

Διάταξη – Ανισότητες

2.65 Αν $\alpha > 1$ να διατάξετε από την μεγαλύτερη προς την μικρότερη τις τιμές $\frac{1}{\alpha}$, α^2 , 1 , α^3 , α .

2.66 Αν $-2 < x < 4$ και $3 < y < 7$ να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρουν οι παραστάσεις $x - y$, $\frac{1}{y}$, $2x + \frac{3}{y}$, x^2 , y^2 , $x^2 + y^2$.

2.67 Αν είναι $2 < x < 8$ να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών βρίσκονται οι παραστάσεις

$$\frac{1}{x} + 2, 1 - \frac{1}{1-x}, \frac{2x-3}{x}, x^2, x^3 - y^2$$

2.68 Να αποδείξετε ότι:

A) Αν $3\alpha < \beta$ τότε $12\alpha < 3(\alpha + \beta) < 4\beta$.

B) Αν $\alpha > 1$ τότε $\alpha^3 > \alpha^2 - \alpha + 1$.

Γ) Αν $x > y$ τότε $x + 7 > y + 5$.

Δ) $x < 1 < y \Rightarrow xy - x - y + 1 < 0$

2.69 Να αποδείξετε ότι

A) $\alpha \cdot \beta > 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$ και $\alpha \cdot \beta < 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \leq -2$

B) αν $\alpha \in \mathbb{R}$ τότε $\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} \leq 1$.

2.70 Δείξτε ότι $\frac{1}{2} < \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \dots + \frac{1}{2000} < 1$

2.71 Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

A) $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$,

B) $(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1)(\gamma^2 + 1) \geq 8\alpha\beta\gamma$.

2.72 Αν α, β θετικοί, να αποδείξετε ότι

A) $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{4}$ B) $\frac{\alpha+\beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta} \geq \frac{2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}$

2.73 Αν α, β θετικοί ακέραιοι αριθμοί τέτοιοι ώστε $3\alpha + 4\beta = 120$, να αποδειχτεί ότι $30 < \alpha + \beta < 40$.

2.74 Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αριθμοί να δείξετε ότι:

A) $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$,

B) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$.

2.75 Αν α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου και ισχύει ότι $\alpha^2 + \beta^2 \leq 2\gamma(\alpha + \beta - \gamma)$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

2.76 Αν για τους $\alpha, \beta, \gamma > 0$ ισχύει ότι

$$\alpha\beta\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \gamma\right) + \beta\gamma\left(\frac{\beta+\gamma}{2} - \alpha\right) + \gamma\alpha\left(\frac{\gamma+\alpha}{2} - \beta\right) \leq 0$$

να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma$.

2.77 Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 \geq 3\left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

2.78 Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι

A) $(\alpha + \beta)^2 \leq 2(\alpha^2 + \beta^2)$,

B) $(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3)^2 \leq 4(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^6)$.

2.79 Αν είναι $x, y > 0$ και $x^3 + y^2 \leq 64$ να

αποδείξετε ότι $x^4 + y^3 < 512$.

2.80 Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί να δείξετε ότι

A) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$

B) $\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 \geq \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)$

2.81 Συγκρίνετε τους αριθμούς 2^{51} και 3^{34} .

2.82 Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει μήκος x cm και πλάτος y cm, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $3 \leq x \leq 5$ και $1 \leq y \leq 2$, τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων

περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y

διπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων

περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου