

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2016
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο :

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln(x+1)$ και $g(x) = \frac{x}{x+1}$

- α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+g(x)=0$ και να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $\Phi(x)=f(x)+g(x)$
- β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο $O(0,0)$, η οποία διχοτομεί τη γωνία του πρώτου και τρίτου τεταρτημόριου.
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f την παραπάνω εφαπτομένη και την ευθεία $x=3$
- δ) Ένα υλικό σημείο M με θετική τετμημένη, κινείται στη C_f και η τετμημένη του x αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/sec . Αν N είναι η προβολή του σημείου M στον άξονα $x'x$ και $A(0,a)$ σημείο του άξονα $y'y$, με $a > 0$, τότε:
- i) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής $E'(t)$ του εμβαδού E του τριγώνου AMN κάθε χρονική στιγμή t ισούται με $\Phi(x(t))$
- ii) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου M , τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου AMN είναι ίσος με $\left(2\ln 3 + \frac{8}{9}\right) \text{ cm}^2/\text{sec}$

ΘΕΜΑ 2ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{-x}$, $x \leq 0$

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα κοίλα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- β) Ένα υλικό σημείο $A(a, \sqrt{-a})$, $a < 0$ κινείται στην C_f με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $a'(t) = -a(t)$. Επίσης υλικό σημείο $M(x,y)$ με $x > 0$ κινείται στην ευθεία με εξίσωση $y=x$
- i) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\widehat{AOM} = \theta$, όπου O η αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $(OA) = \sqrt{2}$
- ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις καμπύλες με εξισώσεις: $y = \sqrt{-x}$ με $x \leq 0$, $y = x$ με $x \geq 0$ και την $y = a'(t_0)$
- iii) Να βρείτε ευθεία παράλληλη με τον άξονα $y'y$, η οποία να χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

ΘΕΜΑ 3ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(e^x + 1) = x + e^x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

- α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(x-1) + x$, $x \in (1, +\infty)$
 β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}
 γ) Να αποδείξετε ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν ένα κοινό σημείο, το οποίο και να προσδιορίσετε.
 δ) Να υπολογίσετε το $f(e^2 + 1)$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x+1) - 1 = f^{-1}(e^2 + 3)$
 ε) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x$

ΘΕΜΑ 4ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^{2f(x)} + e^{f(x)+1} + f(x) - 2e^2 = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
 β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}
 γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $e^\xi + e = (2e^2 - \xi)e^{-\xi}$
 δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$
 ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq x$ και να αποδείξετε ότι $f(x) - 1 \geq 0$ για κάθε $x \geq 1$

ΘΕΜΑ 5ο :

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{x \ln x - x}$, $x > 0$

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.
 β) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x^x e^{-x} = k$, $x > 0$ για τις διάφορες τιμές του $k > 0$
 γ) Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \ln x \cdot f(x) dx = \frac{e-1}{e}$
 δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (e^{-1}, e)$ τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$f(\xi_1) \cdot \ln \xi_1 + e f(\xi_2) \cdot \ln \xi_2 = \frac{e - e^{\frac{e-2}{e}}}{e-1}$$

ΘΕΜΑ 6ο :

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f''(x) \cdot e^{-x} - (f'(x))^2 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- $2f'(0) + 1 = 0$ και
- $f(0) = \ln 2$

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x) + 1 = \frac{e^x}{1 + e^x}$, $x \in \mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln(1 + e^x) - x$, $x \in \mathbb{R}$

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

δ) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $2f(x) + x \geq \ln 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

στ) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x) \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)$$

ΘΕΜΑ 7ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$, δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο σ' αυτό το διάστημα και είναι $f(a) > 0$ και $f(\beta) < 0$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο (a, β)
- β) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $2\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$
- γ) Υπάρχουν $\kappa, \lambda \in (a, \beta)$ με $\kappa \neq \lambda$ τέτοια, ώστε $f'(\kappa)f'(\lambda) < 0$
- δ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\kappa, \lambda)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$

ΘΕΜΑ 8ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |\ln x|$, $x > 0$

α) Να κάνετε τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και να βρείτε την παράγωγό της.

β) Να βρείτε:

- i) Τα κοινά σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ της C_f με την ευθεία $y = a$, $a > 0$
- ii) Τις εξισώσεις των εφαπτόμενων ε_A και ε_B της C_f στα σημεία της $A(e^a, a)$ και $B(e^{-a}, a)$ αντιστοίχως και να αποδείξετε ότι είναι κάθετες μεταξύ τους για κάθε $a > 0$

γ) Έστω M και N τα σημεία τομής της ευθείας ε_B με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι, όταν το εμβαδόν του τριγώνου OMN γίνεται μέγιστο, η ευθεία ε_A διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$

ΘΕΜΑ 9ο :

Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: :

$$\bullet \quad f(x) - e^{-f(x)} = x - 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να εκφράσετε την $f'(x)$ ως συνάρτηση της $f(x)$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημό της για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

δ) Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x) < x$, για κάθε $x > 0$

ε) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

ΘΕΜΑ 10ο :

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$.

α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, τότε:

i) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta \mu^2 x) - 1}{\eta \mu x}$

ii) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(2016x) - 1}{x} = 4032f'(0)$

β) Αν επιπλέον για την f ισχύει $f^2(x) - 8f(x) = x^2 - 7$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της.

γ) Αν $f(x) = 4 - \sqrt{x^2 + 9}$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

i) Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο $-\infty$

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , η οποία διέρχεται από το σημείο $B(-1,3)$

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx < \frac{22}{5}$

ΘΕΜΑ 11ο :

A. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x \ln x - 1 = 0$, με $x > 1$ έχει ακριβώς μία λύση.

B. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet \quad f(x) = x \ln x (f(x) - f'(x)) \quad \text{για κάθε } x > 1 \text{ και}$$

$$\bullet \quad f(e) = e^e$$

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

β) Αν $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$, $x > 1$

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

ii) Αν $E(a)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης $g(x) = f(x) + x \ln x \cdot f'(x)$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=2$ και $x=a$

με $a > 2$, να υπολογίσετε το $\lim_{a \rightarrow +\infty} \left(E(a) \cdot \eta \mu \frac{1}{E(a)} \right)$

ΘΕΜΑ 12ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $M(1, 2e)$. Αν η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο της $(x_0, f(x_0))$ διέρχεται από το σημείο $A(x_0 + 1, 2e^{x_0})$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x + e^{2-x}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(a-2x)}{x-a} + \frac{f(2x)}{x-\beta} = 2016$, $a, \beta \in \mathbb{R}$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο

διάστημα (a, β)

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και την ευθεία $y = e^2 + 1$

ε) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=1$

ΘΕΜΑ 13ο :

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = (1-x)\ln x + \frac{1}{2}$ και $g(x) = \frac{x^2 \ln x}{e^{2x}}$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο μόνο ρίζες $\rho_1 \in (0, 1)$ και $\rho_2 \in (1, +\infty)$

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = -\ln(\rho_1 \rho_2)$

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει ένα τοπικό ελάχιστο και ένα τοπικό μέγιστο.

ΘΕΜΑ 14ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x) = 4f(x) + 32x^2 - 16x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{4x} - 8x^2$, $x \in \mathbb{R}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να αποδείξετε ότι $4f(2x) < 3f(x) + f(5x)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

δ) Να αποδείξετε ότι $(e^2 - 2)\ln 2 < \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt < (e^4 - 8)\ln 2$

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2x \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt - (x-1)(3f(x) + f(5x) - 4f(2x)) = (e^{4x} - 2)\ln 4x$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

ΘΕΜΑ 15ο :

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{x - 1} = 0$
- $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y) - x^2 - y^2 + 1$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι $f'(1) = 1$

β) Να αποδείξετε ότι $xf'(x) - 2f(x) = x^2 - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x| + 1, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

δ) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f

ε) Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $2ex^2 \ln|x| = a$ έχει 4 διαφορετικές ρίζες.

ΘΕΜΑ 16ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{4}$
- $4f^2(x) - 4xf(x) = ax + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $\beta > \frac{1}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι $a = 1$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

γ) Αν επιπλέον ισχύει $f(1) < 0$ να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + x + \beta}}{2}$

ii) Η εξίσωση $10xf(x) = 3\eta\mu(\pi x) - 3x + 4$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, +\infty)$

ΘΕΜΑ 17ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}(x^3 - x)$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων, να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f είναι συνευθειακά.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = -x$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$

ΘΕΜΑ 18ο :

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $0 \leq f(x) + 16 \leq (x+1)f'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1)
- $f(1) = 0$
- Η συνάρτηση f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(2e^x - x) = f(x^2 - x + 2)$

γ) Να αποδείξετε ότι $(1+x)f(x) < f(x^2)$ για κάθε $x \in (p, 1)$, όπου p ρίζα της εξίσωσης του (β) ερωτήματος.

δ) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$, τότε να αποδείξετε ότι $16 < E < 32$

ΘΕΜΑ 19ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = -\ln 2$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^{f(x)} = 1 + f'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -\ln(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της $(0, f(0))$

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx < -\frac{1 + \ln 16}{4}$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2) + f(\ln x) = f(x) + f(0)$ στο διάστημα $(0, +\infty)$

ε) Να αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = (\ln(e+1) - \ln 2)x_0 - \ln(e+1)$

ii) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = \ln^2\left(\frac{e+1}{2}\right)$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2016
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 20ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(-1) = -\frac{1}{e^2}$
- $xf'(x) = f(x) + x^2(2e^{2x} - 1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = xe^{2x} - x^2 - x$, $x \in \mathbb{R}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ένα μόνο σημείο καμπής.

δ) Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται στο επίπεδο χωρίο Ω και για τις συντεταγμένες του ισχύουν οι σχέσεις:

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{και} \quad -x^2 - 3x \leq y \leq f(x)$$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει το σημείο M .

ΘΕΜΑ 21ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + e}{x} = 1$
- $f(x+y) = e^{2xy} \left(e^{y^2} f(x) + e^{x^2} f(y) + e^{x^2+1} + e^{y^2+1} \right) - e$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ (1)

Να αποδείξετε ότι

α) $f'(0) = 1$

β) $f'(x) = 2xf(x) + e^{x^2} + 2ex$, $x \in \mathbb{R}$

γ) $f(x) = xe^{x^2} - e$, $x \in \mathbb{R}$

δ) Η συνάρτηση f αντιστρέφεται και θεωρώντας γνωστό ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ της συνάρτησης f^{-1} την ευθεία $x = -2e$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$

ΘΕΜΑ 22ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(1) = -1$
- $2f'(x)(f(x) - 2x) = 1 + 4f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι

α) $f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 + x + 4}$, $x \in \mathbb{R}$

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$h(x) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{x} \eta\mu(\pi x), \quad x \in \mathbb{R}^*, \text{ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο } M(x_0, y_0) \text{ με } x_0 \in (1, +\infty)$$

γ) $3f(x+1) > f(x+3) + 2f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) Αν $a > \frac{7}{4}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$(x+3)f(x-a+1) = f(x-a+3) + 2f(x-a)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, a)$

ΘΕΜΑ 23ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(0) = 0$
- $|f'(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $-2 \leq f(2) \leq 2$

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x^2$ έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

γ) Αν $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

i) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την παραβολή $y = x^2$

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{f(x)} - 1)(f(x) - 2\ln x)$

iii) Αν $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική

παράσταση εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $M(1, 0)$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί

τη σχέση $g''(x) = \frac{8x}{e^{f(x^2)}}$, να αποδείξετε ότι $\int_0^1 g(x) dx = f(1)$

ΘΕΜΑ 24ο :

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4 + 4x + 8$ και $g(x) = \sin x + x$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\frac{2}{x}\right) = 5$

γ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε $4(2\alpha^4 + 2\alpha^3 + 4)(\beta^4 + 4\beta + 8) = 25\alpha^4$

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 g(x)}{f(x)}$

ε) Θεωρούμε ότι υπάρχει συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $h(1) = 8$
- $h'(3) = 6$
- $h(g(x)) \leq f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της h στο σημείο $(1, h(1))$

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $h''(\xi) = 1$

ΘΕΜΑ 25ο :

Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^3(x) + f(x) = x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

α) Να βρείτε την τιμή της συνάρτησης f για $x = -1$ και $x = 1$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το πρόσημό της.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

δ) Αν $\alpha > 1$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\alpha} f(\alpha) + f\left(\frac{1}{\alpha}\right) < 1 + \frac{1}{\alpha}$

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\eta\mu x + 2)}{e^x - 1} = \frac{f(x)}{x + 2}$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-2, 0)$

στ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της

συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$ είναι $E(\Omega) = \frac{5}{4}$

ΘΕΜΑ 26ο :

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$ και $g(x) = 1 + x(1 - \ln x)$

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- β) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g που να είναι παράλληλες. Στη συνέχεια να βρείτε σημεία της C_g με τετμημένες αντίστροφες στα οποία οι εφαπτόμενες είναι μεταξύ τους κάθετες.
- γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho > 1$ τέτοιο, ώστε η συνάρτηση f να λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της όταν $x = \rho$ και επιπλέον ισχύει $f(\rho) = \frac{1}{\rho}$
- δ) Θεωρούμε επίσης την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2\rho}$. Να αποδείξετε ότι:
- Η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες α, β με $0 < \alpha < \beta$
 - Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) + f'(\xi) = \frac{1}{2\rho}$

ΘΕΜΑ 27ο :

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(1) = 1$ και $f'(-1) = -1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$x^2(xf'(x) - 4) = 1 - 2x^2 f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^* \quad (1)$$

- α) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2} + 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

- γ) Αν $E(\alpha)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και την ευθεία $x = \alpha$ με $\alpha > 1$, τότε να υπολογίσετε το $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha)$

- δ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3(f(x) - 2) - x + 1}{3\ln^2(x-1) - (f(x) - 2)^2}$

ΘΕΜΑ 28ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x - 1 + \ln x$

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x$
- γ) Θεωρώντας γνωστό ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ της συνάρτησης f^{-1} , την ευθεία με εξίσωση $y = x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = e$

ΘΕΜΑ 29ο :

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2e^{-\frac{x^2}{8}}$, $x \in [0, +\infty)$ και $g(x) = \frac{x^2}{8} - \ln x$, $x \in (0, +\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και $f^{-1}(x) = 2\sqrt{2 \ln \frac{2}{x}}$, $x \in (0, 2]$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\sqrt{2}} x^2 f'(x) dx$

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^2}{4} + \ln\left(2 \ln \frac{2}{x}\right) = 0$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0, 2)$

ΘΕΜΑ 30ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_a(x) = \frac{3a}{e^x + a}$, $a > 0$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f_a ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $a \in (0, +\infty)$ η γραφική παράσταση C_a της συνάρτησης f_a έχει ένα μόνο σημείο καμπής, στο οποίο η εφαπτομένη της C_a έχει σταθερό συντελεστή διεύθυνσης.

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E_a(\lambda)$, $\lambda > 0$, του χωρίου που περικλείεται από την C_a , την ευθεία $y=3$ και τις ευθείες $x=\lambda$ και $x=-\lambda$ είναι $E_a(\lambda) = 3 \ln \left(\frac{e^\lambda + a}{e^{-\lambda} + a} \right)$

δ) i) Να αποδείξετε ότι η καμπύλη C_4 βρίσκεται πάνω από την καμπύλη C_1

ii) Αν $\zeta(\lambda)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_1 , C_4 και τις ευθείες $x=\lambda$ και $x=-\lambda$, να βρείτε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \zeta(\lambda)$

ΘΕΜΑ 31ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_a(x) = \ln \left(\frac{e^x + e^a}{e^x + 1} \right)$, $a \in \mathbb{R}$

α) Θέτουμε $I(a) = \int_0^1 e^{x+f_a(x)} dx$. Αν ισχύει $I(a) = e - 1$, να βρείτε το a .

β) Να αποδείξετε ότι $f_a(a-x) = a - f_a(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(a)$, με $a > 0$, του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_a της συνάρτησης f_a , τους άξονες x' , y' και την ευθεία $x=a$ δίνεται από τον τύπο $E(a) = \frac{a^2}{2}$

ΘΕΜΑ 32ο :

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(f(x)) = f(x) - \frac{x}{4}$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{x} = \lambda^2$

ii) $\lambda = \frac{1}{2}$

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) > \frac{1}{4}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το σύνολο τιμών της.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(2)(x+1)(x-1) + f(3)x(x-1) + f(4)x(x+1) = 0$ έχει ακριβώς δύο

ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in (-1, 1)$ με $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{f(4) - f(3)}{f(2)}$

ΘΕΜΑ 33ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0,1) \cup (1,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{\ln 2}$ και $f(e) = \frac{1}{e}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$
- $f'(x) = -(\ln x + 1) \cdot f^2(x)$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $(e, f(e))$ και την ευθεία $x = 4$

ΘΕΜΑ 34ο :

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = e$ και $f'(1) = 0$, η οποία για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ικανοποιεί τη σχέση $x^3 f''(x) = e^{\frac{1}{x}}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$, $x \in (0, +\infty)$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

γ) Να αποδείξετε ότι $(a + \beta)e^{\frac{2}{a+\beta}} \leq ae^{\frac{1}{a}} + \beta e^{\frac{1}{\beta}}$ για κάθε $a, \beta \in (0, +\infty)$

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g με $g(x) = \frac{f(x)}{2x}$, $x \in (0, +\infty)$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 3$

ε) i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{f(x)}, & x \in (0, +\infty) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $H(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x}}, & x \in (0, +\infty) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι μία αρχική της h στο

διάστημα $(0, +\infty)$ και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^e h(x) dx$

ΘΕΜΑ 35ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^3(x) + 2f(x) = 3e^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να αποδείξετε ότι :

$$\text{i)} \quad e^{\frac{x}{3}} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{2} e^{\frac{x}{2}} \quad \text{για κάθε } x \in [0, +\infty)$$

$$\text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^{\frac{x}{3}}} = \sqrt[3]{3}$$

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

ε) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της.

στ) Να αποδείξετε ότι: $\int_0^{\ln 4} f(x) dx + \int_1^2 \frac{4}{x^2 + 2} dx = 3$

ΘΕΜΑ 36ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(e) = 1$, η οποία για κάθε $x \in (1, +\infty)$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) > 0$
- $xf'(x) + f^2(x) = 0$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{\ln x}$, $x \in (1, +\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \varepsilon \phi x$, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

γ) Ένα υλικό σημείο $M(a, f(a))$, $a > 1$ κινείται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ταχύτητα $4a \text{ cm/sec}$

Αν η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο M τέμνει τον άξονα $x'x$, στο σημείο A , τότε:

- i) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου A , τη χρονική στιγμή t_0 , που το σημείο M διέρχεται από το σημείο $(e, f(e))$
- ii) Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη (ε) με τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ , τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\theta'(t_0) = \frac{12e}{e^2 + 1} \text{ rad/sec}$

ΘΕΜΑ 37ο :

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^3(x) + f(x) = x^4 - 2x^2 - 8 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

α) Για τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f :

- i) Να αποδείξετε ότι έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$
- ii) Να βρείτε τα κοινά σημεία της με τον άξονα $x'x$. Σε ποιο διάστημα βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$;

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη.

δ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τρεις θέσεις τοπικών ακροτάτων με δύο τιμές.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-2, 2)$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοιοι, ώστε $f'(x_1)f'(x_2) + f(x_1)f(x_2) = 0$

ΘΕΜΑ 38ο :

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$, για κάθε $x > 0$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να λύσετε την εξίσωση

$$(2x^2 + 1)e^{2x^2 - x - 1} = x + 2$$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ τέτοια, ώστε $\frac{e-1}{f'(\xi_1)} + \frac{e}{f'(\xi_2)} = e - 1$

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ και την ευθεία $x = e$

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)+1}{e^x} dx < \frac{4}{3}$