

1ο Κεφάλαιο

Συστήματα

1.1. Γραμμικά συστήματα

A. Γραμμικό σύστημα 2X2

1. Να λύσετε γραφικά τα παρακάτω συστήματα:

α)
$$\begin{cases} \psi = \chi + 1 \\ \psi = 2 \end{cases}$$

β)
$$\begin{cases} \psi = 2\chi \\ \chi - \psi = 3 \end{cases}$$

γ)
$$\begin{cases} \chi - \psi = 1 \\ \chi + \psi = 3 \end{cases}$$

2. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα με τη μέθοδο της αντικατάστασης:

α)
$$\begin{cases} \chi - 3\psi = 2 \\ 2\chi + 4\psi = 14 \end{cases}$$

β)
$$\begin{cases} 3\chi - 2\psi = 3 \\ 9\chi - \psi = 4 \end{cases}$$

γ)
$$\begin{cases} 3\chi - 2\psi = 5 \\ 2\chi + 3\psi = -1 \end{cases}$$

3. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών:

α)
$$\begin{cases} 3\chi + 2\psi = -1 \\ -3\chi + 5\psi = -6 \end{cases}$$

β)
$$\begin{cases} 2\chi - 3\psi = 7 \\ 4\chi + 2\psi = -2 \end{cases}$$

γ)
$$\begin{cases} 3\chi - 5\psi = -2 \\ 4\chi - 7\psi = -3 \end{cases}$$

4. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α)
$$\begin{cases} 3\chi + \psi = 5 \\ 3\chi + \psi = 7 \end{cases}$$

β)
$$\begin{cases} \chi - 2\psi = 6 \\ 2\chi - 3\psi = -6 \end{cases}$$

γ)
$$\begin{cases} \chi - 3\psi = 2\chi + 1 \\ 4\chi + 3\psi = 3\chi - 5 \end{cases}$$

δ)
$$\begin{cases} 3\chi + 5 = \psi - 2 \\ 6\chi + 3 = 2\psi - 1 \end{cases}$$

ε)
$$\begin{cases} 2\chi - 3\psi = 2 \\ 4\chi - 6\psi = 4 \end{cases}$$

στ)
$$\begin{cases} 4\chi + \psi = 5\chi - \psi + 1 \\ 3\chi - \psi = \chi + 3\psi - 2 \end{cases}$$

5. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} \frac{\chi}{2} - 1 = \frac{\psi}{4} \\ \frac{\chi - 1}{2} - \frac{\chi - 2\psi}{3} = \frac{4}{3} \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} \frac{\chi + \psi}{4} - \frac{\chi - \psi}{3} = 10 \\ \frac{\chi + \psi}{8} - 5 = \frac{\psi - \chi}{6} \end{cases}$$

6. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} \chi - 2(\chi - \psi) = 3 - (2\chi - \psi) \\ \psi - \chi(1 - 2\psi) = 1 + 2\psi(\chi - 1) \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} 3\chi - 2\psi(\psi - 1) = 1 - 2(\psi - 1)^2 \\ \chi\psi - 2(\chi - 3\psi) = \chi - \psi(2 - \chi) + 13 \end{cases}$$

7. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} \frac{3}{\chi} - \frac{2}{\psi} = -2 \\ \frac{4}{\chi} - \frac{1}{\psi} = -\frac{1}{6} \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} \frac{3}{\chi - 1} - \frac{2}{2\psi - 1} = 1 \\ \frac{1}{\chi - 1} - \frac{2}{6\psi - 3} = -1 \end{cases}$$

8. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 3\sqrt{\chi} - 2\sqrt{\psi} = 4 \\ 2\sqrt{\chi} - \sqrt{\psi} = 3 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} \sqrt{\chi - 1} - \sqrt{2\psi - 1} = -1 \\ \sqrt{\chi - 1} - 2\sqrt{2\psi - 1} = -4 \end{cases}$$

9. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 2|\chi| - 3|\psi| = 1 \\ 3|\chi| - |\psi| = 5 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} |2\chi - 1| - |3\psi - 2| = 2 \\ |1 - 2\chi| - 2|3\psi - 2| = 1 \end{cases}$$

10. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 5\chi^2 - \psi^3 = 4 \\ 2\chi^2 + 3\psi^3 = 5 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} (\chi - 1)^3 - 2\psi^4 = -10 \\ 2(\chi - 1)^3 + 15\psi^4 = -1 \end{cases}$$

11. Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών:

α) $\epsilon_1: \chi - 3\psi + 1 = 0$ και $\epsilon_2: 2\chi - \psi - 3 = 0$

β) $\epsilon_1: 3\chi - \psi - 1 = 0$ και $\epsilon_2: 5\chi + \psi - 7 = 0$

12. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

α) A(1,2) και B(2,-3)

β) A(2,1) και B(2,3)

13. Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 + (\alpha - 2\beta)\chi + \alpha - \beta = 0$. Αν το άθροισμα των ριζών της είναι $\frac{3}{2}$ και το γινόμενο των ριζών της είναι $\frac{1}{2}$, να βρείτε τα α και β .

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{\alpha\chi^3 - 1}{\beta\chi^2 - 2}$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(-1,-1) και B(- $\frac{1}{2}$, 1):

α) Να βρείτε τα α και β

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

15. Να βρείτε τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου, αν είναι γνωστό ότι το εμβαδόν του δε μεταβάλλεται όταν το μήκος του ελαττωθεί κατά 5 cm και το πλάτος του αυξηθεί κατά 5 cm. Όταν όμως το μήκος του ελαττωθεί κατά 4 cm και το πλάτος του αυξηθεί κατά 5 cm, το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 24 cm².

B. Επίλυση – διερεύνηση γραμμικού συστήματος 2X2

16. Να υπολογίσετε τις παρακάτω ορίζουσες:

$$\alpha) \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \beta) \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \quad \gamma) \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} \quad \delta) \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$$

17. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\alpha) \begin{vmatrix} \chi - 1 & -2 \\ -\chi - 1 & \chi + 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \beta) \begin{vmatrix} 2\chi - 1 & 1 \\ 1 & \chi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \chi & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

18. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

$$\alpha) \begin{vmatrix} \chi & 2 \\ 8 & \chi \end{vmatrix} < 0 \quad \beta) \begin{vmatrix} 2\chi - 1 & 4 \\ \chi^2 & 2\chi + 1 \end{vmatrix} \geq -4\chi$$

19. Για τις διάφορες τιμές του λ να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} \lambda\chi + \psi = \lambda \\ \chi + \psi = 2\lambda - 1 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} \lambda\chi + 2\psi = \lambda + 2 \\ (2\lambda - 1)\chi + (\lambda + 1)\psi = 2(\lambda + 1) \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} (\lambda + 2)\chi + 4\psi = 8 - 3\lambda \\ 2\chi + (\lambda + 4)\psi = 8 \end{cases}$$

20. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} \lambda\chi + \psi = 1 \\ \chi + \lambda\psi = -1 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} \lambda^2\chi - 2\psi = \lambda \\ \lambda\chi - \psi = \lambda - 1 \end{cases}$$

21. Για τις διάφορες τιμές του λ να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} \lambda^2\chi + \psi = \lambda \\ \chi + 4\psi = 2 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} (\lambda + 1)\chi - \psi = \lambda + 1 \\ \chi + (\lambda - 1)\psi = 2 \end{cases}$$

22. Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ το παρακάτω σύστημα είναι αόριστο:

$$\begin{cases} \chi + \lambda\psi = 1 \\ \lambda\chi + \psi = \lambda^2 \end{cases}$$

23. Αν το σύστημα $\begin{cases} \lambda\chi + 2\psi = 2 \\ \chi + \psi = 1 \end{cases}$ είναι αόριστο, να δείξετε ότι το

σύστημα $\begin{cases} \chi - \lambda\psi = \lambda \\ \lambda\chi - 4\psi = 3 \end{cases}$ είναι αδύνατο.

24. Να βρείτε το λ ώστε το σύστημα $\begin{cases} \chi - \lambda\psi = \lambda^2 - 7 \\ \lambda\chi - \psi = 0 \end{cases}$ να έχει μοναδική λύση (χ, ψ) για την οποία να ισχύει: $\chi + 2\psi = 5$

25. Έστω ότι το σύστημα $\begin{cases} \lambda\chi + \psi = 1 \\ \chi + \psi = \lambda \end{cases}$ έχει μοναδική λύση (χ_0, ψ_0) .

α) Να βρείτε τις τιμές του λ

β) Αν $|\chi_0| + |\psi_0| = 2$ να βρείτε το λ .

26. Να βρείτε τα λ και μ ώστε τα συστήματα:

$$\begin{cases} \chi - \lambda\psi = -2 \\ \chi + 3\psi = 1 \end{cases} \text{ και } \begin{cases} \lambda\chi + \psi = 0 \\ (\lambda - 1)\chi - \mu\psi = 2 \end{cases}$$

να είναι συγχρόνως αδύνατα.

27. Αν για το σύστημα $\begin{cases} \alpha_1\chi + \beta_1\psi = \gamma_1 \\ \alpha_2\chi + \beta_2\psi = \gamma_2 \end{cases}$ ισχύει:

$$D^2 + D_\chi^2 + D_\psi^2 = 2D + 4D_\chi - 5$$

α) Να δείξετε ότι: $(D-1)^2 + (D_\chi - 2)^2 + D_\psi^2 = 0$

β) Να βρείτε τα χ και ψ .

28. Αν για το σύστημα $\begin{cases} \alpha_1\chi + \beta_1\psi = \gamma_1 \\ \alpha_2\chi + \beta_2\psi = \gamma_2 \end{cases}$ ισχύει:

$D_\chi^2 + D_\psi^2 + 2D^2 = 2(D \cdot D_\chi - D_\psi + D - 1)$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία και να την βρείτε.

Γ. Γραμμικά συστήματα 3Χ3

29. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} \chi + \psi - z = 0 \\ 2\chi - \psi + z = 3 \\ \chi + 2\psi - z = 2 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 2\chi + \psi + z = 1 \\ 3\chi + \psi + 2z = 2 \\ 4\chi - \psi + 3z = 1 \end{cases}$$

30. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 2\chi - \psi - 3z = 2 \\ \chi + \psi + 2z = 1 \\ 3\chi - z = 4 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} \chi - 2\psi + z = 1 \\ 2\chi - \psi - 2z = -2 \\ 3\chi - 3\psi - z = 0 \end{cases}$$

31. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} \chi - \psi + z = 1 \\ 2\chi - \psi - z = -2 \\ 3\chi - 2\psi = -1 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 2\chi - \psi + z = -2 \\ \chi + 2\psi - z = 0 \\ \chi - 3\psi + 2z = -2 \end{cases}$$

32. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} \chi - \psi + z = 0 \\ 2\chi + \psi - z = 0 \\ \chi - 2\psi + z = 0 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} \chi - 2\psi + z = 0 \\ \chi + \psi - z = 0 \\ 2\chi - \psi + z = 0 \end{cases}$$

1.2. Μη γραμμικά συστήματα

33. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} \chi - \psi = -2 \\ 4\chi - \psi^2 + 5 = 0 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} \chi - \psi = 2 \\ \chi^2 + \chi\psi = 60 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 2\chi + \psi = -3 \\ \chi^2 - \chi\psi = 6 \end{cases}$$

34. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} \chi^2 + \psi^2 = 13 \\ \chi\psi = -6 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} \chi^2 + \psi^2 = 5 \\ \chi\psi = -2 \end{cases}$$

35. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} \chi^2 + \psi^2 - \chi\psi = 7 \\ \chi + \psi = -1 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} \chi^2 + \psi^2 + \chi\psi = 19 \\ \chi - \psi = 1 \end{cases}$$

36. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 2\chi - \psi - 1 = 0 \\ \chi\psi - 1 = 0 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 5\chi^2 - \psi^2 = 19 \\ \chi\psi = 2 \end{cases}$$

37. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{\chi}{\psi} + \frac{\psi}{\chi} = -\frac{5}{2} \\ \chi^2 + \psi^2 = 5 \end{cases}$$

38. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε να ισχύει: $\alpha^2 + \beta^2 = 16$ και $\alpha + \beta = 6$.

2ο Κεφάλαιο

Μονοτονία , ακρότατα και συμμετρίες συνάρτησης

A. Μονοτονία συνάρτησης

39. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = 2x^3 + 1$

β) $f(x) = -3x^3 - 5x + 2$

40. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = \sqrt{x+2} - 1$

β) $f(x) = 2 + \sqrt{5-2x}$

γ) $f(x) = \frac{1}{x+1} - \sqrt{x+1}$

41. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση

$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ στο διάστημα $(-\infty, 1)$

42. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο A και η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο A , να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο A .

43. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι:
 $f(a^2+1) \geq f(2a)$

44. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι:
 $f(x^2+3) < f(2)$

45. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $f(3x-1) \geq f(x-5)$

β) $f(|x-1|) < f(5)$

B. Ακρότατα συνάρτησης

46. Να βρείτε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = 2x^4 - 3$ β) $f(x) = 2(x-3)^2 - 5$ γ) $f(x) = -2x^6 + 5$
δ) $f(x) = 2|x| - 1$ ε) $f(x) = 5 - 3|x-1|$ στ) $f(x) = 2 - 3\sqrt{x-1}$

47. Να βρείτε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ β) $f(x) = x^2 - 4|x| + 4$ γ) $f(x) = \frac{2}{x^2 + 5}$

48. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 + \sqrt{x-1}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
β) Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία
γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f
δ) Να βρείτε το $f(5)$
ε) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) > 27$

Γ. Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

49. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές:

α) $f(x) = 5x^6 - 2x^2 + 3$ β) $f(x) = 2x^5 - 4x^3 + 3x$
γ) $f(x) = x^3 - 3x|x| + 2x$ δ) $f(x) = |2x-1| + |2x+1|$

50. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές:

α) $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x}$ β) $f(x) = \frac{x^3}{|x| - 1}$
γ) $f(x) = \frac{3|x| + 2}{x^2 + 1}$

51. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4} + 1}{|x| - 3}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της
β) Να δείξετε ότι η f είναι άρτια

52. Αν η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\alpha - 1)x + 5$ είναι άρτια να βρείτε το α .

53. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι περιττές, να δείξετε ότι η συνάρτηση:

- α) $h(x) = f(x) + g(x)$ είναι περιττή
β) $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$ είναι άρτια

3ο Κεφάλαιο

Τριγωνομετρία

3.1. Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

54. Να εκφράσετε σε rad τις γωνίες:

- | | | | |
|------------------|------------------|-------------------|-----------------|
| α) 1° | β) 30° | γ) 45° | δ) 60° |
| ε) 90° | στ) 120° | ζ) 120° | η) 150° |
| θ) 180° | ι) 270° | ια) 340° | ιβ) 760° |
| ιγ) 1360° | ιδ) -475° | ιε) -2165° | |

55. Να μετατρέψετε σε μοίρες τις παρακάτω γωνίες:

- | | | | |
|--------------------------|---------------------------|---------------------------|--------------------------|
| α) $\frac{\pi}{12}$ rad | β) $\frac{4\pi}{5}$ rad | γ) $\frac{5\pi}{3}$ rad | δ) $\frac{61\pi}{6}$ rad |
| ε) $\frac{49\pi}{4}$ rad | στ) $\frac{13\pi}{6}$ rad | ζ) $-\frac{7\pi}{12}$ rad | |

56. Αν $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ και $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$ να βρείτε τα πρόσημα των παραστάσεων:

α) $A = \eta\mu 2\alpha$

β) $B = \sigma\upsilon\nu 2\beta$

γ) $\Gamma = \eta\mu(-4\beta)$

δ) $\Delta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - 2\beta)$

57. Αν $\frac{\pi}{4} < \chi < \frac{\pi}{2}$ να βρείτε το πρόσημο της παράστασης:

$$A = \eta\mu \frac{\chi}{2} - \epsilon\phi 2\chi - \sigma\upsilon\nu 3\chi + \sigma\upsilon\nu \chi$$

58. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \sigma\upsilon\nu^2 0 + \sigma\upsilon\nu^2 \pi + \eta\mu^2 \frac{3\pi}{2} + \epsilon\phi^2 2\pi$$

59. Για ποιες τιμές του χ έχουν νόημα οι παρακάτω τριγωνομετρικοί αριθμοί:

α) $\eta\mu\theta = 2\chi - 1$

β) $\sigma\upsilon\nu\theta = \chi^2 - 5\chi + 5$

γ) $\eta\mu\theta = \frac{\chi + 1}{\chi - 1}$

60. Να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

α) $\psi = 3 + 2\eta\mu\chi$

β) $\psi = -2 + 5\eta\mu\chi$

γ) $\psi = 5 - 3\sigma\upsilon\nu\chi$

δ) $\psi = 2 + \sigma\upsilon\nu^2 \chi$

ε) $\psi = \frac{1}{3 + \eta\mu\chi}$

στ) $\psi = \frac{1}{2 - \sigma\upsilon\nu\chi}$

61. Δίνεται η εξίσωση $4\chi^2 - 4(1 + 2\eta\mu\theta)\chi + \eta\mu\theta = 0$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε γωνία θ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Αν χ_1, χ_2 οι ρίζες της εξίσωσης να δείξετε ότι $-1 \leq \chi_1 + \chi_2 \leq 3$.

3.2. Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

62. Αν $\sin \omega = -\frac{5}{13}$ και $180^\circ < \omega < 270^\circ$, να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

63. Αν $\cot \omega = -\frac{3}{4}$ και $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

64. Αν $6\eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu\chi - 5 = 0$ και $\frac{\pi}{2} < \chi < \pi$, να βρείτε το $\eta\mu\chi$.

65. Αν $\eta\mu\chi = -\frac{1}{5}$ και $\pi < \chi < \frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi}{\epsilon\phi\chi + \sigma\phi\chi}$

66. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{\eta\mu\alpha}{1 + \sigma\phi\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \epsilon\phi\alpha} = \frac{1}{\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha}$$

$$\beta) \frac{\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\epsilon\phi\alpha - 1}{\epsilon\phi\alpha + 1}$$

$$\gamma) \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\phi\alpha}{\sigma\phi\alpha} = 1 + \eta\mu\alpha$$

$$\delta) \frac{\sigma\phi\alpha}{\epsilon\phi\alpha + \sigma\phi\alpha} = \sigma\upsilon\nu^2\alpha$$

67. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{\epsilon\phi\alpha + \sigma\phi\beta}{\epsilon\phi\beta + \sigma\phi\alpha} = \frac{\sigma\phi\beta}{\sigma\phi\alpha}$$

$$\beta) \frac{1 - \epsilon\phi\alpha}{1 + \epsilon\phi\alpha} = \frac{\sigma\phi\alpha - 1}{\sigma\phi\alpha + 1}$$

$$\gamma) \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \eta\mu\alpha} + \frac{1 + \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$$

68. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{array}{ll} \alpha) \eta\mu^4\alpha + \eta\mu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 & \beta) \frac{1 - 2\eta\mu^2\alpha}{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1} = 1 \\ \gamma) (1 + \sigma\varphi\alpha)^2 + (1 - \sigma\varphi\alpha)^2 = \frac{2}{\eta\mu^2\alpha} & \delta) \frac{\eta\mu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha \cdot \eta\mu^2\alpha}{1 - \eta\mu^2\alpha} = 1 \end{array}$$

69. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 - \eta\mu\alpha} - \frac{1 - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = 2\varepsilon\varphi\alpha \quad \beta) \frac{\eta\mu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{\eta\mu\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{2}{\eta\mu\alpha}$$

70. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) 1 - \frac{\eta\mu^2\chi}{1 + \sigma\upsilon\nu\chi} = \sigma\upsilon\nu\chi \quad \beta) 1 - \frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi}{1 + \eta\mu\chi} = \eta\mu\chi$$

71. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \varepsilon\varphi\chi + \sigma\varphi\chi = \frac{1}{\eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi} \quad \beta) \varepsilon\varphi^2\chi + \sigma\varphi^2\chi + 2 = \frac{1}{\eta\mu^2\chi \cdot \sigma\upsilon\nu^2\chi}$$

72. Αν $\chi = 3\eta\mu\theta$ και $\psi = 2\sigma\upsilon\nu\theta$ να δείξετε ότι $\frac{\chi^2}{9} + \frac{\psi^2}{4} = 1$.

73. Για ποιες τιμές του κ υπάρχει γωνία ω , ώστε να ισχύει:

$$\eta\mu\omega = \frac{\kappa - 3}{\kappa + 3} \text{ και } \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3\kappa}{\kappa + 3}.$$

74. Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} \chi \cdot \eta\mu\theta - \psi \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \eta\mu\theta \\ \chi \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + \psi \cdot \eta\mu\theta = \sigma\upsilon\nu\theta \end{cases}$$

- α) Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε γωνία θ .
β) Να λύσετε το σύστημα.

- 75.** Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\sin\theta + \eta\mu\theta)x + \sin\theta \cdot \eta\mu\theta = 0$ με $\eta\mu\theta \neq \sin\theta$
 α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
 β) Αν χ_1, χ_2 οι ρίζες της εξίσωσης, να δείξετε ότι: $\chi_1^2 + \chi_2^2 = 1$

- 76.** Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\eta\mu\alpha \cdot x + 1 - \sin\alpha = 0$ με $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
 α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
 β) Αν χ_1, χ_2 οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε το $\eta\mu\alpha$ ώστε $\chi_1^2 + \chi_2^2 = 2$

77. Να δείξετε ότι:

$$\begin{vmatrix} \frac{\sin\chi}{\sqrt{2}} & -\frac{\eta\mu\chi}{\sqrt{2}} \\ \frac{\eta\mu\chi}{\sqrt{2}} & \frac{\sin\chi}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

- 78.** Αν $\psi = 6\eta\mu\chi + 8\sin\chi$, να δείξετε ότι $\psi \in [-10, 10]$.

3.3. Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

- 79.** Να αποδείξετε ότι:

- | | |
|---|---|
| i) $\sin(90^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$ | ii) $\cos(90^\circ + \omega) = -\sigma\phi\omega$ |
| iii) $\sigma\phi(90^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$ | iv) $\eta\mu(270^\circ - \omega) = -\sin\omega$ |
| v) $\sin(270^\circ - \omega) = -\eta\mu\omega$ | vi) $\eta\mu(270^\circ + \omega) = -\sin\omega$ |

- 80.** Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

- | | |
|---|--|
| i) $\eta\mu(3\pi + \alpha) = \dots\dots\dots$ | ii) $\sin(3\pi - \alpha) = \dots\dots\dots$ |
| iii) $\eta\mu(5\pi + \alpha) = \dots\dots\dots$ | iv) $\eta\mu(7\pi - \alpha) = \dots\dots\dots$ |
| v) $\sin(9\pi + \alpha) = \dots\dots\dots$ | vi) $\cos(11\pi - \alpha) = \dots\dots\dots$ |
| vii) $\eta\mu(8\pi - \alpha) = \dots\dots\dots$ | viii) $\sin(10\pi - \alpha) = \dots\dots\dots$ |
| ix) $\cos(4\pi - \alpha) = \dots\dots\dots$ | x) $\sigma\phi(5\pi - \alpha) = \dots\dots\dots$ |

81. Να δείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{\sin(\pi - \chi) \cdot \sin(\pi + \chi)}{\eta\mu(\frac{\pi}{2} - \chi) \cdot \eta\mu(\pi - \chi)} = \sigma\varphi\chi \quad \beta) \frac{\varepsilon\varphi(\pi + \chi) \cdot \varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2} - \chi)}{\sigma\varphi(\pi - \chi) \cdot \varepsilon\varphi(-\chi)} = 1$$

82. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \eta\mu^2 26^\circ + \eta\mu^2 34^\circ + \eta\mu^2 64^\circ + \eta\mu^2 56^\circ = 2$$

$$\beta) \varepsilon\varphi \frac{\pi}{7} \cdot \varepsilon\varphi \frac{3\pi}{7} \cdot \varepsilon\varphi \frac{5\pi}{14} \cdot \varepsilon\varphi \frac{\pi}{14} = 1$$

83. Να δείξετε ότι:

$$\varepsilon\varphi(\pi + \chi) \cdot \sigma\varphi(\pi - \chi) + 3\eta\mu^2(-\chi) = 2$$

84. Να δείξετε ότι:

$$\eta\mu^2(2\pi - \chi) + \eta\mu^2(\frac{3\pi}{2} + \chi) + \varepsilon\varphi \frac{3\pi}{5} \cdot \sigma\varphi \frac{2\pi}{5} = 0$$

85. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) A = \frac{\eta\mu(\frac{3\pi}{2} - \theta) \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + \theta) \cdot \varepsilon\varphi(2\pi - \theta)}{\sin(\frac{5\pi}{2} + \theta) \cdot \sigma\varphi(-\theta) \cdot \sigma\varphi(\frac{\pi}{2} + \theta)}$$

$$\beta) B = \frac{\eta\mu(2\pi + \theta) \cdot \sigma\varphi(\frac{3\pi}{2} - \theta) \cdot \sin(3\pi + \theta)}{\sin(\frac{3\pi}{2} + \theta) \cdot \varepsilon\varphi(\pi + \theta) \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + \theta)}$$

86. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{\varepsilon\varphi(\pi - \theta) \cdot \sigma\varphi(\pi + \theta) \cdot \varepsilon\varphi(-\theta) \cdot \varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\varepsilon\varphi(\pi + \theta) \cdot \sigma\varphi(\pi - \theta) \cdot \sigma\varphi\theta \cdot \varepsilon\varphi(2\pi - \theta)} = 1$$

$$\beta) \frac{\eta\mu(\pi - \theta) \cdot \eta\mu(\frac{3\pi}{2} - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi - \theta) \cdot \epsilon\phi(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\eta\mu(\frac{\pi}{2} + \theta) \cdot \eta\mu(2\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi + \theta) \cdot \epsilon\phi(\frac{3\pi}{2} + \theta)} = 1$$

87. Αν Α,Β,Γ γωνίες τριγώνου , να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \eta\mu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2(B + \Gamma) = 1 \qquad \beta) \eta\mu^2 \frac{A}{2} + \eta\mu^2 \frac{B + \Gamma}{2} = 1$$

$$\gamma) \epsilon\phi \frac{A}{2} \cdot \epsilon\phi \frac{B + \Gamma}{2} = 1 \qquad \delta) \epsilon\phi A \cdot \sigma\phi(B + \Gamma) = -1$$

88. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) A = \frac{\eta\mu \frac{3\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3} - \eta\mu \frac{5\pi}{6}}{\eta\mu \frac{5\pi}{4} - \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{3} - \eta\mu \frac{7\pi}{6}}$$

$$\beta) B = \frac{\eta\mu 135^\circ - \epsilon\phi 225^\circ + \sigma\upsilon\nu 120^\circ}{\eta\mu 225^\circ + \sigma\phi 135^\circ + \sigma\upsilon\nu 240^\circ}$$

3.3. Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

89. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\begin{array}{lll} \alpha) f(x) = \eta\mu x + 2 & \beta) f(x) = \sigma\upsilon\nu x - 3 & \gamma) f(x) = 2\eta\mu x \\ \delta) f(x) = -3\sigma\upsilon\nu x & \epsilon) f(x) = -1 + 3\eta\mu 2x & \sigma\tau) f(x) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} + 1 \end{array}$$

90. Αν η γραφική παράσταση της $f(x) = 3\eta\mu^2 x$ διέρχεται από το σημείο $A(-\frac{\pi}{2}, 6)$

- α) Να βρείτε το α
- β) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της f
- γ) Να δείξετε ότι η f είναι άρτια

91. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu 4x + 3\sigma\upsilon\nu 6x$ είναι περιοδική και έχει περίοδο $T = \pi$
Στην συνέχεια να βρείτε την ελάχιστη και μέγιστη τιμή της.

92. Να μελετηθούν και να παρασταθούν γραφικά οι παρακάτω συναρτήσεις σε πλάτος μιας περιόδου
α) $f(x) = 2\eta\mu 3x$ β) $f(x) = -4\sigma\upsilon\nu 2x - 1$

93. Αν $0 < \chi_1 < \chi_2 < \pi$ να συγκριθούν οι αριθμοί:

α) $\sigma\varphi \frac{\pi - \chi_1}{3}$ και $\sigma\varphi \frac{\pi - \chi_2}{3}$.

β) $\sigma\upsilon\nu \frac{\chi_1}{4}$ και $\sigma\upsilon\nu \frac{\chi_2}{4}$

94. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \eta\mu(\frac{2x}{3}) + \beta$ με $\chi \in \mathbb{R}$ και $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Αν η f έχει μέγιστη τιμή το 3 και η γραφική της παράσταση τέμνει τον $\psi\psi$ στο 1, να βρείτε τον τύπο της f .

95. Ένα σώμα κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι και απέχει από το πάτωμα 2 m. Όταν το σώμα ανεβοκατεβαίνει, το ύψος του από το πάτωμα σε μέτρα δίνεται από τον τύπο $h(t) = 2 + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi t}{3}$, όπου t ο χρόνος σε sec.

α) Να υπολογίσετε τη διαφορά ανάμεσα στο μέγιστο και στο ελάχιστο ύψος.

β) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $0 \leq t \leq 6$

3.4. Τριγωνομετρικές εξισώσεις

96. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $\eta\mu\chi = -\eta\mu 25^\circ$

β) $\eta\mu\chi = \eta\mu(2\chi + 20^\circ)$

γ) $3\eta\mu\chi + 5 = 0$

δ) $\sigma\upsilon\nu(\chi + 50^\circ) = \eta\mu(\chi + 20^\circ)$

ε) $\sigma\upsilon\nu\chi = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ$

97. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $2\sigma\upsilon\nu 3\chi - 1 = 0$

β) $2\eta\mu(\chi - \frac{\pi}{4}) - 1 = 0$

γ) $3\varepsilon\varphi(2\chi - \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3} = 0$

δ) $\sqrt{2}\sigma\varphi\chi - \sqrt{6} = 0$

98. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $\eta\mu\chi = -\frac{1}{2}$

β) $\sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

γ) $\varepsilon\varphi\chi = -1$

δ) $\sigma\varphi\chi = -\sqrt{3}$

99. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu 2\chi = \eta\mu(2\chi + \frac{\pi}{3})$

β) $\sigma\upsilon\nu 3\chi = \sigma\upsilon\nu(3\chi - \frac{\pi}{4})$

γ) $\varepsilon\varphi(\chi - \frac{\pi}{3}) - \varepsilon\varphi(3\chi + \frac{\pi}{6}) = 0$

δ) $\sigma\varphi\pi\chi - \sigma\varphi(2\pi\chi - \frac{\pi}{3}) = 0$

100. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $\eta\mu 2\chi = \sigma\upsilon\nu\chi$

β) $\eta\mu(2\chi - \frac{\pi}{3}) = -\sigma\upsilon\nu\chi$

γ) $\epsilon\varphi(3\chi - \frac{\pi}{3}) + \sigma\varphi(\chi - \frac{\pi}{6}) = 0$

δ) $\sigma\varphi(\chi - \frac{\pi}{4}) + \epsilon\varphi(\chi + \frac{\pi}{4}) = 0$

101. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu\chi \cdot (\sigma\upsilon\nu\chi - 1) = 0$

β) $\sigma\upsilon\nu\chi \cdot (\eta\mu\chi - 1) = 0$

γ) $\eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi = 1 + \sigma\upsilon\nu\chi$

δ) $2\eta\mu\chi \cdot \epsilon\varphi 2\chi - 3 = 2\eta\mu\chi - 3\epsilon\varphi 2\chi$

ε) $2\eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi - 2\sqrt{2}\eta\mu\chi - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\chi + \sqrt{6} = 0$

στ) $2\eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi = \sqrt{3}\eta\mu\chi$

102. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\eta\mu^2\chi = \frac{3}{4}$ β) $4\sigma\upsilon\nu^2\chi - 1 = 0$

γ) $\epsilon\varphi^2\chi - 3 = 0$ δ) $3\sigma\varphi^2\chi - 1 = 0$

103. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2\eta\mu^2\chi - \eta\mu\chi - 1 = 0$

β) $4\sigma\upsilon\nu^2\chi - 4\sigma\upsilon\nu\chi + 1 = 0$

γ) $\sigma\upsilon\nu^2\chi - 7\eta\mu^2\chi + 1 = 0$

δ) $2\sigma\upsilon\nu^2\chi + \sqrt{3}\eta\mu\chi + 1 = 0$

ε) $3\sigma\upsilon\nu^2\chi + 2 = \eta\mu^2\chi + 4\sigma\upsilon\nu\chi$

στ) $\epsilon\varphi^2\chi - (1 - \sqrt{3})\epsilon\varphi\chi - \sqrt{3} = 0$

ζ) $3\sigma\varphi^2\chi - 4\sqrt{3}\sigma\varphi\chi + 3 = 0$

104. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $|\eta\mu\chi| = |\sigma\upsilon\nu\chi|$

β) $\sigma\phi\chi = 2\sigma\upsilon\nu\chi$

γ) $3\epsilon\phi\chi = \eta\mu\chi$

δ) $\epsilon\phi\chi + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi} = \sigma\upsilon\nu\chi$

ε) $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} = 2\epsilon\phi\chi$

στ) $\eta\mu\chi - \frac{1}{\eta\mu\chi} = \sigma\phi\chi$

105. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις στα αντίστοιχα διαστήματα

α) $\epsilon\phi\chi = \sqrt{3}$, στο $[0, 2\pi)$

β) $\sigma\upsilon\nu 2\chi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, στο $[2\pi, 4\pi]$

γ) $\sqrt{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi\chi}{2} + 1 = 0$, στο $[-1, 3]$

106. Οι ετήσιες πωλήσεις ενός βιομηχανικού προϊόντος (σε εκατοντάδες κομμάτια) δίνονται από τον τύπο $S = 50 + 10\eta\mu \frac{\pi t}{6}$,

όπου t ο χρόνος σε έτη με $t = 1$ να αντιστοιχεί στο 2001 και $0 \leq t \leq 20$.

α) Να βρείτε ποιο έτος οι πωλήσεις είναι 5.500 κομμάτια

β) Να βρείτε ποιο έτος έχουμε το μεγαλύτερο αριθμό πωλήσεων και πόσες είναι αυτές.

3.5. Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

107. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω εξισώσεων:

α) $\sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{7} \sigma\upsilon\nu \frac{13\pi}{14} - \eta\mu \frac{4\pi}{7} \eta\mu \frac{13\pi}{14}$

β) $\eta\mu 35^\circ \sigma\upsilon\nu 10^\circ + \sigma\upsilon\nu 35^\circ \eta\mu 10^\circ$

γ) $\frac{\sigma\upsilon\nu \frac{13\pi}{4}}{\eta\mu \frac{3\pi}{7}} - \frac{\eta\mu \frac{13\pi}{4}}{\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{7}}$

δ) $\eta\mu 5^\circ \eta\mu 50^\circ + \eta\mu 85^\circ \eta\mu 40^\circ$

ε) $\frac{\varepsilon\varphi \frac{13\pi}{7} - \varepsilon\varphi \frac{6\pi}{7}}{1 + \varepsilon\varphi \frac{13\pi}{7} \varepsilon\varphi \frac{6\pi}{7}}$

στ) $\frac{\sigma\varphi 10^\circ \sigma\varphi 70^\circ + 1}{\sigma\varphi 10^\circ - \sigma\varphi 70^\circ}$

108. Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών:

α) 195° β) $\frac{11\pi}{12}$ rad

109. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $\eta\mu 7\chi \sigma\upsilon\nu 3\chi - \sigma\upsilon\nu 7\chi \eta\mu 3\chi$

β) $\eta\mu(\chi+10^\circ) \sigma\upsilon\nu(20^\circ - \chi) + \eta\mu(80^\circ - \chi) \sigma\upsilon\nu(\chi+70^\circ)$

110. Αν $\eta\mu\alpha = \frac{3}{5}$ με $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\beta = -\frac{12}{13}$ με $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών $\alpha+\beta$ και $\alpha-\beta$.

111. Αν $\eta\mu\alpha = \frac{15}{17}$ με $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ και $\varepsilon\varphi\beta = -\frac{5}{12}$ με $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$ και $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)$.

112. Αν $\eta\mu\chi + \eta\mu\psi = \kappa$ και $\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\psi = \lambda$, τότε:

α) Να δείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu(\chi - \psi) = \frac{\kappa^2 + \lambda^2 - 2}{2}$

β) Για $\kappa = -\sqrt{2}$ και $\lambda = 1$ να βρείτε τη διαφορά $\chi - \psi$

113. Να αποδείξετε ότι:

α) $\epsilon\phi(45^\circ - \omega) = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega}$

β) $\epsilon\phi(\alpha + \beta) \cdot \epsilon\phi(\alpha - \beta) = \frac{\epsilon\phi^2\alpha - \epsilon\phi^2\beta}{1 - \epsilon\phi^2\alpha \cdot \epsilon\phi^2\beta}$

114. Να αποδείξετε ότι:

α) $\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu(120^\circ + \chi) + \sigma\upsilon\nu(240^\circ + \chi) = 0$

β) $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \cdot \eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\beta$

γ) $(\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi) \cdot \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} + \chi\right) = \sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi$

δ) $\eta\mu(\chi - \psi) + \sigma\upsilon\nu(\chi + \psi) = (\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi) \cdot (\sigma\upsilon\nu\psi - \eta\mu\psi)$

115. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{2\eta\mu(\alpha - \beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)} = \epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta$

β) $\frac{2\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)}{\eta\mu(\alpha + \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta)} = \sigma\phi\alpha + \sigma\phi\beta$

116. Να δείξετε ότι η παράσταση $A = \frac{\eta\mu(\alpha + \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)}{\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha}$ είναι ανεξάρτητη του α .

117. Αν $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ και $\epsilon\phi\alpha = \frac{1}{3}$ να βρεθεί η $\epsilon\phi\beta$

118. Αν $\alpha - \beta = 60^\circ$ και $\epsilon\phi\beta = \frac{2}{3}$ να υπολογίσετε την $\epsilon\phi\alpha$.

119. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$, να αποδείξετε ότι:

α) $\epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta + \epsilon\phi\beta \cdot \epsilon\phi\gamma + \epsilon\phi\gamma \cdot \epsilon\phi\alpha = 1$

β) $\sigma\phi\alpha + \sigma\phi\beta + \sigma\phi\gamma = \sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta\sigma\phi\gamma$

120. Αν $\alpha + \beta = \gamma$, να δείξετε ότι: $\epsilon\phi\gamma - \epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta = \epsilon\phi\alpha\epsilon\phi\beta\epsilon\phi\gamma$

121. Αν για τις γωνίες ενός τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει $\sigma\phi A = 3$ και $\sigma\phi B = 2$, να δείξετε ότι $\Gamma = 135^\circ$

122. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Να δείξετε ότι:

$$\epsilon\phi^2 A + \epsilon\phi^2 B + \epsilon\phi^2 \Gamma = \epsilon\phi^2 A \cdot \epsilon\phi^2 B \cdot \epsilon\phi^2 \Gamma$$

123. Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\eta\mu(A-B) = 1 - 2\sigma\upsilon\nu A \cdot \eta\mu B$, να δείξετε ότι αυτό είναι ορθογώνιο.

124. Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\sigma\upsilon\nu(A+B) = 1 - 2\eta\mu A \cdot \eta\mu B$, να δείξετε ότι αυτό είναι ισοσκελές.

125.** Έστω οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και $\epsilon\phi A$, $\epsilon\phi B$ οι ρίζες της εξίσωσης: $\chi^2 - 2004\chi + 2004\sqrt{3} + 1 = 0$

α) Να δείξετε ότι $\epsilon\phi(A+B) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

β) Να βρείτε τη γωνία Γ

126. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\eta\mu(\chi + \frac{\pi}{6}) = 2\sigma\upsilon\nu\chi$

β) $\sigma\phi(\chi + \frac{\pi}{4}) + \sigma\phi(\chi - \frac{\pi}{4}) = 2\epsilon\phi\chi$

$$\gamma) \frac{\eta\mu(\chi + \frac{\pi}{3})}{\sigma\upsilon\nu(\chi + \frac{\pi}{3}) + \sigma\upsilon\nu(\chi - \frac{\pi}{3})} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3.6. Τριγωνομετρικοί αριθμοί διπλάσιας γωνίας

127. Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

α) $2\eta\mu\frac{\pi}{12}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}$

β) $2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{8}-1$

γ) $1 - \eta\mu^2 135^\circ$

δ) $\frac{2 \varepsilon\varphi \frac{\pi}{8}}{1 - \varepsilon\varphi^2 \frac{\pi}{8}}$

128. Αν $\eta\mu\alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = \eta\mu 2\alpha + 2\sigma\upsilon\nu 2\alpha$

β) $B = 3\eta\mu\frac{\alpha}{2} + 4\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$

129. Αν $\eta\mu\alpha = -\frac{4}{5}$, $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, $\sigma\upsilon\nu\beta = \frac{3}{5}$, $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

α) $\eta\mu(2\alpha + \beta)$

β) $\varepsilon\varphi(\alpha + 2\beta)$

130. Αν $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{4})$, $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{1}{7}$ και $\varepsilon\varphi\beta = \frac{1}{3}$, να δείξετε ότι

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$$

131. Αν $25\eta\mu^2\chi + 5\eta\mu\chi - 12 = 0$ και $\pi < \chi < \frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε τους

παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:

α) $\eta\mu 2\chi$, $\sigma\upsilon\nu 2\chi$, $\epsilon\varphi 2\chi$, $\sigma\varphi 2\chi$

β) $\eta\mu 4\chi$, $\sigma\upsilon\nu 4\chi$, $\eta\mu 8\chi$ και $\eta\mu \frac{\chi}{2}$

132. Αν $\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{5}$, να υπολογίσετε το $\eta\mu 2\alpha$.

133. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{2\eta\mu\alpha - \eta\mu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \epsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2}$

β) $\frac{\eta\mu 2\alpha + \eta\mu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \epsilon\varphi\alpha$

134. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \sigma\varphi\alpha$

β) $\frac{1 + \eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \epsilon\varphi \frac{\alpha}{2}$

γ) $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \epsilon\varphi \frac{\alpha}{2}$

δ) $\frac{\eta\mu 4\theta}{1 + \sigma\upsilon\nu 4\theta} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu 2\theta}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\theta} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1 + \sigma\upsilon\nu\theta} = \epsilon\varphi \frac{\theta}{2}$

135. Να δείξετε ότι :

$$\sigma\upsilon\nu\alpha(\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta) + \eta\mu\alpha(\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta) = 2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\alpha + \beta}{2}$$

136. Να δείξετε ότι:

α) $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{7} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{7} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$

$$\beta) \sin \frac{\pi}{17} \cdot \sin \frac{2\pi}{17} \cdot \sin \frac{4\pi}{17} \cdot \sin \frac{8\pi}{17} = \frac{1}{16}$$

137. Να δείξετε ότι: $\sin^4 \frac{\pi}{12} + \eta\mu^4 \frac{\pi}{12} = \frac{7}{8}$

138. Να δείξετε ότι: $\frac{3-4\sin 2\theta + \sin 4\theta}{3+4\sin 2\theta + \sin 4\theta} = \varepsilon\varphi^4 \theta$

139. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $\eta\mu 2\chi + \sin \chi = 0$

β) $\eta\mu 2\chi = \sqrt{3} \eta\mu \chi$

γ) $\sin 2\chi + \eta\mu^2 \chi = 0$

δ) $\sin 2\chi - 2\sin^2 \frac{\chi}{2} + 1 = 0$

ε) $\sin 2\chi - 5\sin \chi + 3 = 0$

140. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\sin \frac{A}{2} = 2\eta\mu \frac{B}{2} \sin \frac{\Gamma}{2}$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

141. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu \chi - \sqrt{3} \sin \chi = 2$

β) $\sqrt{2} \eta\mu 2\chi + \sqrt{2} \sin 2\chi = 1$

Επαναληπτικά Θέματα

142. Για τη γωνία α ισχύει: $5\sin 2\alpha - 14\sin \alpha - 7 = 0$.

α) Να δείξετε ότι $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$

β) Αν επιπλέον ισχύει $\pi \leq \alpha \leq 3\pi/2$ να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu 2\alpha$, $\sin 2\alpha$ και $\varepsilon\varphi 2\alpha$.

(2ο Θέμα 2000)

143. α) Για κάθε πραγματικό αριθμό χ να αποδείξετε ότι:

$$\sin \chi \cdot (\eta \mu 2\chi + 4\eta \mu \chi) = (\sin 2\chi + 4\sin \chi + 1) \cdot \eta \mu \chi$$

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\sin 2\chi + 4\sin \chi + 1 = 0$

(2ο Θέμα 2003)

144. α) Να λύσετε την εξίσωση: $\eta \mu 2\chi - \sqrt{3} \sin \chi = 0$

β) Να αποδείξετε ότι : $\frac{1 - \sin 2\alpha}{2\eta \mu \alpha + \eta \mu 2\alpha} = \varepsilon \varphi \frac{\alpha}{2}$, για όλες τις τιμές του α

που ορίζεται η ισότητα.

(2ο Θέμα 2004)

145.** Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{\sin \chi + 1}{\eta \mu \chi}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή

γ) Να λύσετε την εξίσωση : $f(\chi) = \eta \mu \chi$

146.** Έστω $(\eta \mu \alpha + \eta \mu \beta)^2 = \frac{5}{2}$ και $(\sin \alpha + \sin \beta)^2 = \frac{1}{2}$

α) Να δείξετε ότι: $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$

β) Αν $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ και $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ τότε να δείξετε:

i) $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$

ii) $\varepsilon \varphi \alpha (1 - \sqrt{3} \varepsilon \varphi \beta) = \sqrt{3} + \varepsilon \varphi \beta$

147.** Αν ισχύει: $4\eta \mu 2\alpha - 3\sin 2\alpha = 3$, $\sin \alpha \neq 0$

α) Να δείξετε ότι : $\varepsilon \varphi \alpha = \frac{3}{4}$

β) Να υπολογίσετε τα $\sin 2\alpha$ και $\eta \mu 2\alpha$

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $\varepsilon \varphi(\chi - \alpha) = \frac{1}{7}$

148.** Έστω η συνάρτηση: $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin x + \eta \mu x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) Να δείξετε ότι: $f(x) = \sin x - \eta \mu x$

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + f(-x) = 2\eta \mu \frac{x}{2} + 2$

4ο Κεφάλαιο

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

A. Βασικές Γνώσεις

149. Να βρείτε τα κ, λ, μ ώστε τα πολυώνυμα $P(x) = (\kappa-1)x^3 - 3x - \mu$ και $Q(x) = (\lambda-\mu)x + \mu - 1$ να είναι ίσα.

150. Να βρείτε το λ ώστε τα πολυώνυμα $P(x) = (\lambda-1)x^3 + (\lambda^2 - 5\lambda)x + 2\lambda$ και $Q(x) = (\lambda^2 - 1)x^2 - 4x + \lambda^3 + 1$ να είναι ίσα.

151. Να βρεθούν οι τιμές του κ , ώστε το πολυώνυμο $Q(x) = (\kappa^2 - 4)x^3 + (\kappa^2 - 5\kappa + 6)x^2 + (\kappa^3 - 8)x + 2\kappa - 4$ να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

152. Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda-3)x^3 + (\lambda^2 - 9)x^2 + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)x + \lambda$ να είναι σταθερό.

153. Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου $P(x) = (4\lambda^3 - 9\lambda)x^3 + (4\lambda^2 - 9)x^2 - 2\lambda + 3$ για τις διάφορες τιμές του λ .

154. Αν το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^3 - 100\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 10\lambda)x + 10\lambda - 1$ είναι πρώτου βαθμού, να βρείτε το λ .

155. Να βρείτε το α ώστε το πολυώνυμο $P(x)=16\alpha^2 x^3+8\alpha x^2-2x-\alpha$ να έχει ρίζα το $-\frac{1}{2}$.

156. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε το πολυώνυμο $P(x)=27\alpha^2 x^3-18\alpha x^2-3x+\beta-1$ να έχει ρίζες τους αριθμούς 0 και $-\frac{1}{3}$.

157. Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε για το πολυώνυμο $Q(x)=(2\beta+\alpha)x^3+\alpha x^2+(\alpha+\beta-x)(\alpha-\beta)$ να ισχύουν $Q(0)=0$ και $Q(1)=1$

158. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 - 9x^2 + 12x + \beta$ να έχει άθροισμα συντελεστών 4 και ρίζα το 2.

159. Αν $P(x) = 2x^2 - 3x$ και $Q(x) = -2x^2 + x - 2$ να βρείτε τα πολυώνυμα:
α) $P(x)+Q(x)$
β) $2P(x)-3Q(x)$
γ) $P(x) \cdot Q(x)$
δ) $(P(x))^2$

160. Έστω τα πολυώνυμα $P(x) = x^2 - 3x + 1$ και $Q(x) = 2x - 1$
Να βρείτε τα παρακάτω πολυώνυμα και το βαθμό τους:
α) $P(Q(x))$ β) $Q(P(x))$ γ) $Q(Q(x))$

161. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει $P(3x-2) = 9x^2 - 6x + 2$ να βρείτε το $P(x)$.

162. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το -2 να δείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x) = 2P(3x+1) + (x^2 + x)P(x+1)$ έχει ρίζα το -1 .

163. Αν η αριθμητική τιμή του $P(x)$ για $x=-1$ είναι 2 , να δείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x) = P(x^2 - 3x - 5) + 3P(x+4) + 3xP(1-2x) - 2$ έχει ρίζα το -1 .

164. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ ώστε να ισχύει:
 $(2x-3)P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 17x + 12$.

165. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$, 2ου βαθμού με ρίζες 0,-2 και να ισχύει $P(-1) = 3$

166. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:
 $[P(x)]^2 + 2P(x) = 4x^2 - 1$

B. Διαίρεση Πολυωνύμων

167. Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης σε κάθε περίπτωση:

α) $(6x^3 - x^2 - 14x + 5) : (2x - 1)$

β) $(x^4 - x^2 + 1) : (x^2 + x + 1)$

γ) $(3x^3 - 2x^2 - 3x + 2) : (3x - 2)$

δ) $(2x^4 - 5x^2 + 3) : (2x^2 - 3)$

168. Έστω το πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο όταν το διαιρέσουμε με το $3x^2 + 5$ δίνει πηλίκο $x^2 - 3$ και υπόλοιπο $2x - 1$.

α) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$

β) Να βρείτε την τιμή $P(-1)$

169. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 - \alpha x^2 + 3\alpha x - 2\alpha^2$. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : 2x + \alpha$ είναι 8 , να βρείτε το $\alpha > 0$ και το πηλίκο της διαίρεσης.

170. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει $P(1)=4$ και $P(-\frac{1}{2})=1$, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το πολυώνυμο $2x^2-x-1$.

171. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει $P(0)=0$, $P(1)=2$ και $P(-1)=3$ να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το x^3-x .

172. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το $x-2$ αφήνει υπόλοιπο 3 και διαιρούμενο με το $x-5$ δίνει υπόλοιπο 7. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2-3x-10$.

173. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με τα x , $x+1$, $x-1$ αφήνει υπόλοιπα 1, 2, 3 αντίστοιχα. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το x^3-x .

174. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+2$ είναι 2 να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $Q(x)=P(9x+7)+x^3-10$ με το $x+1$.

175. Αν το πολυώνυμο $P(x)=x^3-ax^2+bx+a^2-1$ έχει παράγοντες τους x και $x+1$, να βρείτε τα a και b .

176. Αν το πολυώνυμο $P(x)=x^3-ax^2+bx+2a$ έχει παράγοντα το x^2+2x-3 , να βρείτε τα a και b .

177. Να βρείτε το λ ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)=(2\lambda-1)x^2-(\lambda+3)x+4\lambda-3$ με το $x+2$ να είναι 4.

178. Να βρείτε τα a και b ώστε το $P(x)=ax^3-(a+b)x+b-4$ να έχει παράγοντα το $(x+1)(x-3)$.

179. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner , να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=x^3-3x^2+4$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(x-2)^2$.

180. Να βρείτε τα α και β ώστε το $P(x)=\alpha x^3-5x^2+\beta x+9$ να έχει παράγοντα το $(x-3)^2$.

181. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3-5x^2-6x+9$ διαιρείται με το $(x-1)(x-3)$ και να βρείτε το αντίστοιχο υπόλοιπο.

182. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^3-2\alpha x+\beta^2-1$ το οποίο έχει παράγοντα το x και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$ είναι 3.

α) Να βρείτε τα α και β .

β) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$.

Γ. Πολυωνυμικές εξισώσεις – ανισώσεις

183. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^3+2x^2-3=0$

β) $2x^3-3x^2-3x+2=0$

γ) $2x^4+5x^3-5x-2=0$

δ) $8x^2(x^2-7x+12)=32(x-3)(x-4)$

ε) $\frac{1}{2}x^3-\frac{8}{3}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{3}=0$

184. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2x^5=32x^3$

β) $16x^4-1=0$

γ) $x^{10}-1024=0$

δ) $(x+2)^3+27=0$

ε) $x^6+x^3-2=0$

185. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις δεν έχουν ακέραιες ρίζες:

α) $x^3 + x - 3 = 0$ β) $x^4 - 3x - 2 = 0$

186. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ με τον άξονα $x'x$.

187. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = 2x^3 + 7x^2$ και $g(x) = x^4 + 8x + 12$

188. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 + 5x^2$ με την ευθεία $\psi = 4x + 3$

189. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $x^3 - 21x + 20 > 0$

β) $3x^3 + 3x^2 + 10 > x^4 + 15x$

γ) $-x^3 + 3x + 2 < 0$

δ) $4x^4 - 8x^3 + 5x^2 - x \geq 0$

ε) $x^3 + x^2 > 5x - 3$

στ) $x^4 - 2 \leq x(1-x) - x^3$

190. Να βρείτε τα διαστήματα του x για τα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x - 1$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

191. Να βρείτε τα διαστήματα του x για τα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^4 + 6x$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2x^3 + 2x^2 + 3$.

Δ. Εξισώσεις και Ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

192. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\eta\mu^3\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi + \eta\mu\chi + 2 = 0$

β) $\frac{3\chi^2+1}{\chi-1} + \frac{4}{\chi-\chi^2} = \frac{\chi^2-3\chi+2}{\chi}$

γ) $\sqrt{5\chi+10} = 8-\chi$

δ) $\sqrt{\chi+2} + 2 = \sqrt{\chi-6}$

ε) $\sqrt{\chi+3} + \sqrt{3\chi-2} = 7$

193. Να λύσετε την παρακάτω ανίσωση:

$$\chi^2 + \frac{3\chi^2 - \chi - 1}{\chi - 1} - \frac{\chi^2 - 2}{\chi - \chi^2} > 0$$

Ε. Επαναληπτικά Θέματα

194. Δίνεται το πολυώνυμο $P(\chi) = \alpha\chi^3 + (\beta-1)\chi^2 - 3\chi - 2\beta + 6$.

α) Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(\chi)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(\chi)$ με το $\chi+1$ είναι ίσο με 2, τότε να δείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=4$.

β) Για τις τιμές των α και β που βρήκατε να λύσετε την εξίσωση $P(\chi)=0$

(2ο Θέμα 2000)

195. Δίνεται το πολυώνυμο $P(\chi) = \kappa\chi^3 - (\kappa+\lambda)\chi^2 + \lambda\chi + 1$.

α) Αν $P(-\frac{1}{2})=7$ και $P(-1)=23$, να δείξετε ότι $\kappa=-6$ και $\lambda=-5$

β) Να γίνει η διαίρεση του $P(\chi)$, για $\kappa=-6$ και $\lambda=-5$, με το πολυώνυμο $2\chi+1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

γ) Να λυθεί η ανίσωση $P(\chi) > 7$, για $\kappa=-6$ και $\lambda=-5$.

(3ο Θέμα 2002)

196. Για το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 8x^3 + (5\alpha - 1)x^2 + 8x - 3\alpha - 6$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x^2 - 1$ και να γράψετε τη σχετική ταυτότητα.

β) Να βρείτε την τιμή του α , ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.

γ) Για $\alpha = 3$, να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$ καθώς και τα διαστήματα του x για τα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(3ο Θέμα 2004)

197. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - (\alpha + 3)x^2 + (2\beta + 1)x - 2\alpha$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Αν ο αριθμός 2 είναι ρίζα του $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$ είναι -18, να βρεθούν τα α και β .

β) Για $\alpha = 2$ και $\beta = \frac{7}{2}$

i) Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$

ii) Να γίνει η διαίρεση του $P(x)$ δια του πολυωνύμου $x^2 + 1$ και να γραφεί το $P(x)$ με την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

iii) Να λυθεί η ανίσωση $P(x) \geq 7x + 1$.

198. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν το $P(x)$ έχει παράγοντες τους $x + 1$, $x - 2$

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -3$ και $\beta = 0$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

γ) Έστω C η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$. Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου στο οποίο η C τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$.

ii) τις τιμές του x για τις οποίες η C βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

199. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 20$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$ είναι -16, να δείξετε ότι $\alpha = 12$ και $\beta = 6$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$

- 200***. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 2\lambda)x^2 - \lambda + 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α) Να βρείτε το βαθμό του $P(x)$ για τις διάφορες τιμές του λ .
 - β) Για $\lambda = 1$, να βρείτε το $P(x)$ και να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ διέρχεται από το σημείο $(1, -3)$.
 - γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < -3$.

- 201.** Έστω το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - \alpha x + \beta$.
- Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 - 4$ είναι το $3x - 2$
- α) Να βρείτε τα α και β .
 - β) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης
 - γ) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης
 - δ) Να βρείτε τα διαστήματα του x για τα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται πάνω από την ευθεία $\varepsilon: \psi = 3x - 2$

- 202.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{2x^3 - 3x^2 - 3x + 2}$
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
 - β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f
 - γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > x^2$

ΣΤ. Συνδυαστικά Τριγωνομετρίας – Πολυωνύμων

- 203**.** Αν το πολυώνυμο $P(x) = 8\epsilon\phi\alpha \cdot x^3 - 15\epsilon\phi\beta \cdot x^2 + 4x - 1$ έχει παράγοντες τους $x - \frac{1}{2}$ και $x - 1$
- α) Να δείξετε ότι $\epsilon\phi\alpha = \frac{1}{4}$ και $\epsilon\phi\beta = \frac{1}{3}$
 - β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$
 - γ) Να υπολογίσετε την $\epsilon\phi(2\alpha - \beta)$

- 204**.** Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \sin 2\theta \cdot x + 2$, $\theta \in (0, \pi)$ το οποίο διαιρείται ακριβώς με το $x + \eta\mu\theta$
- α) Να βρείτε το θ
 - β) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - \epsilon\phi\alpha$ είναι 2, να βρείτε την $\epsilon\phi 2\alpha$.

205. Έστω το $P(x)=2x^3-x+\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu 2\theta$.

α) Να δείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\eta\mu\theta$

β) Να βρείτε το πηλίκο $\pi(x)$ της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-\eta\mu\theta$

γ) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\pi(x)$ με το $x-1$ είναι 1, να βρείτε το θ .

206. α) Να λυθεί η εξίσωση: $\psi^6-3\psi^2+2=0$

β) Να λυθεί η εξίσωση: $\eta\mu^6 x = 1-3\sigma\upsilon\nu^2 x$

5ο Κεφάλαιο

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

A. Εκθετική Συνάρτηση

207. Να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = e^x+1$ β) $f(x) = e^{x+2}$ γ) $f(x) = e^{x-2}+1$

208. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{1-5\alpha}{\alpha+1}\right)^x$

α) Για ποιες τιμές του α για τις οποίες η συνάρτηση f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η f να είναι

i) γνησίως αύξουσα

ii) γνησίως φθίνουσα

209. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ και $g(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι περιττή

γ) Να δείξετε ότι ισχύει: $f^2(x)-g^2(x)=1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

210. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $3^x = 81$

β) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{9}$

γ) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{8}{27}$

δ) $2^{-x} = \frac{1}{64}$

ε) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{4}{9}$

στ) $4^x = \frac{1}{8}$

211. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $9^{2x+1} = 27$

β) $\sqrt{2} = 2 \cdot 2^x$

γ) $3 \cdot 9^x = \sqrt[3]{9}$

δ) $2^{x+1} + 1 = 0$

ε) $15^{x^2-4x} - 1 = 0$

212. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2^{x+1} + 8 \cdot 2^{x-2} = 16$

β) $9 \cdot 3^{x-1} + 3^{x+2} = 36$

γ) $5^{2x-1} + 3 \cdot 5^{x+1} = 80$

213. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$

β) $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$

γ) $4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 16 = 0$

δ) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

214. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $7 \cdot 3^{\chi+1} - 5^{\chi+1} = 3^{\chi+4} - 5^{\chi+3}$

β) $3^{\chi+1} - 2^{\chi} = 3^{\chi-1} + 2^{\chi+3}$

215. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3^{\chi} + \sqrt{3^{\chi+2}} - 4 = 0$

β) $e^{\chi} + \sqrt{e^{\chi+2}} = \sqrt{e^{\chi}} - e$

γ) $3^{3\chi} - 3^{2\chi} - 3^{\chi+1} + 3 = 0$

δ) $9^{\sin^2 \chi} + 9^{\sin 2\chi} = 4$

216. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $2^{\chi} < 8$

β) $3^{\chi^2} - 9 > 0$

γ) $e^{\chi} \leq 1$

δ) $e^{3\chi+2} + 1 < 0$

ε) $e^{\chi} + 1 > 0$

στ) $3^{\chi+1} - 8 \cdot 3^{\chi-1} \leq 3$

217. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\chi} < 8$

β) $\left(\frac{2}{e}\right)^{\chi} > \frac{16}{e^4}$

γ) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\chi^2-\chi} < 49^{\chi^2-2\chi}$

218. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $7 \cdot 3^{\chi+1} + 5^{\chi+3} > 3^{\chi+4} + 5^{\chi+2}$

β) $7^{\chi} + 7^{\chi+1} + 3^{\chi} < 3^{\chi+2}$

219. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 < 0$

β) $e^{2x} - (1+e) \cdot e^x + e > 0$

γ) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 > 0$

δ) $e^{2x} + e^x - 2 < 0$

220. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\frac{e^x - 1}{e^x + 2} > 0$

β) $\frac{e^x - e}{e^x - 1} < 0$

221. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α)
$$\begin{cases} 2^x = 8^{y+1} \\ 9^y = 3^{x-9} \end{cases}$$

β)
$$\begin{cases} 3^{2x-y} = 27 \\ 5^{5x-4y} = 1 \end{cases}$$

γ)
$$\begin{cases} 2^x \cdot 4^{x+2y} = 1024 \\ 5^{x-3y-1} = \frac{1}{25} \end{cases}$$

222. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α)
$$\begin{cases} 3^{x+1} + 5^y = 106 \\ 3^x + 5^{y+1} = 152 \end{cases}$$

β)
$$\begin{cases} 5^x - 4^{y+1} = 9 \\ 5^{x-1} + 4^{y+2} = 69 \end{cases}$$

223. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης :

$$f(x) = \sqrt{4^x + 2^x} - 20$$

224. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = 6x^2 \sqrt{9^{x-1}} - 4x \cdot 3^x - 2^{2x+3}, \text{ διέρχεται από το σημείο } A(-1, 0)$$

α) Να βρείτε το a

β) Να λύσετε την ανίσωση: $3f(e^x) < 6 - 14 \cdot e^x$

B. Λογαριθμική Συνάρτηση

225. Για ποιες τιμές του x ισχύει:

α) $\log_3 x = 2$

β) $\log x = 2$

γ) $\ln x = 3$

δ) $\log_2 x = -1$

ε) $\log x = -2$

στ) $\ln x = -4$

226. Να υπολογίσετε τους παρακάτω λογαρίθμους:

α) $\log_5 25$

β) $\log 1000$

γ) $\ln e^x$

δ) $\log_4 2$

227. Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $A = \log_{2006}[\log_4(\log_2 16)]$

β) $B = 3^{4+\log_3 5}$

γ) $\Gamma = \frac{\log_5 25 - 3\log_{0,1} 0,01}{\log_7 \sqrt{7} + 2\log_{\sqrt{3}} 27}$

228. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

α) $\log_3 27 - \log_4 32 - \log_4 2 + \log_5 \sqrt{125} = \frac{3}{2}$

β) $2\log_2 3 + \log_2 6 - \log_2 27 = 1$

γ) $2\log 3 + 3\log 2 - 2\log 6 = \log 2$

δ) $2\log_3 \sqrt{3} + 6\ln \sqrt[3]{e} - 2\log^4 \sqrt{10} = \frac{5}{2}$

229. Να αποδείξετε ότι:

α) $4^{\log_2 3} + 100^{\log 2} - e^{3 \ln 2} = 5$

β) $e^{\ln 2 - 2 \ln 3} = \frac{2}{9}$

γ) $4^{\frac{1}{2} \log_2 5} + 1000^{\frac{1}{3} \log 5} + e^{\frac{1}{2} \ln 100} = 5015$

230. Να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = \ln x$ β) $f(x) = \ln x + 2$ γ) $f(x) = \ln(x-2)$

δ) $f(x) = \ln(x-1) + 2$ ε) $f(x) = \log(x+1) - 2$

231. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \ln(3x-2)$

β) $f(x) = \log(x^2 - 5x + 6)$

γ) $f(x) = \ln \frac{x-3}{5-x}$

δ) $f(x) = \ln(2^x - 16)$

ε) $f(x) = \log(e^x - e)$

232. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{3-x}{x+3}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή

233. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(x^2 - 4)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β) Να δείξετε ότι η f είναι άρτια

234. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\ln(1-x) = \ln(1+x)$

β) $\ln(x+1) + \ln(x-2) = \ln 4$

γ) $2 \log x - \log(x+6) = \log 3$

δ) $2 \log(2x-1) - \log(3x-2x^2) = \log(4x-3) - \log x$

235. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\log[\log(3x-5)] = 0$

β) $\log\sqrt{5x-4} + \log\sqrt{x+1} = 2 + \log 0,18$

γ) $3\log x - 2 = 0$

δ) $2\ln x - 1 = 0$

236. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\log(x-6) + \log(x-7) = 1 - \log 5$

β) $\ln x = \ln^2 x$

γ) $\ln x^2 = \ln^2 x$

237. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2\log^2 x + 5\log x - 3 = 0$

β) $\ln^3 x + \ln x = 0$

γ) $4\ln^2 x - 1 = 0$

238. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $2^x = 3$

β) $e^x = 7$

γ) $9^x - 3^x - 2 = 0$

239. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\ln(e^{2x} + 2) = x$

β) $\ln(e^{2x} + 2) = x + \ln 3$

240. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $4^{\ln x} - 2^{\ln x} - e^{2\ln\sqrt{2}} = 0$

β) $9^{\log x} - 3^{1+\log x} + 1000^{\log\sqrt[3]{2}} = 0$

241. α) Να δείξετε ότι: $2^{\ln x} = x^{\ln 2}$

β) Να λύσετε την εξίσωση: $4^{\ln x} - 9 \cdot x^{\ln 2} + 8 = 0$

242. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(11x^2 - 9x + 18) - 2\log x - 1$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

243. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} x + \ln y = 1 \\ y = e^x + 1 - e \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} \ln(xy) = 3\ln 3 \\ \ln x \cdot \ln y = 2\ln^2 3 \end{cases}$$

244. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $\log(2x-1) > \log(3-x)$

β) $\ln^2 x > \ln(x+2)$

γ) $\log(x^2-9) < \log(4x-4)$

245. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $2^x < 3$

β) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 2$

γ) $e^x < 5$

246. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $\ln^2 x - 5\ln x + 6 \geq 0$

β) $\log^2 x - 5\log x + 4 < 0$

γ) $\ln^2 x > 1$

247. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x + \ln(e^x - 1) = \ln 20$

β) $\ln(e^x - 3) + x = 2\ln 2$

248. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(5 - 3^x)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$

249. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln[\ln(x-1)]$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$

250. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (2\ln a - 1)^x$

- α) Να βρείτε το a ώστε η f να ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$
- β) Να βρείτε το a ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα.

Γ. Επαναληπτικά Θέματα

251. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{3-x}{x+3}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή
- γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(0)$ και $f(\frac{1}{3})$
- δ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)+f(x+1) = 0$

(4ο Θέμα επαναληπτικών 2001)

252. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5} \right)$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της
- β) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 2\ln 2$
- γ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) > 0$

(4ο Θέμα 2002)

253. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$ και $g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$.

- α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των $f(x)$ και $g(x)$
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2g(x)$

(4ο Θέμα 2003)

254. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2\ln x + 1}{2\ln x - 1}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα $x'x$.

β) Να δείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$, για κάθε $x > 0$, $x \neq e^{\frac{1}{2}}$, $x \neq e^{-\frac{1}{2}}$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3$ για κάθε $x > 0$, $x \neq e^{\frac{1}{2}}$, $x \neq e^{-\frac{1}{2}}$.

255.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \alpha - \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

A. Αν $\ln 6 + f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln 5 = \ln \pi$, τότε

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu(e^{f(x)}) \cdot \sigma\upsilon\nu(e^{f(x)}) = \frac{1}{2}$

B. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha - \beta = 0$

β) Να λύσετε την ανίσωση: $16 \cdot 2^{f(x)} < 2^{\ln(2e^4)}$

256.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 2)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) Να λύσετε την εξίσωση: $f(2x) = \ln 7 + f(x)$

γ) Να αποδείξετε ότι: $e^{f(1)} + e^{f(2)} + \dots + e^{f(100)} = \frac{e^{101} - 201e + 200}{e - 1}$

257.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x > 0$

α) Να λύσετε την εξίσωση: $f(2 - \eta\mu x) - f(\sigma\upsilon\nu 2x) = f(3)$

β) Αν $\alpha > 0$ και $f(\alpha) + f(\alpha^2) + \dots + f(\alpha^{100}) = 5050$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \cdot \sqrt{f(x)} + f(x) - 12 > 0$

258.** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln(2e^{2x+1} + e^{x+1})$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να δείξετε ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα ψ στο σημείο $A(0, 1 + \ln 3)$

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$

γ) Να βρεθούν τα διαστήματα που η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $\psi = 1$

259.** Έστω χ, ψ θετικοί αριθμοί με $\chi \neq 1$

α) Να δείξετε ότι ισχύει: $\ln \psi \cdot \log \chi = \log \psi \cdot \ln \chi$

β) Αν ισχύει η ισότητα: $\left(\frac{\ln \psi}{\ln \chi}\right)^2 - 4 \frac{\log \psi}{\log \chi} + 4 = 0$, να βρείτε ποια

σχέση συνδέει τους αριθμούς χ και ψ .

γ) Αν είναι $\psi = \chi^2$ και το ψ είναι λύση της εξίσωσης: $e^{2\psi^2 - 3\psi + 1} = (2010)^0$, να βρείτε τους αριθμούς χ και ψ .

δ) Αν για το πολυώνυμο $P(x) = x^2 - 4x + 4$ ισχύει $P(\ln \chi) \leq 1$, να δείξετε ότι $\psi \in [e^2, e^6]$.

260.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, της οποίας η

γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(\ln 2, 3)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

β) Να αποδείξετε ότι $a = 1$

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή

δ) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 2$

261. α) Να δείξετε ότι: $a^{\ln b} = b^{\ln a}$, για κάθε $a, b > 0$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $2^{\ln x} - 2 \cdot x^{\frac{\ln 1}{2}} < 1$

γ) Έστω η συνάρτηση: $f(x) = a^{\ln x}$

Να βρείτε το a ώστε $5f(3) - 3f(5) > 0$

262.** Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = (2\ln k - 1)x^4 + x^3 + (e - 1)x^2 - ex + 1 + 2\eta\mu\theta, \quad \theta \in (0, 2\pi)$$

Αν το πολυώνυμο είναι 3ου βαθμού και έχει παράγοντα το $x - 1$

α) Να βρείτε τα k και θ

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$

γ) Να βρείτε τα διαστήματα του x για τα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^{3x} + (e - 1)e^{2x} - e^{x+1}$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

263.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

β) Να βρείτε τα διαστήματα του x για τα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\ln 2)$ και $f(1)$

δ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(2x) - f(x) = f(1)$

264. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2\log(12 - x) - \log(x + 8) - 1$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

β) Να δείξετε ότι: $f(0) = \log 9 - \log 5$

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$

δ) Να βρείτε τα διαστήματα του x για τα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

265. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 \cdot \ln \alpha^2 + 5x \cdot \ln \alpha - 2$, $\alpha > 0$.

α) Αν το $x - 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$, τότε να βρείτε το α

β) Για $\alpha = e$

i) Να δείξετε ότι το $(x - 1)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$

ii) Να βρείτε τα διαστήματα του x για τα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.