ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2018
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο :

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=(x-1)e^x+1$ και $g(x)=(x\cdot e^x-e^x+1)x$, $x\in R$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται, και να βρείτε το πεδίο ορισμού της g^{-1}.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της

δ) Αν $E(\Omega)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$, τότε να αποδείξετε ότι $E(\Omega)<e^2+\frac{3}{2}$

1

ΘΕΜΑ 2ο :

Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(0)=0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R^* με

$$f'(x)=\frac{e^x}{3f^2(x)+2f(x)+1},\ x\in R^*$$

α) Να αποδείξετε ότι $f^3(x)+f^2(x)+f(x)=e^x-1$ για κάθε $x\in R$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0=0$

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=1$ και $\int_0^{x_0}e^xf(x)dx=\frac{23}{12}$

δ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_{\frac{1}{2}}^{1}t^{\frac{1}{f(x)}-3}\eta\mu t^2dt$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{e}{x}+x,\ x>0$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

β) i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(2e-f(x))>e$

γ) Να λύσετε την εξίσωση

$$\ln x-(ex+1)\left(\frac{e}{x}-\frac{1}{e}\right)=2$$

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right),\ x>0$.

i) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική της παράσταση, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=e$

ii) Να αποδείξετε ότι αν για κάποιο $\alpha\in R$ ισχύει $g(x)\le\alpha$ για κάθε $x>0$, τότε $\frac{\alpha}{2}+e\ge 1$

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω $f: R \to R$ μια συνεχής συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο με τεταγμένη 1 και τα μόνα κοινά σημεία της με τον άξονα x΄x έχουν τετμημένες -2 και 4. Επιπλέον η f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $[0,+\infty)$.

α) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $f\left(-\frac{7}{4}\right)$ και τη μονοτονία της f στο διάστημα $[0,+\infty)$.

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(-0,1)x^3+f(1)x^2+f(2)}{f(-1)f(5)x^2+f(0)}$$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x)+f(e^{3x})=f(e^{2x})+f(e^{4x})$

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(-2,\,4)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\sqrt[4]{f^3(-0,1)f(2)}$

ε) Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in(0,\ 4)$ ισχύει $\big(f(x)-1\big)f''(x)<0$ να αποδείξετε ότι $\int_0^4 f(x)\,dx<2$

ΘΕΜΑ 5ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x-1+\frac{1}{x}$ και $g(x)=(x\ln x-x+1)\ln x,\ x\in(0,+\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_g

δ) Αν Α είναι το σημείο καμπής της C_g και $B(e,g(e))$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_g και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

ΘΕΜΑ 6ο

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R\to R$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{e^{2t}+(x+1)e^{x+t}+1}-e^t\right)=\frac{f'(x)}{2(x+1)},\ x\neq-1 \quad \text{και} \quad f(-1)=\frac{2}{e}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=(x^2+1)e^x,\ \ x\in R$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R με σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$

γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη ή κυρτή και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της C_f

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x)(x+1)\leq f(x^2)+2ex$ για κάθε $x\geq 1$

ε) Να αποδείξετε ότι $\int_1^2\frac{(x^4+1)e^{x^2}}{e(x+1)}dx>3e-4-2\ln\frac{2}{3}$

ΘΕΜΑ 7ο

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο και τέτοια, ώστε:

- $2f^2(1)+f^2(3)\le 2f(1)\cdot f(3)$
- $f'(1)=2$
- $f''(x)\ne 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνάρτηση 1-1

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ένα ακριβώς κρίσιμο σημείο στο $\mathbb{R}$

γ) Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(\pi x)}{(x-1)(f(x)-2x+2)}$

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^4 f(x)dx<\int_1^3 f(x)dx$

ε) Να αποδείξετε ότι $E<(\xi-1)^2$, όπου E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\xi$ με ξ το κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f.

ΘΕΜΑ 8ο

Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και για την οποία ισχύουν:

- $f(1)=1$
- $(x-1)f''(x)+2f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ για κάθε $x>0$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ell nx}{x-1}, & 0<x\ne 1\\ 1, & x=1\end{cases}$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(0,+\infty)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f''(1)=\dfrac{2}{3}$

δ) Έστω συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και ικανοποιεί τις σχέσεις $g(1)=1$ και $(g(x)-f(x))(g(x)+3f(x))=0$, για κάθε $x>0$. Να αποδείξετε ότι $f=g$

ε) Ένα σημείο Μ κινείται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 4 cm/sec. Αν Α είναι η προβολή του σημείου Μ στον άξονα $x'x$ και Β τυχαίο σημείο του άξονα $y'y$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΜ τη χρονική στιγμή κατά την οποία το Μ διέρχεται από το σημείο $(1,f(1))$.

ΘΕΜΑ 9ο

Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f:(-e,+\infty)\to R$ με $f(0)=1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $e^{f(x)}=\dfrac{1}{f'(x)}$, για κάθε $x\in(-e,+\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln(x+e)$, $x\in(-e,+\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και τους ημιάξονες Ox' και Oy.

ε) Να βρείτε τον θετικό πραγματικό αριθμό α, αν ισχύει $e^{f(x)}+2e^x-x\alpha\ge e+2$ για κάθε $x>-e$

στ) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln(x+e)}{\ln(x^2+e)}dx>\frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ 10ο

Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, για την οποία ισχύουν:

- $f(1)=0$
- $x^2f'(x)+1=4\displaystyle\int_1^e f(x)dx-xf(x)$, για κάθε $x>0$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{\ell nx}{x}$, για κάθε $x>0$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)\le x-1$, για κάθε $x>0$

γ) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^1\frac{f(2x+3)-x}{e^x}dx<3-\frac{4}{e}$

δ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και $g(x)=-x^2$ αντιστοίχως έχουν μια τουλάχιστον κοινή εφαπτομένη.

ΘΕΜΑ 11ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x<1\\ e^{x-1}+\ell nx-2, & x\ge1\end{cases}$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

ε) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

στ) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x)=\alpha$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

ζ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa>1$ υπάρχει μοναδικό $\xi\in(1,+\infty)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$f(\xi)=\frac{f(\kappa)+\kappa f(\kappa+1)+(\kappa+1)f(\kappa+2)}{2(\kappa+1)}$$

ΘΕΜΑ 12ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & , x<0\\ \ell n(e^x+x) & , x\geq 0\end{cases}$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια:

i) στο πεδίο ορισμού της.

ii) στο διάστημα $[0,+\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία y=x

ε) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha>0$, η εξίσωση $\dfrac{e^{f(x)}-f(x)}{x}+\dfrac{f(x)}{x-\alpha}=0$ (Ι), έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0,\alpha)$.

στ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{x^2}-1)+f\left(|x|-|\eta\mu x|\right)=0$.

ζ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

ΘΕΜΑ 13ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-2x^2+2x$ και η ευθεία ε που εφάπτεται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f στα σημεία της $A(x_1,f(x_1))$ και $B(x_2,f(x_2))$ με $x_1\neq x_2$

α) Να βρείτε τα σημεία Α, Β και την εξίσωση της ευθείας ε.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και την ευθεία ε.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(-2,-1)$, στο οποίο η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ακρότατο.

ΘΕΜΑ 14ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x}{x^x} & , x>0\\ 1 & , x=0\end{cases}$ και $g(x)=\ln^2 x-\dfrac{1}{x}$, $x>0$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

δ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη κυρτότητα και να αποδείξετε ότι η C_f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής.

ΘΕΜΑ 15ο

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,\pi]\to R$ για την οποία ισχύουν:

- $(1+\eta\mu x)^2 f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x\in[0,\pi]$
- $f(0)=0$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=1-\dfrac{1}{1+\eta\mu x}$, $x\in[0,\pi]$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x-x}{xf(x)}$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $2f(x)=(2x-\pi)f'(x)+1$

ε) Να εξετάσετε αν η ευθεία $x=\rho$, όπου ρ η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος (δ), χωρίζει το χωρίο Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και τον άξονα x΄x, σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

ΘΕΜΑ 16ο

Δίνεται η συνάρτηση $f:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to R$, με $f(x)=\sqrt{\varepsilon\varphi x}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\dfrac{1+f^4(x)}{2f(x)}$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ και να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^{-1}(x)-f^{-1}(1)}{x-1}$ και να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$, στο σημείο $(1,f^{-1}(1))$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f^4(x)$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=\dfrac{\pi}{4}$.

ΘΕΜΑ 17ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, με $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ell nx}{x-1}, & 0<x\neq 1\\ \alpha, & x=1\end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και το σύνολο τιμών της είναι το $(0,+\infty)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και η εξίσωση $f^{-1}(x-1)=x$, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(2,3)$.

δ) Να αποδείξετε ότι $f'(1)=\dfrac{1}{2}$ και ότι η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $x_0=1$.

ε) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη.

στ) Να αποδείξετε ότι $(x-1)f'(x)+1<f(x)<\dfrac{x+1}{2}$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$

ΘΕΜΑ 18ο

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $2f(x) > x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f^2(x)+(4-x)f(x)=12-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f, στο κοινό της σημείο με τον άξονα y΄y.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.

γ) Θεωρούμε ότι η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο $-\infty$. Να αποδείξετε ότι $\lambda=0$, $\beta=1$ και ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A)=(1,+\infty)$.

δ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{f(x)-x+4}{x-12}$

ΘΕΜΑ 19ο

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(e^{(x^2+1)h}-1\right)\left(f(x)-f(x+2h)\right)}{4h^2}=xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=1$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης.

γ) Σημείο $M(x,f(x))$, $x>0$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Αν N είναι το συμμετρικό του ως προς τον άξονα $y'y$ και K, Λ οι προβολές των N, M αντιστοίχως στον άξονα $x'x$, να προσδιορίσετε τις κορυφές K, Λ, M, N ώστε το εμβαδόν του τετράπλευρου ΚΛΜΝ να γίνεται μέγιστο.

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

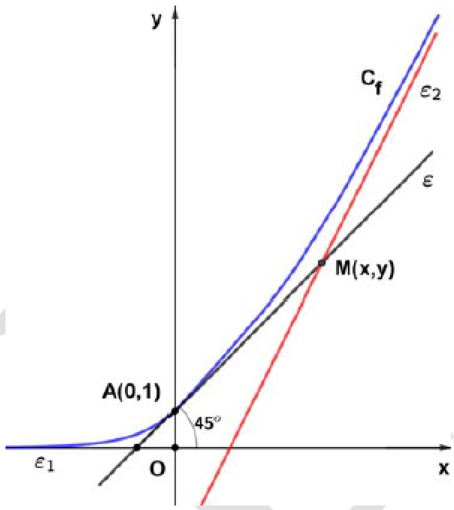
$$\frac{(x^2+1)(e^x-1)}{x^2-x+1}=x$$

ε) Να υπολογίσετε:

i) Το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x+1)f(x)}{2\eta\mu x+3}$

ii) Το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)f(x)}$

ΘΕΜΑ 20ο



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας γνησίως αύξουσας και κυρτής συνάρτησης $f: R \to R$, η οποία έχει συνεχή παράγωγο.

Η γραφική παράσταση C_f της f έχει ασύμπτωτες τις ευθείες: $\varepsilon_1: y=0$ στο $-\infty$ και την $\varepsilon_2: y=2x-3$ στο $+\infty$.

Η ευθεία ε εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(0,1)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^o.

α) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = ...$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = ...$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ...$ iv) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-2x] = ...$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f^2(x)\cdot \eta\mu\frac{1}{f(x)}\right]$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln f(x)}{f(x)-2x-1}$

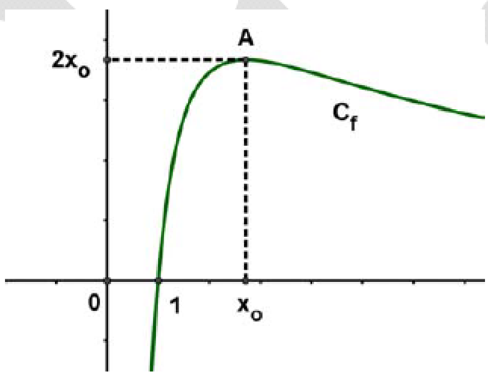
δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης $C_{f^{-1}}$ της συνάρτησης f^{-1}, θεωρώντας ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής.

ε) Να αποδείξετε ότι:

i) Η εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο $A(0,1)$ έχει εξίσωση $y=x+1$ και να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ε και ε_2

ii) $\int_0^5 f(x)\,dx > 18$.

ΘΕΜΑ 21ο



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν:

- Είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.
- Παρουσιάζει μέγιστο στη θέση x_0 με τιμή $f(x_0)=2x_0$.
- $f''(x)<0$ για κάθε $x\in(0,x_0]$.
- Έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=0$.

α) Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{f(x)}$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+f(x)}{\sqrt{x^2+1}-1}$ iii) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-2x}{(x-x_0)f(x)}$

β) Να αποδείξετε ότι ισχύει $0<\frac{2x_0}{x_0-1}<f'(1)$

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1\in(1,x_0)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_1,f(x_1))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Αν $E(\Omega)$ το εμβαδό του επιπέδου χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=x_0$, να αποδείξετε ότι:

$$E(\Omega)<2x_0(x_0-1)$$

ΘΕΜΑ 22ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με $f(1)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $f(x)\ge x\ln x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(1)=1$

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}$

Αν επιπλέον ισχύει $\displaystyle\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx=1$, τότε:

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x\ln x$ για κάθε $x\in[1,e]$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται στο διάστημα $[1,e]$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}

ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ της συνάρτησης f^{-1} διέρχεται από το σημείο $A\left(\dfrac{\sqrt{e}}{2},\sqrt{e}\right)$ και στη συνέχεια θεωρώντας ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της A

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[1,e]$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $\ln\dfrac{e+1}{2}<\dfrac{e}{e+1}$

ΘΕΜΑ 23ο

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)\to R$, με $f(e)=g(1)=1$, $f(e^{-1})=-1$ και $g(e)=e^{-1}$, οι οποίες ικανοποιούν τις συνθήκες:

- **$f'(x)=g(x)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ (1)**
- **$xf(x)f'(x)+x^2g^2(x)+x^2f(x)g'(x)=1$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ (2)**

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $x\in(0,+\infty)$

Αν επιπλέον θεωρήσουμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)g(x)$, $x\in(0,+\infty)$, τότε:

β) i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να αποδείξετε ότι $x^e\le e^x$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

γ) Να βρείτε:

i) Τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C_h της συνάρτησης h.

ii) Την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης C_h της συνάρτησης h, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν Ε του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση C_h της συνάρτησης h, την εφαπτομένη της ε και την οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$.

ε) Να βρείτε τις συναρτήσεις f και g.