

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

1 Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής τις παραστάσεις:

$$\begin{aligned} |-7| &= \dots, \quad |\sqrt{2}-1| = \dots, \quad |3-\pi| = \dots, \quad |\sqrt{2}-2| = \dots \\ |-\alpha^2| &= \dots, \quad |-x^2-\pi| = \dots, \quad |\sqrt{2}-1| = \dots \quad |x^2+2| \\ |x^2-4x+4| &= \dots, \quad |\eta\mu 38^\circ - 1| = \dots \quad |-\alpha^2-1| = \dots \end{aligned}$$

3. Αν $\alpha < \beta < \gamma$ να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής την παράσταση

$$A = 3|\alpha - \beta| - 2|\gamma - \alpha| + 3|\beta - \gamma|.$$

5. Αν $-3 < x < 2$ γράψτε χωρίς τις απόλυτες τιμές τις παραστάσεις: $A = 2|x+3| - 6|x-2| + x - 1$

$$\Delta = |2-x| - |x-4|$$

6. Αν $-1 < x < 2$ να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: $A = |x+1| + |x-2| + |x+2| + |x-3|$

$$B = 6 \cdot |2x+3| + 3 \cdot |4x-9|$$

8. Αν $-1 < \alpha < \beta < 2$ να απλοποιήσετε την παράσταση: $|\alpha - \beta| + |2\alpha + 3| - |3\beta - 7|$

10. Γράψτε χωρίς απόλυτα τις παραστάσεις $A = x + |8-2x|$, $B = |-2x-6|$, $\Gamma = x - |4-3x|$

12. Αν $1 < x < 2 < y$, να αποδείξετε ότι:

$$|1-x| + |2-y| + |x-y| - |2y-1| = -2$$

14. Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές τις παραστάσεις $A = |-x^2 - |x||$ $B = |x^2 - 8x + 20|$

$$\Gamma = |x^4 - 2x^2 + 2| \quad \Delta = ||x|+3| - ||x|-x+1| + |-x^2-5|$$

16 Να γράψετε χωρίς τις απόλυτες τιμές τις παραστάσεις: $\Delta = -|-2x+4| + |2x-4|$,

$$E = 2|x+3| - |2-x| + 1, \quad \Sigma\Gamma = |2-x| + |x^2+4|.$$

2 Αν $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ να δειχτεί ότι: $|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \geq 2$.

2.128 Να αποδείξετε τις ισότητες:

A) $|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2).$

B) $|\alpha^2 - 2\beta - 3| = |2\beta - \alpha^2 + 3|$

Γ) $\frac{\alpha}{|\alpha|} = \frac{|\alpha|}{\alpha}, (\alpha \neq 0)$

4. Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

A) $|x+y|^2 - |x-y|^2 = 4xy$

B) $(x+|x|)(x-|x|) = 0$

Γ) $(|x|+|y|)(|x|-|y|) = x^2 - y^2$

Δ) $|xy| + xy + x|y| + y|x| \geq 0$

7. Αν $x = \frac{\kappa}{|y| + |\kappa|}$, $m = \frac{y}{|\kappa| + |y|}$ να

αποδείξετε ότι $|x| + |m| = 1$.

9. Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $|\alpha - \beta| \leq |\alpha - \gamma| + |\gamma - \beta|$

11. Να αποδείξετε ότι

A) Αν $|x|=1$, $|y|=2$, $|z|=4$ τότε $|x+y-z| < 7$

B) Αν $x, y \in \mathbb{R}^*$ με $|x|+|y| < 1$, τότε $0 < |x| < 1$ και $0 < |y| < 1$

13. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδειχθεί ότι:

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| \leq \left|\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right|. \text{ Πότε ισχύει η ισότητα;}$$

17. Να αποδείξετε ότι:

A) Αν $|x| \leq 1$ και $|y| \leq \frac{1}{2}$ τότε $|3x-2y+2| \leq 7$

B) Αν $|x| \leq 1$ και $|y| \leq 2$ τότε $|2x-3y+1| \leq 9$

Γ) $|x| \leq 2 \Rightarrow |x^2 - 2x + 6| \leq 14$

19. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \cdot \beta \cdot (3\alpha + 2\beta) \neq 0$

αποδείξτε ότι $\frac{|2\alpha + 3\beta|}{|3\alpha + 2\beta|} \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \leq 1$

21. Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί με $xyz \neq 0$,

να αποδείξετε ότι: $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} \leq 3$

22. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$ ισχύει

$$A) \left| \frac{x}{y} \right| + \left| \frac{y}{x} \right| \geq 2, \text{ αν } x, y \neq 0. B) \left| x + \frac{1}{x} \right| = \left| x \right| + \left| \frac{1}{x} \right|$$

24. Αν και $|a-1| < 5$ $|b-2| < 3$ βρείτε μεταξύ ποιων τιμών μεταβάλλεται η παράσταση $a+b$.

26. Αν $x \neq 0$ και $y \neq 0$, βρείτε τις τιμές που

μπορεί να πάρει η παράσταση $A = \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y}$

27. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A) \frac{x^2}{|x|} \quad B) \frac{x^2 - 1}{|x| + 1} \quad \Gamma) \frac{9 - x^2}{15 + 5|x|}$$

29. Να βρεθεί το x όταν: $d(x, 3) \leq 7$,

$$d(2, x) = 2, \quad d(x, 2) > 3 \quad d(x, -1) > 2.$$

31. Δίνονται οι παραστάσεις $A = |x-2|$ και

$$B = |2x-6|, \text{ όπου } x \text{ πραγματικός αριθμός.}$$

α) Για κάθε $2 \leq x < 3$ δείξτε ότι $2A + \frac{1}{2}B = x-1$.

β) Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $A+B=2$;

32. Δίνονται τα x, y τέτοια ώστε:

$$-9 \leq 2x-3 \leq 3 \text{ και } 3 \geq \frac{1-y}{2} \geq -2$$

A) Να αποδείξετε ότι: $|x| \leq 3, |y| \leq 5$

B) Βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης $K = 2x-3y-21$

20. Έστω ότι τα σημεία A, B, M παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς $-2, 7$ και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Δώστε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

$$|x+2|, |x-7| \text{ και } |x+2| + |x-7|$$

β) Δώστε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = |x+2| + |x-7| \text{ γεωμετρικά και αλγεβρικά.}$$

23. Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| + |y-3|$,

με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους

ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$. Να αποδείξετε ότι:

$$A = x - y + 2 \text{ και ότι } 0 < A < 4.$$

25. Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| - |x-2|$

α) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 2x-3$

β) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

28. Δίνονται οι παραστάσεις $A = |2x-4|$ και

$$B = |x-3|, \text{ όπου } x \text{ πραγματικός αριθμός.}$$

α) Για κάθε $2 \leq x < 3$ να αποδείξετε ότι

$$A+B = x-1.$$

β) Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει

$$A+B=2; \text{ Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.}$$

30 Για τον πραγματικό αριθμό ισχύει

$$d(2x, 3) = 3 - 2x. \text{ Να αποδείξετε ότι η παράσταση:}$$

$$\text{είναι ανεξάρτητη του } x.$$

32. Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y για

$$\text{τα οποία ισχύουν: } |x-3| \leq 2 \text{ και } |y-6| \leq 4$$

α) Να δείξετε ότι $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y .

ΡΙΖΕΣ

32. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις

χωρίς ριζικά: **i)** $\sqrt{(2\sqrt{2}-4)^2}$

ii) $\sqrt{x^2-2x+1}$ **iii)** $\sqrt{x^2y^4}$ **iv)** $\sqrt{\frac{x^2}{4}}$

34. Για κάθε $x \neq 0$ να απλοποιηθούν οι

παραστάσεις: $\sqrt[6]{x^{18}}$, $\sqrt[3]{x^6}$, $\frac{\sqrt{x^2}}{x}$, $\sqrt{(2x)^2}$.

36. Αν $-3 < x < 2$, να απλοποιήσετε την

παρασταση $A = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{x^2+6x+9}$

38. Να απλοποιηθεί η παράσταση

$\frac{\sqrt{x^2+4 \cdot x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-4 \cdot x+4}}{x-2}$, αν $-2 < x < 2$.

41. Έστω $K = \frac{\sqrt{x^2+6x+9}}{x+3} - \frac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5}$

a) Να βρεθούν οι τιμές του x , για τις οποίες η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

β) Αν $-3 < x < 5$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή

43. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

A) $(\sqrt{12}-\sqrt{27}) \cdot (\sqrt{75}+\sqrt{48}-\sqrt{108})$,

B) $(\sqrt{18}+\sqrt{8}-\sqrt{20}) \cdot (\sqrt{50}-\sqrt{45}+\sqrt{125})$,

Γ) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$.

47. Να αποδείξετε ότι :

$(\sqrt{18}+\sqrt{8}-\sqrt{20}) \cdot (\sqrt{50}-\sqrt{45}+\sqrt{125}) = 30$

49 Αν $x = 1-3\sqrt{2}$ να υπολογίσετε την

παρασταση $A = \frac{\sqrt{2}}{x} - \frac{3}{x^2}$

50 Να αποδείξετε ότι

$\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 1$.

33. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$B = 3x^2 + 5xy + 3y^2$ όταν $x = \frac{3}{6-\sqrt{3}}$, $y = \frac{3}{6+\sqrt{3}}$

35. Αν $x, y > 0$ και $x \neq y$ να αποδείξετε ότι

$\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = x+y+\sqrt{xy}$

37. Να υπολογίσετε τον αριθμό

$\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

39. Αν $\alpha > 0$ να δείξετε ότι:

A) $\alpha > 1 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} < \alpha$ **B)** $\alpha < 1 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} > \alpha$.

2.163 **α)** Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{51} < 4$

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{51}$ και $6-\sqrt[3]{51}$

42. Να μετατραπούν οι παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

A) $\frac{4}{5-\sqrt{2}}$ **B)** $\frac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ **Γ)** $\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$ **Δ)** $\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1}$

E) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$ **Στ)** $\frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}$ **Ζ)** $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

44. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

A) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$, **B)** $\sqrt{9-\sqrt{32}}$, **Γ)** $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$.

45. Να δείξετε ότι: $\sqrt{10+2\sqrt{15}} > \sqrt{5}+\sqrt{3}$.

46. Συγκρίνετε το $\sqrt{2}$ με το $\sqrt{10}-2$

48 Να αποδείξετε ότι:

A) $\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{9}} - \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{9}} = \frac{2}{3}$

B) $\sqrt{\frac{1}{(\sqrt{7}+3)^2}} + \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{7}-3)^2}} \in \mathbb{Q}$,

Γ) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$.

51. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\frac{\sqrt{1001+\sqrt{2001}}-\sqrt{1001-\sqrt{2001}}}{\sqrt{2}}$ είναι φυσικός.

53. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = \sqrt{1+1999\sqrt{1+2000\sqrt{4+2000\sqrt{1+2003\cdot 2005}}}}$.

55. Να αποδείξετε ότι $A = B$ όταν :

$$A = \left[(7+4\sqrt{3})^8 + \frac{1}{(7-4\sqrt{3})^8} \right] \cdot \frac{(14-8\sqrt{3})^8}{2^9}$$

και

$$B = \left[(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2005} + \frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2005}} \right] \cdot \frac{(2\sqrt{3}-2\sqrt{2})^{2005}}{2^{2006}}$$

57. Αν $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ να δείξετε ότι:

α) $\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$

β) $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) \geq 8\alpha\beta\gamma$

59. Να υπολογίσετε τα $(2-\sqrt{2})^3$, $(2+\sqrt{2})^3$ και να απλοποιήσετε την παράσταση: $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}$.

61. Δείξτε ότι $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{34-3} \cdot \sqrt[3]{34+3} = 5$

63. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

A) $\sqrt[3]{5 \cdot \sqrt{25 \cdot \sqrt{25 \cdot \sqrt{5}}}}$.

B) $\sqrt{75 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{15 + \sqrt{1}}}}}$.

Γ) $\sqrt{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}$.

65. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις $(2-\sqrt{2})^3$, $(2+\sqrt{2})^3$ και να απλοποιήσετε την παράσταση $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}$

52. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

A) $\sqrt{5}$ και $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

B) $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt{2}$

Γ) $\sqrt{3}$ και $\sqrt{2} + 1$

54. Να μετατραπούν οι παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή.

A) $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}}$ B) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}-1}$

Γ) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}$ Δ) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

56. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

A) $\sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^6}$ B) $\sqrt[9]{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^3}$

58. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$\sqrt{4+2\sqrt{3}}$, $\sqrt{9-\sqrt{32}}$, $\sqrt{8+\sqrt{60}}$

60. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$\sqrt{63}-7\sqrt{3}+\sqrt{147}-2\sqrt{7}-\frac{7}{\sqrt{7}}$ είναι ακέραιος.

62. Να διατάξετε κατά αύξουσα σειρά τους αριθμούς $3\sqrt{11}$, $4\sqrt{7}$, $5\sqrt{5}$, $6\sqrt{3}$, $7\sqrt{2}$

64. Αν $\alpha > 0$, $\beta > 0$ να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \leq \sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha}}$$

66. Δίνεται η παράσταση:

$$A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$$

- α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;
 β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x

67. A) Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$.

B) Συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6 - \sqrt[3]{30}$