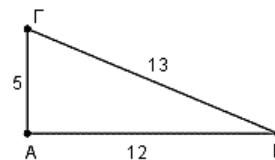
i. $B\Gamma = 25$,

ii. $A\Gamma = 20$.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

22513. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 12$, $AG = 5$ και $B\Gamma = 13$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 90^\circ$.
 β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.
 γ) Να υπολογίσετε το ύψος u_a .



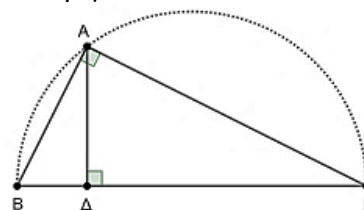
4^ο Θέμα

16807. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με διαστάσεις $AB = 24$, $B\Gamma = 12$ και σημείο E στην ευθεία AB .

- α) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου $\Gamma E\Delta$ όταν :
 i. Το σημείο E είναι το μέσο της πλευράς AB .
 ii. Το σημείο E ταυτίζεται με την κορυφή A του ορθογωνίου.
 β) Αφήνουμε το σημείο E να κινηθεί στην προέκταση του τμήματος AB προς το B , απομακρυνόμενο από το σημείο B .
 i. Να εξετάσετε αν η περίμετρος του τριγώνου $\Gamma E\Delta$ αυξάνεται ή μειώνεται.
 ii. Για το εμβαδό του τριγώνου $\Gamma E\Delta$ συμβαίνει η ίδια μεταβολή με αυτή που απαντήσατε για την περίμετρο του τριγώνου $\Gamma E\Delta$ στο ερώτημα β) i.; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

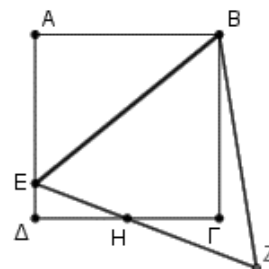
16135. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma = 10$ και έστω ότι Δ είναι η προβολή της κορυφής A στην $B\Gamma$.

- α) Αν $\Delta B = 2$ να υπολογίσετε:
 i. το ύψος $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$,
 ii. το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
 β) Υποθέστε ότι το σημείο A κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $B\Gamma$.
 i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $(AB\Gamma) = 5A\Delta$.
 ii. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
 «Για όλες τις θέσεις του A πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $B\Gamma$, το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ δεν υπερβαίνει το 25».
 Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



17349. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς 3 και σημείο E της πλευράς $A\Delta$, ώστε $AE = 4 - \sqrt{3}$. Στο ημιεπίπεδο που ορίζουν η ευθεία BE και το σημείο Γ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο BEZ . Οι $\Gamma\Delta$ και EZ τέμνονται στο σημείο H και $\Delta H = \sqrt{3}$.

- α) Να αποδείξετε ότι $BE = 2\sqrt{7} - 2\sqrt{3}$.
 β) Να αποδείξετε το H είναι το μέσο της EZ .
 γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ισόπλευρου τριγώνου BEZ και εξωτερικά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.



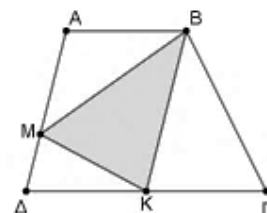
18173. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\Gamma\Delta = 2AB$. Δίνεται επίσης ότι το σημείο K είναι μέσο της $\Gamma\Delta$ και M τυχαίο σημείο στην $A\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(B\Gamma\Gamma) = \frac{1}{2}(ABK\Delta)$.

ii. $(BMK) = (B\Gamma\Gamma)$

β) Δίνεται η πρόταση: «Αν το σημείο M κινείται πάνω στο εσωτερικό της $A\Delta$, τότε ο λόγος των εμβαδών $(AB\Gamma\Delta)$ και (MBK) παραμένει σταθερός και ίσος με 3». Να διερευνήσετε την ορθότητα της πρότασης αιτιολογώντας την απάντησή σας.



18553. Δίνεται τετράγωνο με πλευρά a και σημείο Σ στην προέκταση της πλευράς AB προς το B τέτοιο ώστε $B\Sigma = AB$.

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του a :

i. Το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

ii. Το μήκος της πλευράς $\Sigma\Gamma$ του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

β) Θεωρούμε τυχαίο σημείο Σ' στην προέκταση της πλευράς AB προς το B τέτοιο ώστε $B\Sigma' > B\Sigma$. Να συγκρίνετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

i. Το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma'\Delta\Gamma$ με το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

ii. Το μήκος της πλευράς $\Sigma'\Gamma$ με το μήκος της πλευράς $\Sigma\Gamma$ των τριγώνων $\Sigma'\Delta\Gamma$ και $\Sigma\Delta\Gamma$ αντίστοιχα.

iii. Τις αποστάσεις του σημείου Δ από τις ευθείες $\Sigma\Gamma$ και $\Sigma'\Gamma$.

18557. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$, ώστε $AB > \Gamma\Delta$. Από τις κορυφές Γ και Δ φέρουμε $\Gamma E \parallel A\Delta$ και $\Delta Z \parallel \Gamma B$, με E και Z σημεία στην πλευρά AB του τραπεζίου.

α) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τετραπλεύρων $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$.

β) Να εκφράσετε τις περιμέτρους των τετραπλεύρων $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$ ως συνάρτηση των πλευρών του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$.

γ) Πώς θα πρέπει να κατασκευάσουμε το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ώστε τα τετράπλευρα $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$ να έχουν ίσες περιμέτρους και ίσα εμβαδά;

18555. Σε τετράγωνο πλευράς a παίρνουμε σημείο Σ στην προέκταση της πλευράς AB προς το B τέτοιο ώστε $B\Sigma = AB$.

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του a :

i. Το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

ii. Την περίμετρο του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

β) Στην τάξη του Βρασίδα η καθηγήτρια των Μαθηματικών απέδειξε ότι αν το σημείο Σ' βρίσκεται στην προέκταση του

AB προς το B και κινείται απομακρυνόμενο από το σημείο B , τότε οι πλευρές $\Sigma'\Gamma$ και $\Sigma'\Delta$ μεγαλώνουν. Οπότε, αν το Σ' είναι δεξιότερα από το Σ , θα ισχύει ότι $\Sigma'\Gamma > \Sigma\Gamma$ και $\Sigma'\Delta > \Sigma\Delta$. Ο Βρασίδας ζήτησε το λόγο και διατύπωσε τον ισχυρισμό :

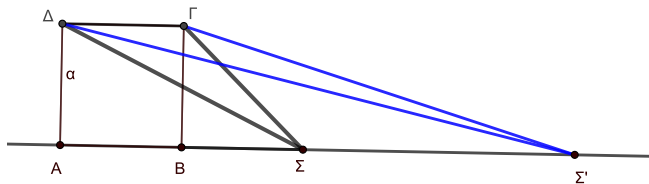
«*Η περίμετρος και το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma'\Delta\Gamma$ είναι μεγαλύτερα από την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$* ».

Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του Βρασίδα:

i. σχετικά με τα εμβαδά των δύο τριγώνων;

ii. σχετικά με την περίμετρο των δύο τριγώνων;

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



18562. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a .

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος της διαγωνίου $B\Delta$ ισούται με $a\sqrt{2}$ και να βρείτε το εμβαδό του.

β) i. Να σχεδιάσετε το τετράγωνο $B\Delta ZH$ έτσι ώστε το σημείο A να είναι εσωτερικό σημείο του και να αποδείξετε ότι το σημείο A είναι το κέντρο του τετραγώνου $B\Delta ZH$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του $B\Delta ZH$ και να το συγκρίνετε με το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

γ) Επαναλαμβάνουμε το σχεδιασμό όπως περιεγράφηκε παραπάνω και σχηματίζουμε νέο τετράγωνο, με πλευρά κάθε φορά, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου. Δηλαδή με πλευρά τη διαγώνιο ΔH του τετραγώνου $B\Delta ZH$ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο, το $\Delta H\Theta K$. Με πλευρά τη διαγώνιο $H K$ του $\Delta H\Theta K$ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο κ.ο.κ. Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδό του κα είναι 16 φορές το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$, πόσες φορές ακόμα πρέπει να επαναλάβουμε το σχεδιασμό αυτό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

18564. Ο παππούς του Πέτρου έχει έναν κήπο σχήματος ορθογωνίου και θέλει να φυτέψει στον μισό διάφορα λουλούδια και στο υπόλοιπο γκαζόν. Λέει λοιπόν στον Πέτρο ότι έχει σκεφτεί κάποιους απλούς τρόπους να τον χωρίσει σε δύο κομμάτια που να έχουν το ίδιο εμβαδό.

α) Να σχεδιάσετε δύο (2) τρόπους με τους οποίους χωρίζεται ο κήπος σε δύο κομμάτια ίδιου εμβαδού και να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας.

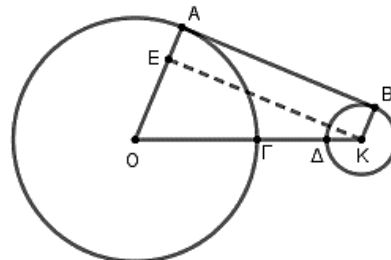
β) Ο Πέτρος προτείνει στον παππού του έναν δικό του τρόπο για το χωρισμό. Για να ορίσει το κομμάτι που κα φυτευτεί με λουλούδια χρησιμοποιεί τρεις πέτρες. Τοποθετεί την πρώτη πέτρα σε ένα εσωτερικό σημείο της μιας πλευράς του κήπου και τις άλλες δύο στις απέναντι κορυφές του ορθογωνίου. Δείχνει στον παππού του το τρίγωνο που σχηματίζεται εξηγώντας του πως είναι το μισό του κήπου. Προτείνει δε στον παππού του, το τριγωνικό χωρίο που σχηματίζεται, να το μετακινήσει εκείνος σε όποια θέση νομίζει καλύτερα μετακινώντας μόνο την πρώτη πέτρα, χωρίς παρ' όλα αυτά να αλλάξει το εμβαδό του.

i. Να σχεδιάσετε τον τρόπο που προτείνει ο Πέτρος και να αποδείξετε ότι, το εμβαδό του σχηματιζόμενου τριγωνικού χωρίου είναι το μισό του κήπου.

ii. Τι εννοεί ο Πέτρος λέγοντας ότι «το τριγωνικό χωρίο μπορεί να μετακινηθεί όταν αλλάζει η θέση της πρώτης πέτρας σε εσωτερικό σημείο της πλευράς του κήπου και παρ' όλα αυτά δεν αλλάζει το εμβαδό του»; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

18565. Δίνονται δύο κύκλοι με κέντρα O και K . Ο κύκλος με κέντρο O έχει ακτίνα $R=7$ ενώ ο κύκλος με κέντρο K έχει ακτίνα $r=2$.

Το τμήμα AB είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των δύο κύκλων και το τμήμα KE είναι παράλληλο στο τμήμα AB με E σημείο του τμήματος OA . Η διάκεντρος OK τέμνει τον κύκλο (O,R) στο σημείο Γ και τον κύκλο (K,r) στο σημείο Δ .



α) Αν η θέση των δύο κύκλων είναι τέτοια ώστε, η απόσταση των σημείων Γ και Δ είναι $\Gamma\Delta=4$, τότε:

i. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AB .

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ABKO$.

β) Ποια πρέπει να είναι η σχετική θέση των 2 κύκλων, ώστε το εμβαδόν του $ABKE$ να ισούται με $4\sqrt{14}$ τ.μ. ;

18566. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$.

Με πλευρά την υποτεινούσα $B\Gamma$ και έξω από το τρίγωνο, γράφουμε το τετράγωνο $B\Gamma\Delta E$.

Προεκτείνουμε την πλευρά BA προς το A και παίρνουμε σημείο Z τέτοιο ώστε $BZ = B\Gamma$. Από τα σημεία Γ και Z φέρουμε παράλληλες προς τα τμήματα BZ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο H .

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $B\Gamma HZ$ είναι ρόμβος και να βρείτε τις περιμέτρους του ρόμβου και του τετραγώνου.

β) Δίνονται οι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: «Ο ρόμβος και το τετράγωνο αφού έχουν ίσες περιμέτρους, θα έχουν και ίσα εμβαδά».

Ισχυρισμός 2: «Ο ρόμβος έχει μικρότερο εμβαδό από το τετράγωνο και μάλιστα, όπως έχουν κατασκευαστεί τα δύο τετράπλευρα δεν γίνεται να είναι ποτέ ισεμβαδικά». Εξετάστε ποιος από τους 2 παραπάνω ισχυρισμούς είναι σωστός και να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

21124.α) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $a = 40$, $\beta = 25$, $\gamma = 25$ και αντίστοιχα ύψη $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma$. Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $E = 300$ και τα ύψη του είναι $u_\alpha = 15$ και $u_\beta = u_\gamma = 24$.

iii. Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη $υ_{\alpha}, υ_{\beta}, υ_{\gamma}$ είναι οξυγώνιο.

β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγωνίου τριγώνου, είναι ισοσκελές και οξυγώνιο.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

21183. Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρά $\sqrt{2}$ και το τετράγωνο ΔEZH έχει πλευρά 1.

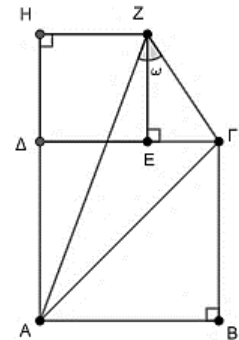
α) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = 2$.

β) Να αποδείξετε ότι

i. $AZ^2 = 4 + 2\sqrt{2}$.

ii. $\Gamma Z^2 = 4 - 2\sqrt{2}$.

γ) Να υπολογίσετε σε μοίρες το μέτρο της γωνίας $\hat{AZ}\Gamma = \hat{\omega}$.



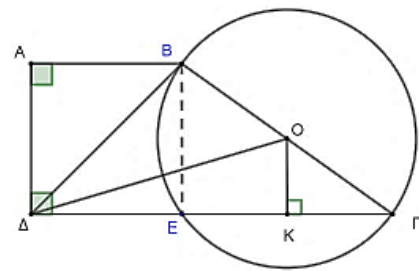
21840. Έστω $AB\Gamma\Delta$ τραπέζιο με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB=5$, $\Gamma\Delta=13$ και εμβαδόν $(AB\Gamma\Delta)=54$. Ο κύκλος με διάμετρο τη $B\Gamma$ τέμνει τη $\Gamma\Delta$ στο σημείο E .

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = 6$.

β) Να υπολογίσετε το μήκος των BE και $B\Gamma$.

γ) Αν OK είναι η κάθετη από το σημείο O στην $E\Gamma$, να αποδείξετε ότι $OK=3$, και να υπολογίσετε το μήκος της OD .

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου BDO .



22100. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνίες

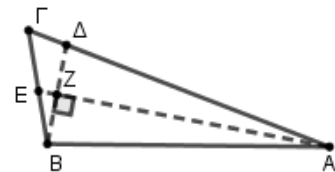
$\hat{A} = 20^\circ$, $\hat{B} = 100^\circ$, και η διχοτόμος AE της γωνίας του A . Από το B φέρνουμε την κάθετη προς την AE και έστω Z , Δ τα σημεία τομής της καθέτου με τις AE , $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{\Gamma B\Delta} = \hat{A} = 20^\circ$.

ii. Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι όμοιο με το τρίγωνο $AB\Gamma$, να γράψετε τα ζεύγη των ομόλογων πλευρών τους και να αιτιολογήσετε γιατί είναι αυτές οι πλευρές ομόλογες.

β) Να σχεδιάσετε εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ δύο τετράπλευρα: ένα τετράγωνο με πλευρά την $B\Gamma$ και ένα ορθογώνιο που η μία του πλευρά είναι η πλευρά $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ και η άλλη του πλευρά είναι ευθύγραμμο τμήμα ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$. Να εξετάσετε αν τα δυο τετράπλευρα, που σχεδιάσατε, έχουν ίσα εμβαδά.



22104. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ εσωτερικό της πλευράς του $B\Gamma$. Έστω M το μέσο M του τμήματος $A\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(ABM) = \frac{1}{2}(AB\Delta)$.

ii. $(ABM) + (M\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει θέση του σημείου Δ τέτοια ώστε τα τρίγωνα ABM και $M\Delta\Gamma$ να έχουν ίσα εμβαδά. Στην περίπτωση που υπάρχει θέση του σημείου Δ για την οποία τα εμβαδά των τριγώνων ABM και $M\Delta\Gamma$ είναι ίσα, να βρείτε τι μέρος του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι το εμβαδόν του κάθε τριγώνου ABM και $M\Delta\Gamma$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

22396. Στο διπλανό σχήμα, δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και έστω Δ η προβολή του σημείου B πάνω στην ευθεία $A\Gamma$. Έστω $A\Delta = 3$ και $\Delta\Gamma = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

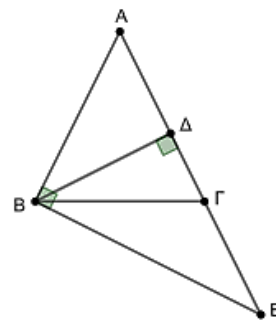
i. $B\Delta = 4$.

ii. $(AB\Gamma) = 10$.

β) Έστω ότι η κάθετη της AB στο σημείο B , τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο E . Να βρείτε:

i. Το μήκος του ΔE .

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου $B\Gamma E$.



22509. Θεωρούμε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με

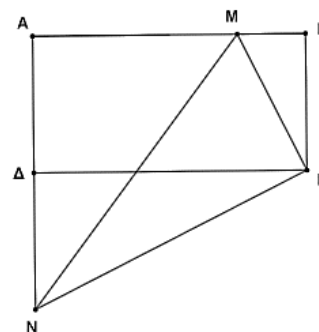
$AB = 2a$ και $A\Delta = a$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο M με $MB = x$ και στην προέκταση της $A\Delta$ σημείο N με $\Delta N = 2x$.

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση των a, x τα $M\Gamma^2$, $N\Gamma^2$ και MN^2 .

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $MN\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

γ) Να υπολογίσετε συναρτήσει των a, x τα εμβαδά των τριγώνων AMN και ΓMN .

δ) Να βρείτε τη θέση του σημείου M , πάνω στην AB ώστε τα τρίγωνα AMN και ΓMN να είναι ισεμβαδικά.



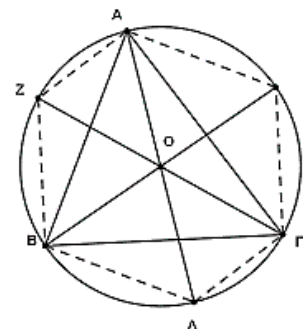
22510. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου O . Θεωρούμε τις διαμέτρους $A\Delta$, BE και ΓZ .

Να αποδείξετε ότι:

α) $(AOB) = (BO\Delta)$ και $(AO\Gamma) = (\Delta O\Gamma)$

β) $(B\Delta\Gamma) = (AOB) + (AO\Gamma) - (BO\Gamma)$

γ) $(AZB\Delta\Gamma E) = 2(AB\Gamma)$



3^ο Θέμα

17908. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ τα μήκη των πλευρών του είναι $\alpha = 4$, $\beta = \sqrt{17}$ και $\gamma = 5$.

α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$, ως προς τις γωνίες του.

β) Αν $A\Delta$ είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ από την κορυφή A , τότε:

i. να υπολογίσετε το ΔB .

ii. να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.

Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

2^ο Θέμα

15979. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG=5$ και $\hat{A}=120^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $B\Gamma = 5\sqrt{3}$ **β)** $(AB\Gamma) = \frac{25\sqrt{3}}{4}$

17346. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=6$, $B\Gamma=4$ και $\hat{B}=60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $AG=2\sqrt{7}$.

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

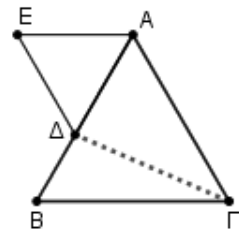
Δίνεται ότι $\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$.

17347. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο πλευράς 10 και το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο πλευράς 6.

α) Να αποδείξετε ότι $(A\Gamma\Delta) = 15\sqrt{3}$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $A\Gamma\Delta E$.

(Δίνεται ότι $\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$)



21196. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με κάθετες πλευρές $\beta=8$ και $\gamma=6$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $E=24$.

β) Να υπολογίσετε:

i. Να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς α του τριγώνου $AB\Gamma$.

ii. Το ύψος του υ_α που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα α του τριγώνου.

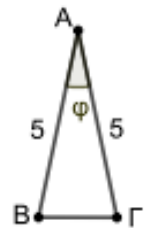
iii. Την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

21299. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG=5$ και η γωνία της κορυφής

φ έχει $\eta\mu\varphi = \frac{2}{5}$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να σχεδιάσετε το ύψος BH του τριγώνου $AB\Gamma$ και να υπολογίσετε το μήκος του.



21838. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $AB=8$, $AG=12$ και γωνία

$\hat{A}=60^\circ$.

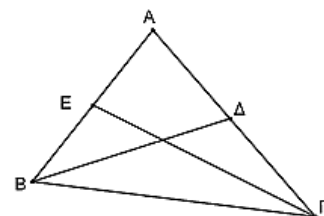
α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι

$(AB\Gamma) = 24\sqrt{3}$.

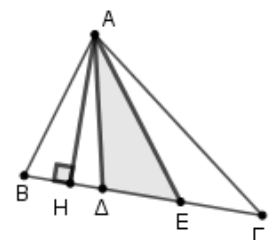
β) Αν $B\Delta$ και ΓE διάμεσοι του τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι :

i. Τα τρίγωνα $BE\Gamma$ και $AE\Gamma$ είναι ισοδύναμα.

ii. Τα τρίγωνα $EB\Gamma$ και $\Delta\Gamma B$ είναι ισοδύναμα με $(EB\Gamma) = (\Delta\Gamma B) = 12\sqrt{3}$.



22259. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην πλευρά του $B\Gamma$, τα σημεία Δ, E ώστε $B\Delta = \Delta E = E\Gamma$. Από την κορυφή A , φέρνουμε το ύψος AH του τριγώνου $AB\Gamma$.



α) Να αποδείξετε ότι $(\Delta \Lambda \epsilon) = \frac{1}{3}(\Delta \Lambda \Gamma)$.

β) Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι $(\Delta \Lambda \epsilon) = \frac{1}{6}(\Delta \Lambda \Gamma)$.

22511. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = 2$, $AG = 3$ και $\hat{A} = 60^\circ$. Να υπολογίσετε:

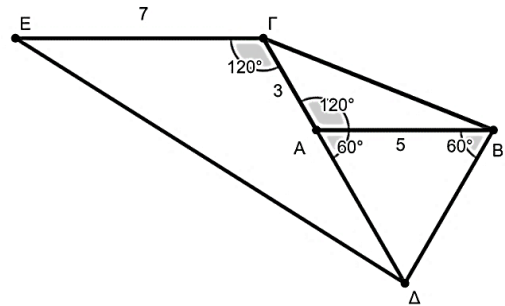
- α) το μήκος της πλευράς ΒΓ.
β) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
γ) το ύψος u_a .

29786. Στο σχήμα που ακολουθεί δίνονται $AB = 5$,

$AG = 3$ και $\hat{BAG} = 120^\circ = \hat{EAG}$ καθώς και

$\hat{BAD} = 60^\circ = \hat{ABD}$.

- α) Να υπολογίσετε το μήκος της ΒΓ.
β) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΔ.
γ) Να υπολογίσετε το μήκος της ΔΕ.
δ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τετραπλεύρου ΒΓΕΔ.



4ο θέμα

22101. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ έχουν σταθερά μήκη 3 και 4 αντίστοιχα.

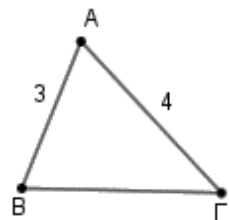
α) Αν η γωνία $\hat{A}$ έχει μέτρο 60° , τότε να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

ii. Το μήκος της πλευράς ΒΓ.

β) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας Α ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ να γίνεται μέγιστο;

Να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



22369. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = 8$,

$BC = 7$ και $\hat{A} = 60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $AG = 3$ ή $AG = 5$.

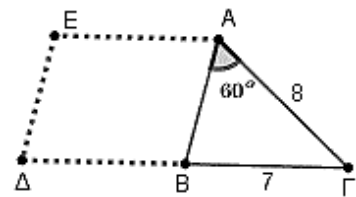
β) Έστω ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο όπως στο διπλανό σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι $AG = 5$.

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι $(\Delta \Lambda \Gamma) = 10\sqrt{3}$.

iii. Προεκτείνουμε τη ΒΓ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = AG$ και σχηματίζουμε τον ρόμβο ΑΓΔΕ.

Να βρείτε το εμβαδόν του ρόμβου ΑΓΔΕ.

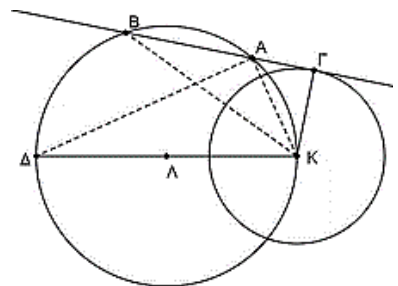


22568. Δίνεται κύκλος με κέντρο το σημείο Λ και ακτίνα $R=10$, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο ενός άλλου κύκλου με κέντρο το σημείο Κ και ακτίνα $r=6$. Η εφαπτομένη του κύκλου (Κ, ρ) στο σημείο του Γ τέμνει τον κύκλο (Λ, R) στα σημεία Α και Β. Η προέκταση της ΚΛ προς το Λ τέμνει τον κύκλο (Λ, R) στο σημείο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΚΓΒ και ΚΑΔ είναι όμοια. ii. $KA \cdot KB = 120$

β) Αν είναι $KB=15$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΚ.



3^ο Θέμα

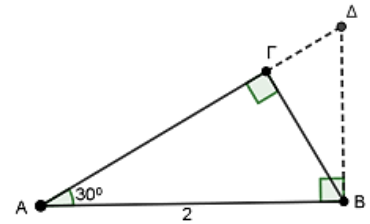
21783. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\hat{\Gamma} = 90^\circ$, $\hat{A} = 30^\circ$ και $AB = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = \sqrt{3}$.

β) Φέρνουμε κάθετη στην AB , στο σημείο B , που τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο Δ .

Να αποδείξετε ότι $A\Delta = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

γ) Αν K είναι το μέσο της $A\Delta$, να αποδείξετε ότι $(KAB) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



29849. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $AB = A\Gamma = 6$ και $B\Gamma = 8$.

α) Να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

β) Να υπολογιστεί το εμβαδό του.

γ) Να υπολογίσετε:

- i. την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$
- ii. την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λόγος Εμβαδών

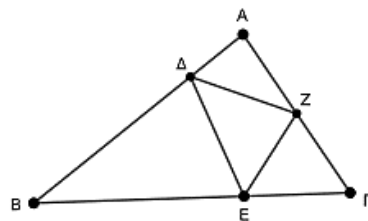
2^ο Θέμα

15978. Στο τρίγωνο ABΓ του παρακάτω σχήματος, τα Δ, Ε, Ζ, είναι σημεία των πλευρών AB, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα, ώστε:

$$A\Delta = \frac{1}{4} AB, BE = \frac{2}{3} B\Gamma \text{ και } \Gamma Z = \frac{1}{2} A\Gamma. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

α) $(A\Delta Z) = \frac{1}{8}(AB\Gamma), (BE\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Gamma), (\Gamma EZ) = \frac{1}{6}(AB\Gamma).$

β) $(\Delta EZ) = \frac{5}{24}(AB\Gamma)$



16127. Ένα τρίγωνο έχει πλευρά ΒΓ = 9 και αντίστοιχο ύψος ΑΔ = 8.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

β) Ένα άλλο τρίγωνο Α'Β'Γ' είναι όμοιο με το τρίγωνο ABΓ και η ομόλογη πλευρά της ΒΓ είναι η Β'Γ' = 6. Να υπολογίσετε:

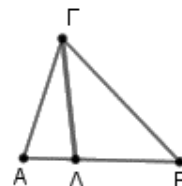
i. τον λόγο ομοιότητας των τριγώνων ABΓ και Α'Β'Γ',

ii. το εμβαδόν του τριγώνου Α'Β'Γ'.

16756. Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta\Gamma)} = \frac{AB}{A\Delta}.$

β) Αν $(AB\Gamma) = 25$ και $AB = 5A\Delta$, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου AΔΓ.



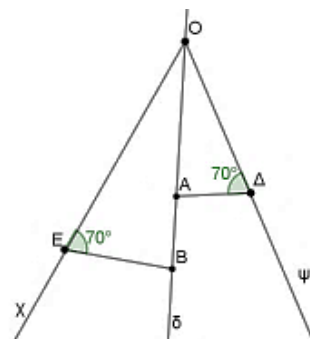
16770. Δίνεται γωνία $\hat{X}\hat{O}\hat{\Psi}$ και η διχοτόμος της Οδ. Πάνω στην Οδ παίρνουμε τυχαία σημεία Α και Β. Θεωρούμε σημείο Ε στην πλευρά Οχ τέτοιο ώστε $\hat{O}\hat{E}\hat{B} = 70^\circ$ και σημείο Δ στην Οψ τέτοιο ώστε $\hat{O}\hat{\Delta}\hat{A} = 70^\circ.$

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΕΒ και ΟΔΑ είναι όμοια.

β) Αν $\frac{OA}{OB} = \frac{2}{3}$ να υπολογίσετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών

των τριγώνων.

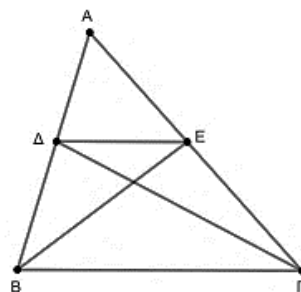
γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΔ είναι 28 τ.μ. να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΟΕΒ.



16806. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB φέρουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί $\frac{(A\Delta E)}{(\Delta EB)} = \frac{A\Delta}{\Delta B}$ και $\frac{(A\Delta E)}{(\Delta E\Gamma)} = \frac{AE}{E\Gamma}.$

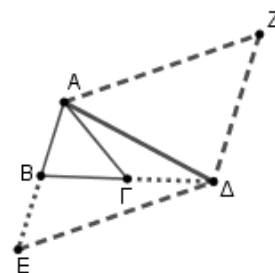
β) Να αποδείξετε ότι $(\Delta EB) = (\Delta E\Gamma).$



18561. Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα ΓΔ=ΒΓ και την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ=ΑΒ.

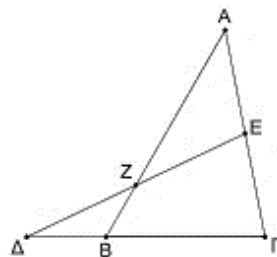
α) Αν $(AB\Gamma) = 25 \text{ m}^2$, να αποδείξετε ότι $(B\Delta E) = 50 \text{ m}^2.$

β) Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΕΔ και από την κορυφή Δ ευθεία παράλληλη στην ΕΑ που τέμνονται στο σημείο Ζ.



Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AZΔ$ είναι 4-πλάσιο του εμβαδού του τριγώνου $ABΓ$.

20667. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ με $BΓ = 8$. Στην προέκταση της $ΓΒ$ προς το B παίρνουμε σημείο $Δ$, ώστε $ΔB = 4$ και E είναι το μέσο της $ΑΓ$.

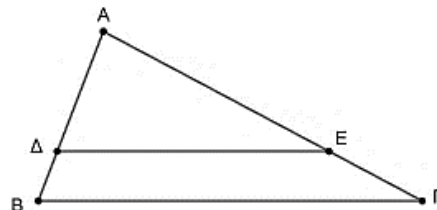


α) Να αποδείξετε ότι $(ABΓ) = 4ΑΓ \cdot ημΓ$.

β) Να αποδείξετε ότι $(ΓΔΕ) = 3ΑΓ \cdot ημΓ$.

γ) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών των τριγώνων $ABΓ$ και $ΓΔΕ$ και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $ABΓ$, αν το εμβαδόν του τριγώνου $ΓΔΕ$ είναι 12 τ.μ.

21120. Έστω τρίγωνο $ABΓ$ με $AB = \sqrt{2}$. Από σημείο $Δ$ της πλευράς AB ώστε $ΑΔ = 1$, φέρνουμε παράλληλη στη $BΓ$ η οποία τέμνει την $ΑΓ$ στο σημείο E .



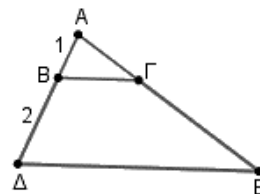
α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ABΓ$ είναι όμοια και να γράψετε τον λόγο ομοιότητας,

ii. το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΔΕ$ είναι το μισό του εμβαδού του τριγώνου $ABΓ$.

β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου $ABΓ$ είναι 2, να βρείτε τα εμβαδά του τριγώνου $ΑΔΕ$ και του τραπεζίου $BΓΕΔ$.

21304. Δίνεται το τρίγωνο $ABΓ$ με $AB = 1$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB και $ΑΓ$ παίρνουμε σημεία $Δ$ και E , αντίστοιχα, ώστε η $ΔE$ να είναι παράλληλη στη $BΓ$ και $BΔ = 2$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ABΓ$ και $ΑΔΕ$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητα $1/3$.

β) Αν η περίμετρος του τριγώνου $ABΓ$ είναι ίση με 8,5, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $ΑΔΕ$.

γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΔΕ$ είναι 15, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $ABΓ$.

21636. Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$, με μήκη πλευρών $AB=6$, $ΑΓ=8$, και $BΓ=10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ορθογώνιο.

β) Αν $ΑΔ$ είναι ύψος του τριγώνου $ABΓ$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ABΔ$ και $ΑΓΔ$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{3}{4}$.

ii. Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{(ABΔ)}{(ΑΓΔ)}$.

22070. Ένα τρίγωνο $ABΓ$ έχει μήκη πλευρών $\alpha = 17$, $\beta = 8$, $\gamma = 15$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ορθογώνιο.

β) Αν $ΑΔ$ είναι το ύψος του τριγώνου $ABΓ$:

i. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $ABΔ$ και $ΑΓΔ$ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους λ .

ii. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(ABΔ)}{(ΑΓΔ)}$.

4^ο Θέμα

16114. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο E στην $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $\Gamma E = \frac{1}{4} \Gamma A$.

α) Αν Δ σημείο της AB τέτοιο ώστε $A\Delta = \frac{1}{3} AB$:

i. Να αποδείξετε ότι $(AB\Gamma) = 4(A\Delta E)$.

ii. Αν από τα E και Γ φέρουμε τις κάθετες EZ και ΓH προς την AB , να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{EZ}{\Gamma H}$.

β) Θεωρώντας ότι το E παραμένει ακίνητο, ενώ το Δ κινείται στο εσωτερικό της AB , να βρείτε σε ποιο σημείο πρέπει να βρεθεί το Δ ώστε $(AB\Gamma) = 2(A\Delta E)$.

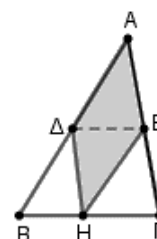
16582. Στο διπλανό τρίγωνο $AB\Gamma$ τα Δ και E είναι σημεία των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Έστω ότι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{1}{2}$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$ είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.

ii. Αν H είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου $A\Delta H E$ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Αν γνωρίζετε ότι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \lambda$, τότε ποια είναι η σχέση των εμβαδών του τετραπλεύρου $A\Delta H E$ και του τριγώνου $AB\Gamma$;



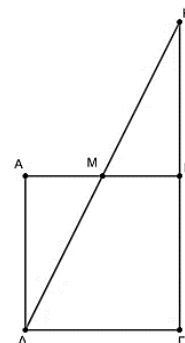
16732. Έστω τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και M το μέσο της AB . Οι ευθείες ΔM και ΓB τέμνονται στο K . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα MKB και $\Delta K\Gamma$ είναι όμοια.

β) $(MKB) = \frac{1}{4}(\Delta K\Gamma)$.

γ) $(MB\Gamma\Delta) = \frac{3}{4}(AB\Gamma\Delta)$.

δ) Αν $(MB\Gamma\Delta) = 75 \text{ m}^2$ να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου.

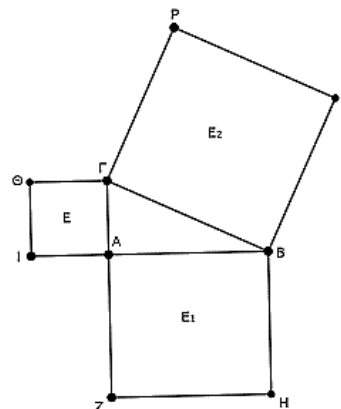


17907. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Με πλευρές τις AB , $A\Gamma$, $B\Gamma$ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$, τα τετράγωνα $ABHZ$, $A\Gamma\Theta I$, $B\Gamma P\Delta$. Έστω E , E_1 , E_2 , τα εμβαδά των τετραγώνων $A\Gamma\Theta I$, $ABHZ$, $B\Gamma P\Delta$ αντίστοιχα. Αν ισχύουν οι ισότητες $E_1 = 4E$, $E_2 = 5E$ τότε:

α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία A .

β) να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των τριγώνων $AB\Gamma$, AIZ , $BH\Delta$, $\Gamma\Theta$ είναι ίσα.

γ) αν η $A\Gamma = 1$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του πολυγώνου $ZH\Delta P\Theta I$.



17956. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ στο εσωτερικό του τμήματος $B\Gamma$. Από το Δ φέρουμε παράλληλες στις πλευρές AB και AG . Η παράλληλη στην AB τέμνει την AG στο Z και η παράλληλη στην AG τέμνει την AB στο E . Θεωρούμε K και Λ τα μέσα των $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(EK\Delta) = \frac{(BE\Delta)}{2}$.

β) $(EZ\Delta) = \frac{(AE\Delta Z)}{2}$.

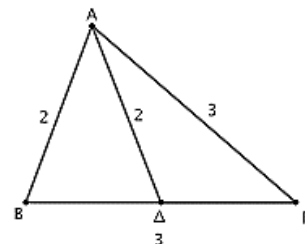
γ) Το εμβαδόν του $KEZ\Lambda$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου Δ .

18101. Στο σχήμα, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι ισοσκελή με $AG = BG = 3$ και $AB = A\Delta = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{B}\Delta\Gamma$ είναι ίσες.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Delta A$ είναι όμοια.

γ) Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(AB\Gamma)}{(B\Delta A)}$ των εμβαδών των δύο τριγώνων.



18301. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τις πλευρές BA και ΓA κατά τμήματα $A\Delta$ και AE αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

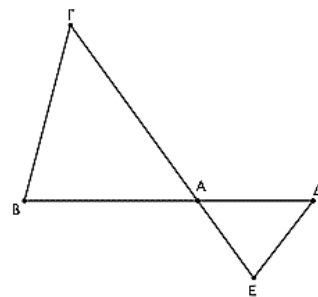
α) Αν είναι $A\Delta = \frac{1}{2} AB$ και $AE = \frac{2}{5} A\Gamma$, να υπολογίσετε τον λόγο

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}.$$

β) Αν είναι $A\Delta = \frac{1}{\lambda} AB$ και $AE = \frac{\mu}{\lambda} A\Gamma$ όπου λ, μ είναι θετικοί

ακέραιοι, να αποδείξετε ότι ο λόγος $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}$ είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ .

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων λ και μ για τα οποία είναι $(A\Delta E) = (AB\Gamma)$ ». Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



18302. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τις πλευρές BA και ΓA κατά τμήματα $A\Delta$ και AE αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Αν είναι $A\Delta = 2AB$ και $AE = \frac{1}{2} A\Gamma$, να αποδείξετε ότι τα

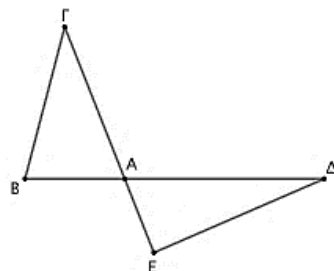
τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι ισοδύναμα.

β) Αν προεκτείνουμε τις πλευρές BA και ΓA κατά τμήματα είναι

$A\Delta = \mu \cdot AB$ και $AE = \nu \cdot A\Gamma$ αντίστοιχα, όπου μ, ν είναι θετικοί

πραγματικοί αριθμοί, ποια πρέπει να είναι η σχέση των αριθμών μ και ν ώστε τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ να είναι ισοδύναμα;

γ) Αν είναι $A\Gamma = \frac{3}{2} AB$ και $A\Delta = 2AB$, να βρείτε τις δυνατές θέσεις του E ώστε τα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ να είναι όμοια.



18369. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, $\hat{A} = 36^\circ$.

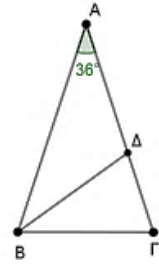
α) Αν η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B , να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια.

ii. Να γράψετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών.

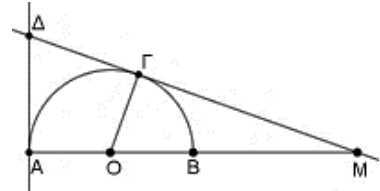
β) Μετακινούμε το σημείο Δ στο εσωτερικό της $A\Gamma$.

Για ποια θέση του σημείου Δ θα ισχύει $\frac{(AB\Delta)}{(\Delta B\Gamma)} = 3$.



18370. Δίνεται ημικύκλιο κέντρου O και διαμέτρου $AB = 2\rho$.

Στην προέκταση του AB προς το B , θεωρούμε σημείο M . Από το M φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα $M\Gamma$ στο ημικύκλιο. Αν η εφαπτόμενη του ημικυκλίου στο σημείο A τέμνει την προέκταση της $M\Gamma$ στο Δ τότε:



α) Αν $BM = 2\rho$ να αποδείξετε ότι $M\Gamma = 2\sqrt{2}\rho$.

β) i. Να αποδείξετε ότι $\frac{MO}{M\Gamma} = \frac{M\Delta}{MA}$.

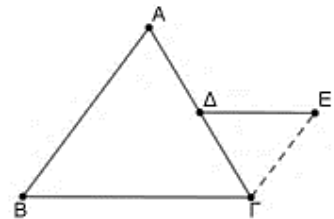
ii. Αν για το M ισχύει ότι $BM = \lambda \cdot \rho$, όπου λ θετικός αριθμός, να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ , τέτοια ώστε $(A\Delta M) = 9(MO\Gamma)$.

18371. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ μέσο της $A\Gamma$. Από το Δ φέρουμε ΔE παράλληλη στην $B\Gamma$ και ίση με το μισό της AB όπως στο σχήμα.

α) i. Να αποδείξετε ότι $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Delta E}{2B\Gamma}$.

ii. Αν το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, τότε να αποδείξετε ότι $(\Delta E\Gamma) = (AB\Delta)$.

β) Σε ένα τεστ που χρειάστηκε από τους μαθητές να βρεθεί ο λόγος $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)}$ ένας μαθητής έγραψε: «Παρατηρώ ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και



$\Delta E\Gamma$ έχουν $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την $\Delta\Gamma$ και δύο πλευρές τους ανάλογες, αφού $\frac{\Delta\Gamma}{A\Gamma} = \frac{\Delta E}{AB} = \frac{1}{2}$. Επειδή έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς

μία και τις γωνίες τους Δ, Γ ίσες, τα τρίγωνα θα είναι όμοια. Επομένως, ο λόγος των εμβαδών

τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \left(\frac{\Delta E}{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ». Ο

καθηγητής του του είπε ότι έχει κάνει ένα σημαντικό λάθος. Μπορείτε να εντοπίσετε σε ποιο σημείο ο συλλογισμός του μαθητή είναι λανθασμένος;

20678. Η κορνίζα του παρακάτω σχήματος αποτελείται από δύο όμοια ορθογώνια με παράλληλες πλευρές και κοινό κέντρο O . Το ορθογώνιο $A'B'\Gamma'\Delta'$ έχει το μισό εμβαδόν από το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$.

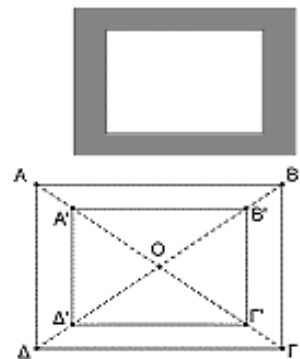
α) Να βρείτε τον λόγο ομοιότητας του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ προς το ορθογώνιο $A'B'\Gamma'\Delta'$.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι όμοια.

γ) Στην κορνίζα τοποθετούμε μια φωτογραφία που χωράει ακριβώς στο κάδρο, χωρίς να χάνεται κανένα μέρος της.

Η διαγώνιος $A\Gamma$ της κορνίζας έχει μήκος 40 cm και $\hat{A\hat{O}B} = 120^\circ$.

i. Πόσο μήκος έχει η διαγώνιος της φωτογραφίας;



ii. Πόσο είναι το εμβαδόν της φωτογραφίας;

21189. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και M, N τα μέσα των πλευρών του AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(AB\Gamma) = (A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta).$

β) $\frac{(BMN)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{4}.$

γ) $(BMN) = \frac{1}{8}(AB\Gamma\Delta).$

21194. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, AM η διάμεσός του και E το μέσο της AM . Από το σημείο E φέρουμε παράλληλες στις AB και $A\Gamma$ οι οποίες τέμνουν την $B\Gamma$ στα σημεία Δ και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(AMB) = (AM\Gamma)$

β) $(ME\Delta) = \frac{1}{8}(AB\Gamma).$

γ) $(AB\Delta E) = (A\Gamma ZE)$

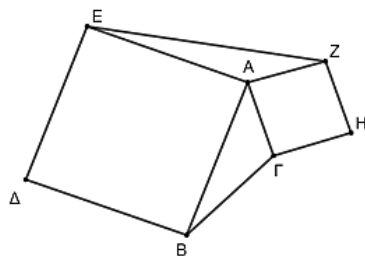
21839. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 6 \text{ cm}$ και $A\Gamma = 3 \text{ cm}$ και $\hat{A}$ οξεία. Εξωτερικά του τριγώνου με πλευρές τις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα του τριγώνου $AB\Gamma$ σχηματίζουμε τα τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma H Z$ και φέρνουμε την EZ , όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AEZ και $AB\Gamma$ είναι ισοδύναμα.

β) Αν το εμβαδόν του πολυγωνικού χωρίου $EZH\Gamma B\Delta$ είναι $(EZH\Gamma B\Delta) = 54 \text{ cm}^2$:

i. Να αποδείξετε ότι η γωνία A του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = 30^\circ$.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει για πλευρά την πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

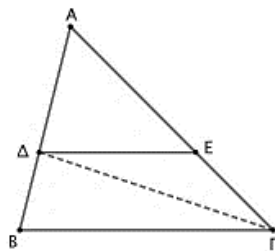


22023. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$ η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια.

β) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}$ όταν το σημείο Δ είναι μέσο της AB .

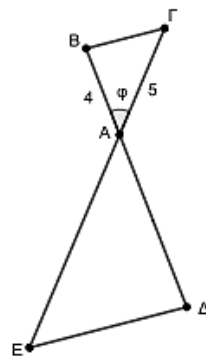
γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου Δ ώστε $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{2}{9}.$



22141. Το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ έχει τα άκρα του B και Γ στις προεκτάσεις των πλευρών ΔA και $E A$, αντίστοιχα, του τριγώνου $A\Delta E$, έτσι ώστε να είναι παράλληλο στην πλευρά ΔE . Επίσης δίνονται τα μήκη των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, $AB = 4$ και $A\Gamma = 5$. Έστω ότι ο λόγος των εμβαδών των

τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι $\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = \frac{1}{4}.$

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια με λόγο $\frac{1}{2}.$



β) Αν $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \varphi$ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν (ΑΔΕ) του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με 40ημφ.

γ) Να βρείτε σημείο Ζ εσωτερικό της πλευράς ΑΔ, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΖ που σχηματίζεται να είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΔΕ.

22148. Έστω Ε σημείο στην πλευρά ΓΑ του τριγώνου ΑΒΓ. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ του ΑΒΓ η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ και παίρνουμε σημείο Ζ στην προέκταση Αχ της πλευράς ΓΑ του τριγώνου ΑΒΓ ώστε να είναι ΑΖ = ΑΕ, όπως στο σχήμα.

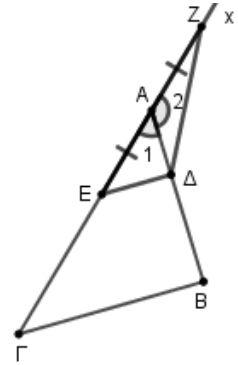
α) Έστω ΑΓ = 3ΑΕ. Να αποδείξετε ότι:

i. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ είναι ίσο με τα $\frac{2}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Αν το εμβαδόν του ΔΕΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του ΑΒΓ, να υπολογίσετε το λόγο

$$\frac{AE}{AG}.$$



22150. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών του ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα.

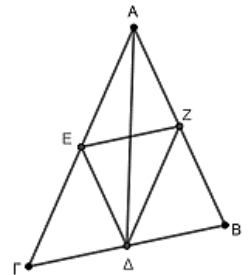
α) Αν επιπλέον το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ ενώνει την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ και το μέσο Δ της απέναντι πλευράς ΒΓ, όπως στο σχήμα, να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΕΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$.

ii. Για το εμβαδόν (ΑΕΔΖ) του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ ισχύει ότι $(ΑΕΔΖ) = (ΑΒΓ) - 2(ΕΔΓ)$.

iii. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Αν το σημείο Δ είναι τυχαίο εσωτερικό σημείο της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, τότε ισχύει ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου



22243. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημείο Ζ στην πλευρά ΑΔ, ώστε

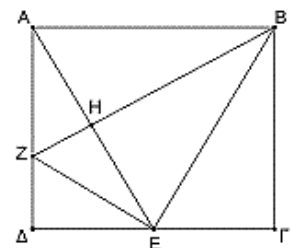
$$AZ = \frac{3}{4} AB.$$

α) Να αποδείξετε ότι $BZ = \frac{5}{4} AB$.

β) Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, Ε το μέσο της ΓΔ και Η είναι το σημείο τομής των ΑΕ, ΒΖ, να αποδείξετε ότι:

i. $BE^2 = \frac{5}{4} AB^2$ και $ZE^2 = \frac{5}{16} AB^2$.

ii. το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο.

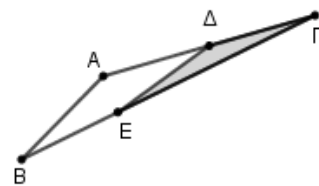


γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BEZ και BΓΕ είναι όμοια και να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών τους.

22260. Δίνεται το τρίγωνο ABΓ του παρακάτω σχήματος, με AB=4, AΓ=6 και $\hat{A}=150^\circ$.

Αν το σημείο Δ είναι το μέσον της ΑΓ και το Ε είναι σημείο της ΒΓ

ώστε $ΓΕ = \frac{2}{3} ΓΒ$, τότε να υπολογίσετε:



α) το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ. Δίνεται $\eta\mu 150^\circ = \frac{1}{2}$.

β) το λόγο $\frac{(ΓΔΕ)}{(ABΓ)}$.

γ) το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΕ.

22340. Έστω τρίγωνο ABΓ και το εσωτερικό σημείο Κ της πλευράς ΒΓ. Θεωρούμε σημείο Ο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΚ, ώστε

$ΑΟ = \frac{3}{4} ΑΚ$. Από το Ο φέρνουμε ευθεία ε η οποία τέμνει τις πλευρές

ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

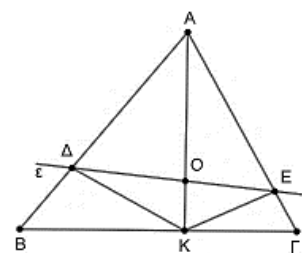
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(ΑΟΔ) = \frac{3}{4}(ΑΚΔ)$.

ii. $(ΑΟΕ) = \frac{3}{4}(ΑΚΕ)$.

iii. $(ΑΔΕ) = \frac{3}{4}(ΑΔΚΕ)$.

β) Είναι δυνατόν να ισχύει $(ΑΔΕ) = \frac{3}{4}(ABΓ)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



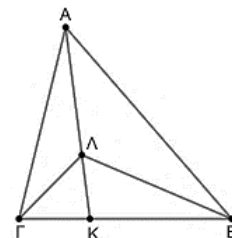
22375. Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε σημείο Κ ώστε $KB = 2ΚΓ$ και στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΚ παίρνουμε σημείο Λ ώστε $ΛΑ = 2ΛΚ$. Έστω E_1, E_2, E_3 και E_4 τα εμβαδά των τριγώνων ΑΛΓ, ΓΛΚ, ΒΛΚ και ΑΛΒ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{E_1}{E_2} = 2$ και $\frac{E_4}{E_3} = 2$.

ii. $E_1 = E_3$.

β) Αν $E_1 = 10$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.



22380. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τραπέζιο ABΓΔ με $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ και $BΓ = 16$, $ΓΔ = 22$ και $ΑΔ = 20$. Έστω Κ η προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία ΓΔ και Λ η προβολή του σημείου Β πάνω στην ευθεία ΑΔ.

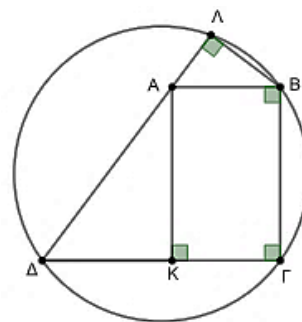
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΚΔ = 12$,

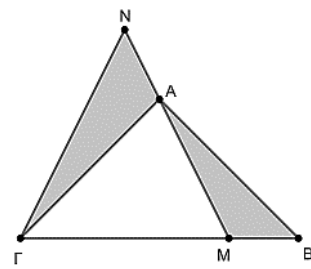
ii. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΚΔ είναι 96.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΒΛΑ είναι όμοια και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΛΑ.

γ) Να βρείτε το μήκος της διαμέτρου του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΒΓΔΛ.



22404. Το σημείο M διαιρεί εσωτερικά την πλευρά BΓ ενός τριγώνου ABΓ σε λόγο $\frac{MB}{MG}$ και το σημείο N διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα AM σε λόγο $\frac{NA}{NM}$.



α) Έστω $\frac{MB}{MG} = \frac{1}{3}$ και $\frac{NA}{NM} = \frac{1}{4}$. Να αποδείξετε ότι:

- i. $\frac{(AMB)}{(AMG)} = \frac{1}{3}$. ii. $\frac{NA}{AM} = \frac{1}{3}$. iii. $(AMB) = (ANG)$.

β) Έστω $\frac{MB}{MG} = 1$ και $(AMB) = (ANG)$. Να βρείτε τον λόγο $\frac{NA}{NM}$ στον οποίο το σημείο N διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα AM.

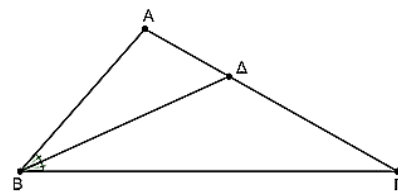
22406. Στο διπλανό σχήμα η BΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου ABΓ και επίσης είναι $BΓ = 2AB$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΔBΓ είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ABΔ.

β) Να χωρίσετε το τρίγωνο ABΓ σε τρία ισοδύναμα τρίγωνα.

γ) Έστω ότι $AB = 12$ και $\eta\mu B = \frac{3}{4}$.

- i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ είναι 108.
ii. Να βρείτε τα εμβαδά των τριγώνων ΔBΓ και ABΔ.



22407. Στο διπλανό σχήμα η AΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου ABΓ και η AK είναι η προβολή της πλευράς AG πάνω στην ευθεία AB. Δίνονται $AB = 10$, $AG = 15$ και $AK = 9$.

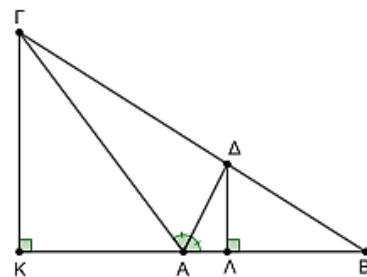
α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $ΓK = 12$ και $(ABΓ) = 60$.
ii. $(AΔB) = 24$ και $(AΔΓ) = 36$.

β) Έστω Λ η προβολή του σημείου Δ πάνω στην ευθεία AB.

i. Να αποδείξετε ότι $\frac{ΔΛ}{ΓK} = \frac{2}{5}$.

ii. Να βρείτε τον λόγο $\frac{ΔB}{ΔK}$ στον οποίο το Λ σημείο διαιρεί εσωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα .



3^ο Θέμα

19037. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ , E , Z των πλευρών AB , $B\Gamma$, $A\Gamma$ αντίστοιχα τέτοια ώστε

$$\Delta B = \frac{1}{5} AB, \quad E\Gamma = \frac{1}{4} B\Gamma, \quad Z\Gamma = \frac{1}{2} A\Gamma.$$

α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{(\Delta BE)}{(\Delta B\Gamma)}, \frac{(E\Gamma Z)}{(E\Gamma B)}, \frac{(Z\Delta\Delta)}{(Z\Delta\Gamma)}$.

β) Αν είναι $(AB\Gamma) = 120$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔEZ .

29850. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $AB = A\Gamma = 5$ και $B\Gamma = 6$.

α) Να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

β) Να υπολογιστεί το εμβαδό του.

γ) Στην προέκταση της πλευράς ΓA παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = 10$. Να υπολογισθεί το εμβαδό του τριγώνου $AB\Delta$.

Κανονικά πολύγωνα

Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων

2° Θέμα

20638. Δύο κανονικά πολύγωνα έχουν πλήθος πλευρών n_1 και n_2 , κεντρικές γωνίες ω_1 και ω_2 και γωνίες φ_1 και φ_2 , αντίστοιχα. Αν ο λόγος του n_1 προς το n_2 είναι ίσος με $\frac{1}{2}$, τότε:

α) Να υπολογίσετε τον λόγο των αντίστοιχων κεντρικών γωνιών ω_1 και ω_2 αυτών των πολυγώνων.

β) Αν το πλήθος των πλευρών ενός από τα δύο κανονικά πολύγωνα είναι $n_1 = 5$, να υπολογίσετε τον λόγο των γωνιών των τους $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$.

21841. Έστω ΑΒΓΔΕΖ κανονικό εξαγώνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R).

α) Να αποδείξετε ότι:

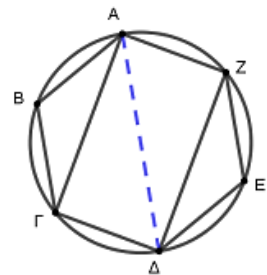
i. Η διαγώνιος ΑΔ του εξαγώνου είναι διάμετρος του κύκλου.

ii. Οι γωνίες $\widehat{\Gamma\hat{A}D}$ και $\widehat{A\hat{D}Z}$ είναι ίσες.

iii. Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΖΔ του εξαγώνου είναι παράλληλες.

iv. Το τετράπλευρο ΑΓΔΖ είναι ορθογώνιο και να βρείτε το εμβαδόν του συναρτήσει της ακτίνας R του κύκλου.

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι σε κάθε κανονικό πολύγωνο με περισσότερες από πέντε πλευρές υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαγώνιοι που να είναι παράλληλες. Συμφωνείτε με την άποψη αυτού του μαθητή; Να αιτιολογήστε τον ισχυρισμό σας.



4° Θέμα

22099. Δίνεται κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και σημείο Μ στο εσωτερικό του. Έστω M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 οι προβολές του σημείου Μ στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(ABM) = \frac{1}{2} \lambda_5 \cdot MM_1$, όπου λ_5 είναι η πλευρά του κανονικού πενταγώνου.

ii. $(ABΓΔΕ) = \frac{1}{2} \lambda_5 \cdot (MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5)$.

iii. $MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5 = 5\alpha_5$, όπου α_5 είναι το απόστημα του κανονικού πενταγώνου.

β) Ένας μαθητής διατύπωσε τον ισχυρισμό: «Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός κανονικού ν-γώνου $A_1A_2 \dots A_n$ και $M_1, M_2, \dots, M_n$ είναι οι προβολές του σημείου Μ στις πλευρές $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ αντίστοιχα, τότε $MM_1 + MM_2 + \dots + MM_n = n\alpha_n$, όπου α_n είναι το απόστημα του κανονικού ν-γώνου». Να αποδείξετε ότι ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

16097.α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα.

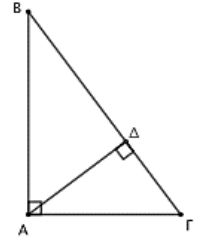
ii. Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.

iii. Στο σχήμα, η προβολή της πλευράς AB στην υποτείνουσα BΓ είναι το τμήμα ΓΔ.

iv. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

v. Ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός κανονικού πολυγώνου είναι ομόκεντροι.

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.



21975.α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.

ii. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.

iii. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

iv. Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι πάντοτε οξυγώνιο.

v. Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

β) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε να αποδείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

Μήκος κύκλου - τόξου

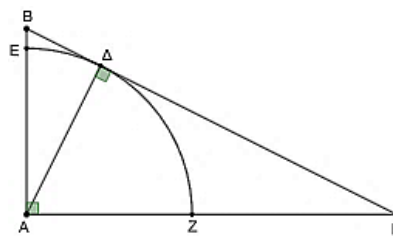
2^ο Θέμα

21122. Το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος, το Δ είναι η προβολή της κορυφής A στην υποτείνουσα $B\Gamma$ και είναι $B\Delta = 1$ και $\Delta\Gamma = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = 2$.

β) Με κέντρο το A και ακτίνα $A\Delta$ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$, στα σημεία E και Z αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου $E\Delta Z$.



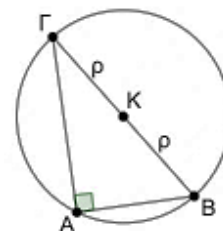
21298. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\hat{A}$ ορθή γωνία και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου, που έχει κέντρο το K και ακτίνα ρ . Επίσης δίνεται ότι το μήκος του κύκλου ισούται με 10π .

α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ του κύκλου έχει μήκος 5.

β) Αν η χορδή AB έχει μήκος 6 να υπολογίσετε:

i. το μήκος της χορδής $A\Gamma$ του κύκλου,

ii. το εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$.

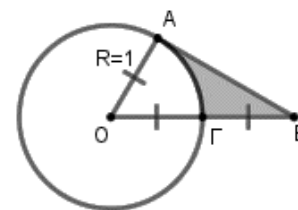


22046. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $R = 1$. Θεωρούμε ακτίνα OG την οποία προεκτείνουμε κατά τμήμα $GB = OG = R$ και το εφαπτόμενο τμήμα BA , όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $\angle OBA = 30^\circ$.

β) Να αποδείξετε ότι $AB = \sqrt{3}$.

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου μεικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.



4^ο Θέμα

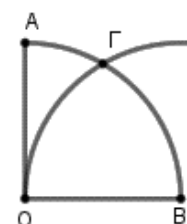
21192. Δίνεται τεταρτοκύκλιο OAB κέντρου O και ακτίνας R . Αν ο κύκλος κέντρου B και ακτίνας R τέμνει το τόξο AB στο σημείο Γ όπως στο σχήμα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $OB\Gamma$ είναι ισόπλευρο και το μήκος $\ell_{B\Gamma}$ του

τόξου $B\Gamma$ είναι $\ell_{B\Gamma} = \frac{\pi R}{3}$.

β) Να αποδείξετε ότι το μήκος του τόξου $A\Gamma$ είναι $\ell_{A\Gamma} = \frac{\pi R}{6}$.

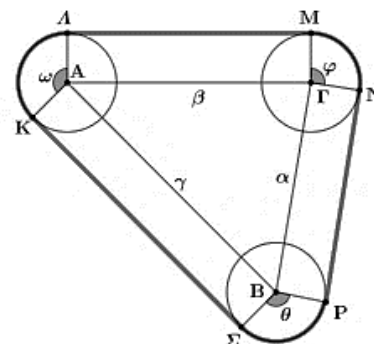
γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του μεικτόγραμμου τριγώνου OAG που αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα OA και τα τόξα $A\Gamma$ και OG .



21193. Στο διπλανό σχήμα τρεις κυκλικοί τροχοί με ίσες ακτίνες, έχουν τα κέντρα τους στις κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$ με πλευρές α , β και γ . Ένας τεντωμένος ιμάντας μήκους L συνδέει τους τρεις ίσους τροχούς όπως στο σχήμα και εφάπτεται σε αυτούς στα σημεία $K, \Lambda, M, N, P, \Sigma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $A\Lambda M\Gamma$ είναι ορθογώνιο.



- ii. Η κυρτή γωνία $\widehat{K\hat{A}L}$ και η γωνία A του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι παραπληρωματικές.
 β) Αν $\widehat{K\hat{A}L} = \hat{\omega}$, $\widehat{\Sigma B P} = \hat{\omega}$, $\widehat{M\hat{\Gamma}N} = \hat{\phi}$, να αποδείξετε ότι $\hat{\omega} + \hat{\theta} + \hat{\phi} = 360^\circ$.
 γ) Να αποδείξετε ότι το μήκος του ιμάντα L είναι $L = 2(\tau + \pi R)$ όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$.

Εμβαδόν κυκλικού δίσκου - τομέα

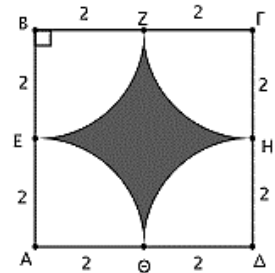
2° Θέμα

18098. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς $a = 4$.

Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα $\rho = 2$ σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα.

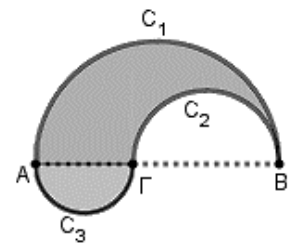
β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι $E = 4(4 - \pi)$.



20672. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $AB = 6$, και σημείο του Γ , ώστε $B\Gamma = 4$. Στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η AB σχεδιάζουμε τα ημικύκλια C_1 και C_2 με διαμέτρους AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα και στο άλλο ημιεπίπεδο σχεδιάζουμε ημικύκλιο C_3 με διάμετρο $A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των ημικυκλίων C_1 , C_2 και C_3 είναι $\frac{9\pi}{2}$, 2π και $\frac{\pi}{2}$ αντίστοιχα.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.



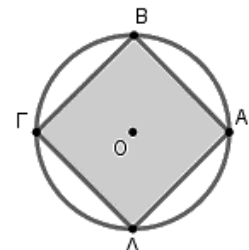
21075. Δίνεται κύκλος με κέντρο O , ακτίνα ρ και εμβαδόν ίσο με 16π .

α) Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του κύκλου.

β) Αν η ακτίνα ρ του κύκλου είναι 4 να υπολογίσετε:

i. Την πλευρά του εγγεγραμμένου τετραγώνου στον κύκλο.

ii. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στο τετράγωνο και στον κύκλο.



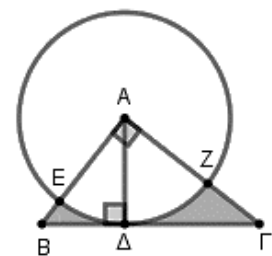
21121. Στο διπλανό σχήμα, το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει υποτείνουσα $B\Gamma = 13$ και αντίστοιχο ύψος $A\Delta = 6$. Με κέντρο το A και ακτίνα $A\Delta$ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ του τριγώνου, στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά:

i. του κυκλικού τομέα $AE\Delta Z$,

ii. του σκιασμένου χωρίου που είναι εσωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ και εξωτερικά του κύκλου, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



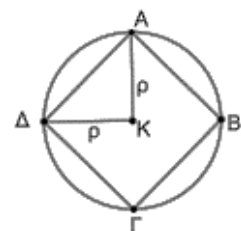
21300. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$, το οποίο είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (K, ρ) , όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AK\Delta$ είναι ορθογώνιο.

β) Αν επιπλέον το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου $AK\Delta$ είναι 4:

i. Να αποδείξετε ότι $\rho = \sqrt{8}$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου (K, ρ) .

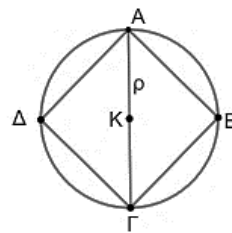


21301. Σε κύκλο (K, ρ) εμβαδού $E = 4\pi$ είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$, όπως στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε:

α) την ακτίνα ρ του κύκλου (K, ρ) .

β) το μήκος της διαμέτρου $A\Gamma$ του κύκλου (K, ρ) και της πλευράς AB του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

γ) το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.



22310. Το παρακάτω σχήμα (Σ) αποτελείται από το ημικύκλιο διαμέτρου AB και το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$. Το ημικύκλιο και το ορθογώνιο έχουν ίσα εμβαδά. Δίνεται $AB = 8\text{ cm}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

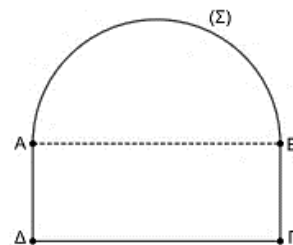
i. το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι $E = 8\pi\text{ cm}^2$.

ii. το μήκος του ημικυκλίου είναι $L = 4\pi\text{ cm}$.

β) Να βρείτε:

i. το μήκος της πλευράς $A\Delta$ του ορθογωνίου,

ii. την περίμετρο του σχήματος (Σ) .



4^ο Θέμα

17599. Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a του παρακάτω σχήματος, γράφουμε τεταρτοκύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου με κέντρο A και ακτίνα a .

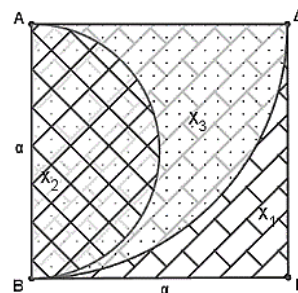
α) Αν X_1 είναι το χωρίο του τετραγώνου που βρίσκεται εξωτερικά του τεταρτοκυκλίου, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ισούται με:

$$(X_1) = \frac{a^2}{4} \cdot (4 - \pi).$$

β) Με διάμετρο AB κατασκευάζουμε ημικύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου. Αν X_2 είναι το χωρίο του ημικυκλίου και X_3 το χωρίο του τεταρτοκυκλίου που βρίσκεται εξωτερικά του ημικυκλίου, να υπολογίσετε τα εμβαδά των δύο χωρίων X_2 και X_3 .

γ) Ποιο από τα χωρία X_1 κι X_2 έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



21197. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο πλευράς $2a$ και Λ το μέσο της πλευράς του $\Gamma\Delta$. Έστω ότι το ημικύκλιο, που σχεδιάζεται στο εσωτερικό του τετραγώνου με διάμετρο την πλευρά του AB , έχει εμβαδόν 10. Τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

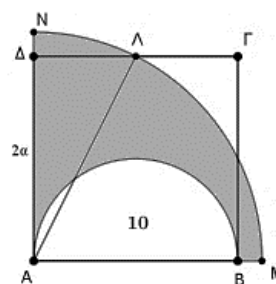
i. Το εμβαδό του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ είναι $(AB\Gamma\Delta) = \frac{80}{\pi}$.

ii. $A\Lambda^2 = \frac{100}{\pi}$.

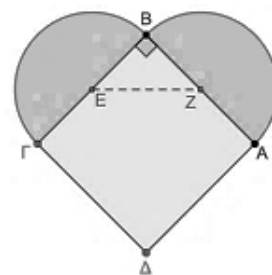
β) Με κέντρο το A και ακτίνα $A\Lambda$ κατασκευάζουμε τεταρτοκύκλιο AMN , και έστω M, N είναι τα σημεία τομής του με τις προεκτάσεις των πλευρών του τετραγώνου $AB, A\Delta$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου $ABMNA$.

ii. Τον λόγο του εμβαδού του τεταρτοκυκλίου AMN προς το εμβαδό του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.



21103. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς $2a$ και με διαμέτρους τις $B\Gamma$ και BA φτιάχνουμε εξωτερικά του τετραγώνου ημικύκλια, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το μήκος κάθε ημικυκλίου ισούται με $\pi - a$.

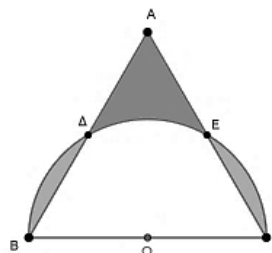
β) i. Αν η περίμετρος της καρδιάς είναι $2\pi + 4$, να υπολογίσετε το a .

ii. Αν $a = 1$ να βρείτε το μήκος του τμήματος που ενώνει τα κέντρα των δύο ημικυκλίων.

γ) Αν (τ) είναι το άθροισμα των εμβαδών των δυο ημικυκλίων να

συγκρίνετε τον λόγο $\frac{(\tau)}{(AB\Gamma\Delta)}$ με την μονάδα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

21979. Στο παρακάτω σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, πλευράς $2a$. Με διάμετρο τη $B\Gamma$ γράφουμε ημικύκλιο, που τέμνει τις πλευρές AB , $A\Gamma$ στα σημεία Δ , E αντίστοιχα. Αν O είναι το κέντρο του ημικυκλίου, να αποδείξετε ότι:



α) $\Delta\Gamma = a\sqrt{3}$.

β) το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων που

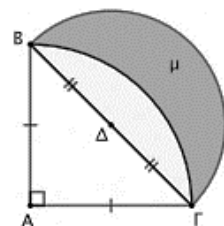
βρίσκονται στο εξωτερικό του τριγώνου ισούται με $E = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})a^2}{6}$.

γ) το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου που ορίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Delta$, AE

και το τόξο ΔE είναι: $E' = \frac{(3\sqrt{3} - \pi)a^2}{6}$.

22021. Δίνεται ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $B\Gamma = 2\rho$. Με διάμετρο $B\Gamma$ γράφουμε ημικύκλιο εξωτερικά του τριγώνου.

Επίσης, γράφουμε τον κυκλικό τομέα $AB\Gamma$ με κέντρο το A και ακτίνα AB , όπως φαίνεται στο σχήμα.

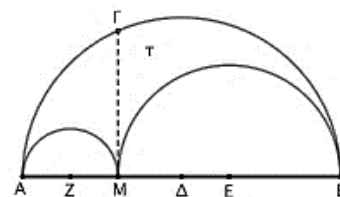


α) Να αποδείξετε ότι $AB = \rho\sqrt{2}$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σχηματιζόμενου μηνίσκου μ ως συνάρτηση του ρ .

γ) Να συγκρίνετε το εμβαδόν του μηνίσκου μ με το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. Τι συμπέρασμα προκύπτει;

22024. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και τυχαίο σημείο του M , τέτοιο ώστε $AM = 2\alpha$ και $MB = 2\beta$. Με διαμέτρους AM , MB και AB γράφουμε ημικύκλια προς το ίδιο μέρος του AB , όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω Γ το σημείο τομής του ημικυκλίου AB και της κάθετης από το M στο AB .



α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν καθενός από τα τρία ημικύκλια

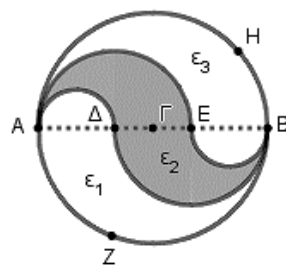
ZAM , EMB και ΔAB όπου Z , E , Δ είναι τα μέσα των AM , MB και AB αντίστοιχα.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν καμπυλόγραμμου σχήματος τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων.

γ) Να αποδείξετε ότι το καμπυλόγραμμο σχήμα τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων έχει το ίδιο εμβαδόν με τον κύκλο διαμέτρου $M\Gamma$.

δ) Για ποια θέση του M μεγιστοποιείται το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τ ;

22058.Θεωρούμε κύκλο με κέντρο Γ και ακτίνα R . Έστω AB διάμετρος του κύκλου και Δ, E σημεία της τέτοια ώστε $A\Delta = \Delta E = EB$. Σχεδιάζουμε τα ημικύκλια $A\Delta$ και $A\Gamma$ πάνω από τη διάμετρο AB και τα ημικύκλια BE και $B\Delta$ κάτω από τη διάμετρο AB , όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να υπολογίσετε τα εμβαδά ϵ_1 και ϵ_3 των καμπυλόγραμμων σχημάτων $A\Delta BZ$ και $BEAH$ αντίστοιχα.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν ϵ_2 του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου σχήματος $A\Delta BE$.

γ) Να εξετάσετε αν ο κύκλος χωρίζεται σε τρία ισοδύναμα καμπυλόγραμμα σχήματα.

22098.Στο παρακάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $AB = 4\alpha$ και $A\Delta = \pi\alpha$. Στο εσωτερικό του ορθογωνίου σχεδιάστηκε ημικύκλιο διαμέτρου AB .

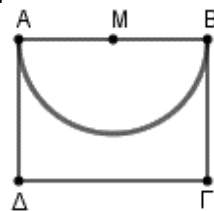
α) Να αποδείξετε ότι το ημικύκλιο χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

β) Αν η διαγώνιος $B\Delta$ τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο E και M είναι το μέσο της AB ,

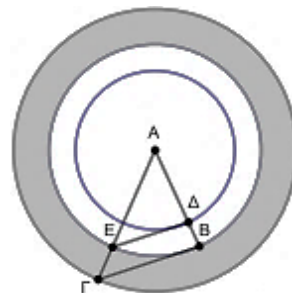
i. να αποδείξετε ότι $AB^2 = B\Delta \cdot BE$ και $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta E$.

ii. να αποδείξετε ότι $BE = \frac{16\alpha}{\sqrt{16+\pi^2}}$ και $\Delta E = \frac{\pi^2\alpha}{\sqrt{16+\pi^2}}$.

iii. να υπολογίσετε το $\text{συν}BME$.



22151.Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Στην πλευρά AB παίρνουμε σημείο Δ και στην πλευρά $A\Gamma$ σημείο E ώστε $AE = AB$. Με κέντρο το σημείο A και ακτίνες $\rho = A\Delta$, $r = AB = AE$ και $R = A\Gamma$ γράφουμε τρεις ομόκεντρους κύκλους (A, ρ) , (A, r) και (A, R) όπως στο σχήμα. Έστω $E_{\Gamma\Gamma}$ το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, r) και (A, R) , $E_{\Delta B}$ το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, ρ) και (A, r) , E_{AB} το εμβαδόν του κύκλου (A, r) και $E_{A\Delta}$ το εμβαδόν του κύκλου (A, ρ) .

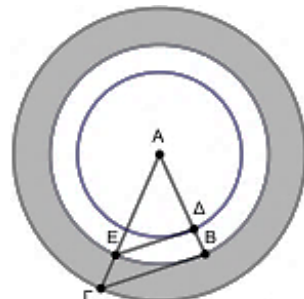


α) Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i. } \frac{E_{\Gamma\Gamma}}{E_{AE}} = \frac{R^2 - r^2}{r^2} \quad \text{ii. } \frac{E_{\Delta B}}{E_{A\Delta}} = \frac{r^2 - \rho^2}{\rho^2}.$$

β) Αν επιπλέον οι ΔE και $B\Gamma$ είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι: $\frac{E_{\Gamma\Gamma}}{E_{AE}} = \frac{E_{\Delta B}}{E_{A\Delta}}$.

22154.Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$, που η κοινή κορυφή τους A βρίσκεται στο κέντρο τριών ομόκεντρων κύκλων (A, ρ_1) , (A, ρ_2) και (A, ρ_3) , η κορυφή Γ βρίσκεται στον κύκλο (A, ρ_3) , οι κορυφές B και E στον κύκλο (A, ρ_2) και η κορυφή Δ στον κύκλο (A, ρ_1) , όπως στο σχήμα, με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Ονομάζουμε $E_{\Gamma\Gamma}$ το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, ρ_2) και (A, ρ_3) , E_1 το εμβαδόν του κύκλου (A, ρ_1) , E_2 το εμβαδόν του κύκλου (A, ρ_2) και E_3 το εμβαδόν του κύκλου (A, ρ_3) .



α) Αν $\frac{E_{\Gamma\Gamma}}{E_2} = \frac{7}{9}$, να αποδείξετε ότι:

$$\text{i. } \frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{3}{4} \quad \text{ii. } \frac{E_2}{E_3} = \frac{9}{16}.$$

iii. Αν επιπλέον οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες να αποδείξετε ότι $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{3}{4}$.

β) Αν $E_{\text{EF}} = E_2$ και επιπλέον οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι $E_{\Delta B} = E_1$ όπου $E_{\Delta B}$ είναι το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, ρ_1) και (A, ρ_2) .

22244. Ένας κηπουρός θέλει να ποτίσει το γκαζόν που έχει φυτέψει σε έναν τετράγωνο κήπο πλευράς 10 m. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιεί μηχανισμούς ποτίσματος τους οποίους μπορεί να ρυθμίσει, ώστε να ποτίζουν έναν κυκλικό τομέα με συγκεκριμένη γωνία και ακτίνα.

α) Ο κηπουρός τοποθετεί στις απέναντι κορυφές Α, Γ του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 10m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Να αποδείξετε ότι:

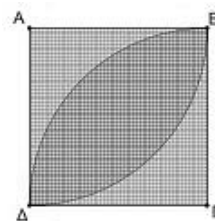
i. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζει κάθε μηχανισμός είναι $25\pi \text{ m}^2$.

ii. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζουν ταυτόχρονα και οι δύο μηχανισμοί είναι $50(\pi - 2) \text{ m}^2$.

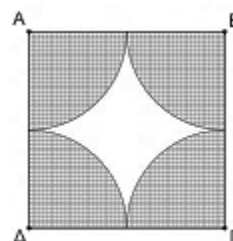
β) Ο κηπουρός τοποθετεί στις τέσσερις κορυφές του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 5m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.

i. Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που δεν ποτίζεται.

ii. Για να μην μείνει απότιστη κάποια περιοχή του κήπου ο κηπουρός τοποθετεί έναν πέμπτο μηχανισμό ποτίσματος στο κέντρο του κήπου ο οποίος ποτίζει την περιοχή ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας 5m. Να βρείτε το εμβαδόν του κήπου που ποτίζεται από δύο μηχανισμούς ταυτόχρονα και να το συγκρίνετε με την απάντηση που βρήκατε στο ερώτημα α).



Σχήμα 1



Σχήμα 2

22261. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) με $AB = \gamma$, $AG = \beta$ και

$B\Gamma = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο με $\hat{A} > 90^\circ$.

β) η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με 120° . Δίνεται $\sin 120^\circ = -\frac{1}{2}$.

γ) η γωνία ΒΟΓ ισούται με 120° .

δ) το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος, που ορίζεται από τη χορδή ΒΓ και το κυρτογώνιο τόξο

ΒΓ, είναι $E = \frac{(4\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12}$. Δίνεται $\eta\mu 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

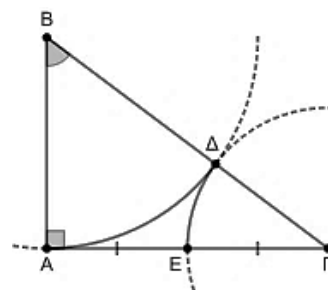
22389. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$. Με κέντρο το σημείο Β και ακτίνα $R = BA$ γράφουμε τον κύκλο (B, R) ο οποίος τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ. Με κέντρο το σημείο Γ και ακτίνα $\rho = \Gamma\Delta$ γράφουμε τον κύκλο (Γ, ρ) ο οποίος τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε. Έστω ότι το Ε είναι το μέσο της ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι $\rho = \frac{2}{3}R$.

β) Έστω E_1 το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ και E_2 το εμβαδόν του κύκλου (B, R) . Να αποδείξετε ότι $\frac{E_2}{E_1} = \frac{3\pi}{2}$.

γ) Έστω $\hat{B} = \mu^\circ$ και E_3 και E_4 είναι το εμβαδά των κυκλικών τομέων ΒΑΔ και ΓΔΕ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι $\frac{E_4}{E_3} = \frac{4(90 - \mu)}{9\mu}$.



3^ο Θέμα

22054. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς $2a$. Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα a σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα ως συνάρτηση του a .

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου είναι: $E = a^2 (4 - \pi)$.

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου.

