

# Γεωμετρία Β΄ Λυκείου

## Εκφωνήσεις

160 ασκήσεις



20-1-2023

Στέλιος Μιχαήλογλου

[www.Askisopolis.gr](http://www.Askisopolis.gr)



# Θεώρημα Θαλή

## 2<sup>ο</sup> Θέμα

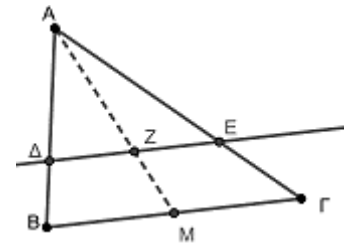
**14534.** Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=6$  και  $A\Gamma=9$ .  $AM$  είναι η διάμεσος του τριγώνου και το σημείο  $Z$  εσωτερικό στην  $AM$  ώστε να σχηματίζει

λόγο  $\frac{AZ}{AM} = \frac{2}{3}$ . Από το σημείο  $Z$  φέρουμε ευθεία παράλληλη στην πλευρά

$B\Gamma$ , που τέμνει τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα.

**α)** Να αποδείξετε ότι  $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3}$  και  $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{2}{3}$ . (Μονάδες 15)

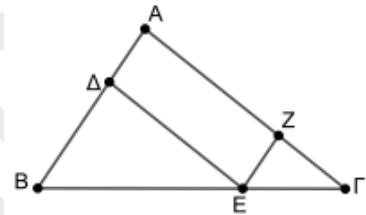
**β)** Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων  $A\Delta$  και  $GE$ . (Μονάδες 10)



**14579.** Δίνεται το τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα σημεία  $\Delta$ ,  $E$  και  $Z$  των πλευρών του  $AB$ ,  $B\Gamma$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, ώστε η  $DE$  να είναι παράλληλη στην  $A\Gamma$ . Επίσης  $AB = 3A\Delta$ .

**α)** Να βρείτε τους λόγους  $\frac{B\Delta}{A\Delta}$  και  $\frac{BE}{E\Gamma}$ . (Μονάδες 15)

**β)** Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι  $A\Gamma = 3,9$  και  $\Gamma Z = 1,3$  να αποδείξετε ότι η  $ZE$  είναι παράλληλη της  $AB$ . (Μονάδες 10)



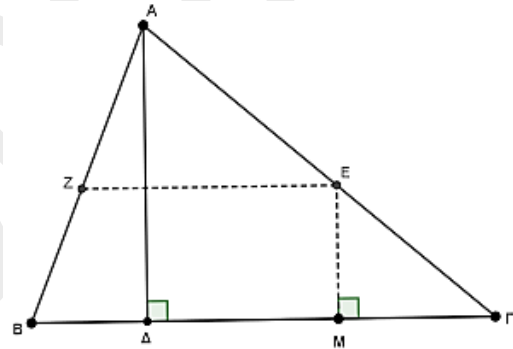
**15830.** Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  του διπλανού σχήματος, το  $A\Delta$  είναι ύψος του τριγώνου. Η κάθετος στην πλευρά  $B\Gamma$  σε ένα άλλο σημείο της  $M$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $E$ . Από το  $E$  φέρνουμε παράλληλη στην  $B\Gamma$ , που τέμνει την  $AB$  στο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:

**α)**  $\frac{ZA}{ZB} = \frac{EA}{E\Gamma}$

(Μονάδες 10)

**β)**  $\frac{ZA}{ZB} = \frac{MA}{M\Gamma}$

(Μονάδες 15)



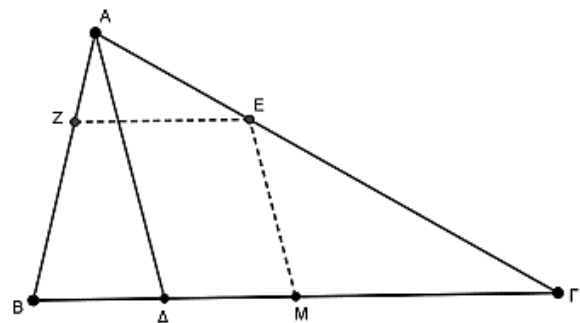
**15831.** Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  του παρακάτω σχήματος, το  $M$  είναι μέσο της πλευράς  $B\Gamma$  και το  $\Delta$  είναι το μέσο του  $MB$ . Από το  $M$  φέρνουμε παράλληλη στην  $A\Delta$ , που τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $E$ . Από το  $E$  φέρνουμε παράλληλη στην  $B\Gamma$ , που τέμνει την  $AB$  στο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:

**α)**  $\frac{EA}{E\Gamma} = \frac{1}{2}$

(Μονάδες 15)

**β)**  $\frac{ZA}{ZB} = \frac{1}{2}$

(Μονάδες 10)



**21987.** Οι ευθείες  $\Gamma\Theta$  και  $ZH$  τέμνουν τις παράλληλες ευθείες  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  και  $\epsilon_3$  στα σημεία  $\Theta$ ,  $A$ ,  $B$  και  $H$ ,  $\Delta$ ,  $E$  αντίστοιχα και την ευθεία  $\epsilon_4$  στα σημεία  $\Gamma$  και  $Z$  όπως στο παρακάτω σχήμα. Επίσης δίνονται τα μήκη  $\Theta A = 2$ ,  $AB = 1$ ,  $B\Gamma = H\Delta = 4$  και  $EZ = 8$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι  $\Delta E = 2$ .

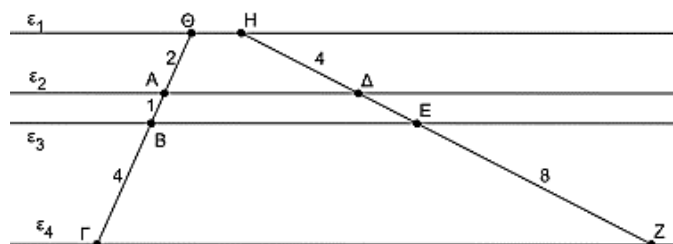
(Μονάδες 10)

**β)** Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $\epsilon_4$  είναι παράλληλη στις ευθείες  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  και  $\epsilon_3$ . (Μονάδες 05)

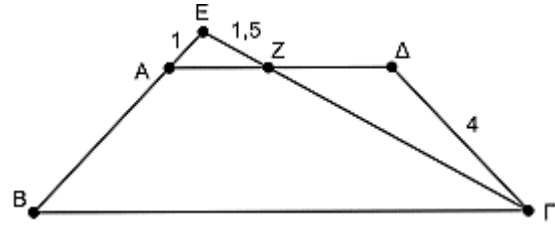
**γ)** Να σχεδιάσετε το ευθύγραμμο τμήμα  $\Theta Z$  το οποίο τέμνει την ευθεία  $\epsilon_2$  στο  $K$  και την ευθεία  $\epsilon_3$  στο  $\Lambda$

και να υπολογίσετε τον λόγο  $\frac{\Lambda Z}{K\Lambda}$ .

(Μονάδες 10)



**22132.** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = \Gamma\Delta = 4$  και με βάσεις  $AD$  και  $B\Gamma$ . Στην προέκταση της πλευράς  $BA$  προς το  $A$  παίρνουμε σημείο  $E$ , ώστε  $EA = 1$ . Το ευθύγραμμο τμήμα  $E\Gamma$  τέμνει την  $AD$  στο σημείο  $Z$  και  $EZ = 1,5$ .



α) Να αποδείξετε ότι  $Z\Gamma = 1,5AB$ . (Μονάδες 10)  
β) Να υπολογίσετε το μήκος του  $Z\Gamma$ .

(Μονάδες 05)

γ) Αν επιπλέον  $B\Gamma = 10$ , να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς  $AZ$  του τριγώνου  $EAZ$ . (Μονάδες 10)

## Ομοιότητα

### 2<sup>ο</sup> Θέμα

**14535.** Δίνονται δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  για τα οποία γνωρίζουμε ότι:  $AB = 9$ ,  $A\Gamma = 15$  και  $A = 48^\circ$ ,  $Z\Delta = 12$ ,  $ZE = 20$  και  $Z = 48^\circ$ .

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β) i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

ii. Να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους. (Μονάδες 12)

**14536.** Για δύο ισοσκελή τρίγωνα  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και  $E\Delta Z$  ( $E\Delta = EZ$ ) γνωρίζουμε ότι:

$A = 48^\circ$ ,  $Z = 66^\circ$  και  $AB = 3 \cdot E\Delta$ .

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $E\Delta Z$  είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β) i. Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των δυο τριγώνων.

ii. Να βρείτε το λόγο των βάσεων των δυο τριγώνων. (Μονάδες 12)

**14537.** Δίνονται δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  για τα οποία γνωρίζουμε ότι:

$A = 48^\circ$ ,  $B = 53^\circ$ ,  $E = 79^\circ$  και  $Z = 48^\circ$ .

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι όμοια. (Μονάδες 10)

β) i. Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων; (Μονάδες 9)

ii. Να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων. (Μονάδες 6)

**14538.** Στο διπλανό σχήμα τα τμήματα  $AB$  και  $\Delta E$  είναι παράλληλα και τα τμήματα  $A\Gamma$  και  $\Gamma E$  είναι τέτοια, ώστε  $A\Gamma = 2\Gamma E$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $E\Delta\Gamma$  είναι όμοια.

(Μονάδες 13)

β) i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δύο τριγώνων.

ii. Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων;

(Μονάδες 12)

**14546.** Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα  $AE$  και  $B\Delta$  τέμνονται στο  $\Gamma$ , τα τρίγωνα  $\Gamma AB$  και  $\Gamma \Delta E$  που σχηματίζονται είναι ισοσκελή και οι βάσεις τους  $AB$  και  $\Delta E$  είναι τέτοιες, ώστε  $AB = 2 \cdot \Delta E$ .

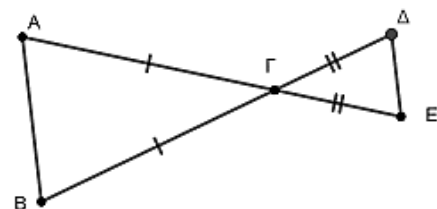
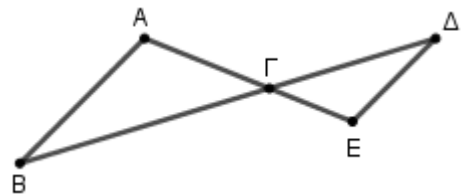
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $\Gamma AB$  και  $\Gamma \Delta E$  είναι όμοια.

(Μονάδες 13)

β) i. Να γράψετε την ισότητα των λόγων που προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων του ερωτήματος α).

ii. Ποια σχέση συνδέει τις πλευρές  $A\Gamma$  και  $\Gamma E$  των δύο τριγώνων;

(Μονάδες 12)



**16100.** Στο διπλανό σχήμα δίνονται ότι  $AE = 5$ ,  $AG = 4$ ,  $EG = 2$ ,  $DE = 6$ ,  $BE = 15$  και  $BD = 12$ .

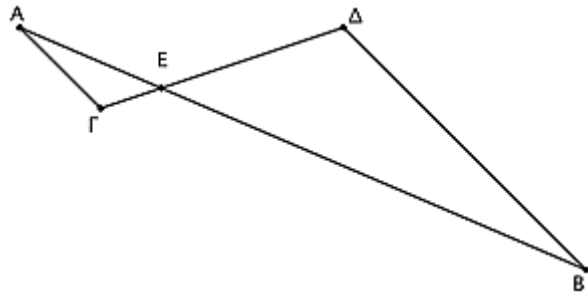
α) Να υπολογίσετε τους λόγους  $\frac{BD}{AG}$ ,  $\frac{DE}{EG}$ ,  $\frac{BE}{AE}$ .  
(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AEΓ$  και  $BED$  είναι όμοια.  
(Μονάδες 8)

γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων  $AEΓ$  και  $BED$  και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$A = \dots\dots\dots$ ,  $\Gamma = \dots\dots\dots$ ,  $\angle AEG = \dots\dots\dots$

(Μονάδες 8)

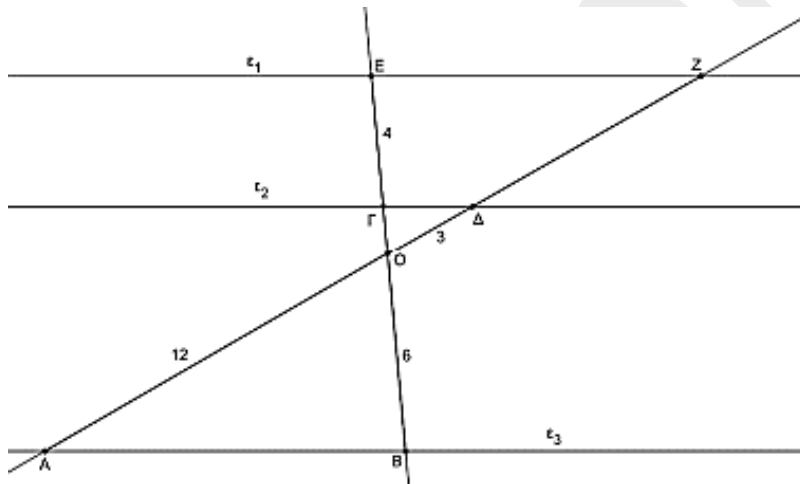


**16086.** Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  και  $\epsilon_3$  είναι παράλληλες. Δίνονται ότι  $GE = 4$ ,  $OD = 3$ ,  $OA = 12$ ,  $OB = 6$ .

α) Να υπολογίσετε τα τμήματα  $OG$  και  $DZ$ .  
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $OEZ$  και  $OBA$  είναι όμοια.  
(Μονάδες 09)

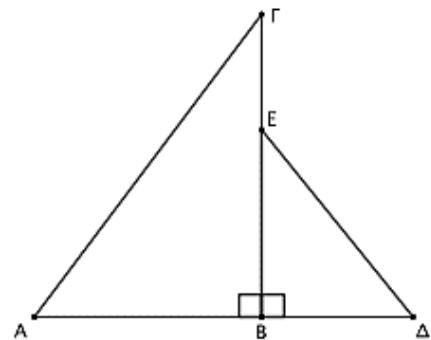
γ) Αν  $OG = 1.5$  και  $DZ = 8$ , να υπολογίσετε τον λόγο  $\frac{EZ}{AB}$ .  
(Μονάδες 06)



**16099.** Στο διπλανό σχήμα δίνονται  $A = \Delta$ ,  $AG = 36$ ,  $BD = 16$  και  $ED = 24$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $ABΓ$  και  $\Delta BE$  είναι όμοια.  
(Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε την πλευρά  $AB$ .  
(Μονάδες 10)

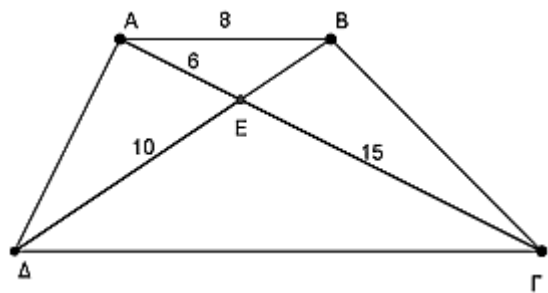


**16113.** Δίνεται το τραπέζιο  $ABΓΔ$  με  $AB \parallel \Delta\Gamma$ ,  $E$  σημείο τομής των διαγώνιων,  $AE = 6$ ,  $AB = 8$ ,  $GE = 15$  και  $DE = 10$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AEB$  και  $ΓΕΔ$  είναι όμοια.  
(Μονάδες 09)

β) Να γράψετε την αναλογία των ομόλογων πλευρών τους.  
(Μονάδες 09)

γ) Να υπολογίσετε τα τμήματα  $BE$  και  $ΓΔ$ .  
(Μονάδες 07)



**16126.** Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με  $AB = AG = 36$  και  $BΓ = 24$ .

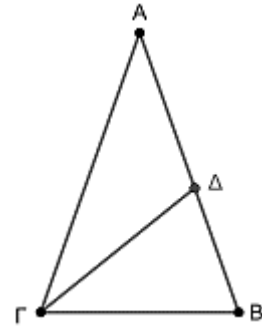
Το σημείο της Δ πλευράς AB είναι τέτοιο ώστε  $BΔ = 16$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABΓ και ΓΒΔ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\frac{3}{2}$ .

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ.

(Μονάδες 12)



**16755.** Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ με  $BΓ = 2AG$  και σημείο Δ στην πλευρά BΓ τέτοιο ώστε  $AG = 2ΓΔ$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τους λόγους  $\frac{BΓ}{AG}$  και  $\frac{AG}{ΓΔ}$ .

(Μονάδες 8)

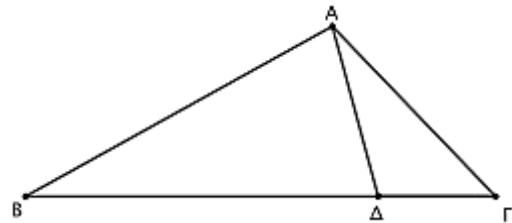
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABΓ και ΔΑΓ είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ABΓ και ΔΑΓ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$BAG = \dots\dots\dots$ ,  $B = \dots\dots\dots$

(Μονάδες 8)



**21350.** Στο σχήμα δίνονται ότι  $B = E = 90^\circ$ ,  $AE = 8$ ,  $EB = 4$  και  $DE = 4$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AED και ABΓ είναι όμοια.

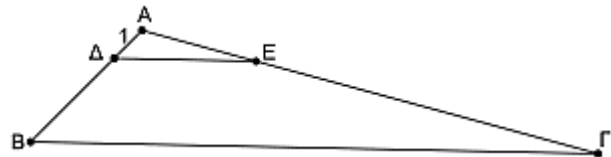
(Μονάδες 10)

β) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων AED και ABΓ.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς BΓ.

(Μονάδες 05)



**21986.** Στις πλευρές AB και AG τριγώνου ABΓ παίρνουμε σημεία Δ και E αντίστοιχα ώστε η ΔΕ να είναι παράλληλη στην BΓ και  $AD = 1$ , όπως στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι  $AE \cdot BΔ = ΓΕ$ .

(Μονάδες 10)

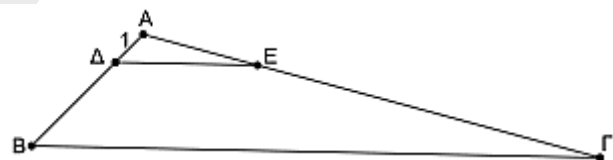
β) Αν επιπλέον  $BΔ = AE$  και  $ΓΕ = 9$ :

i. Να αποδείξετε ότι  $BΔ = 3$  και  $AB = 4$ .

(Μονάδες 10)

ii. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AΔΕ και ABΓ είναι όμοια και να υπολογίσετε το λόγο ομοιότητάς τους.

(Μονάδες 05)



#### 4<sup>ο</sup> Θέμα

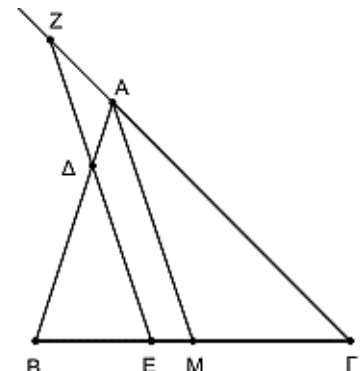
**14499.** Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Θεωρούμε AM τη διάμεσό του και E τυχαίο σημείο του τμήματος BM. Από το E φέρουμε ευθεία παράλληλη στην AM που τέμνει την πλευρά AB στο Δ και την προέκταση της ΓΑ στο Z.

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

i.  $\frac{ΔΕ}{\dots} = \frac{\dots}{BM} = \frac{BΔ}{\dots}$

ii.  $\frac{\dots}{AM} = \frac{ΓΕ}{\dots} = \frac{\dots}{ΓΑ}$

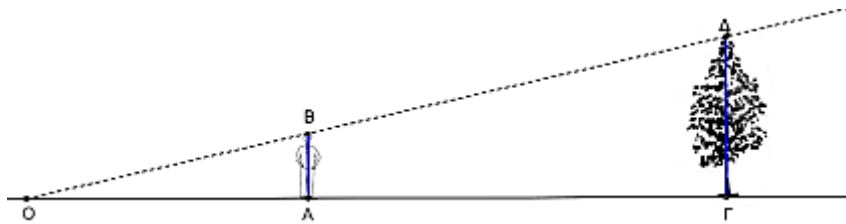
(Μονάδες 12)



β) Να αποδείξετε ότι  $\Delta E + EZ = 2AM$  για οποιαδήποτε θέση του E στο BM.

(Μονάδες 13)

**22102.** Για να βρει το ύψος ενός δέντρου, ένας μαθητής ύψους 1,60 m σκέφτηκε να μετρήσει το μήκος της σκιάς του δέντρου και το μήκος της δικιάς του σκιάς πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο κάποια χρονική στιγμή μιας ηλιόλουστης ημέρας. Στέκεται σε θέση έτσι ώστε, η άκρη της σκιάς του να συμπίπτει με την άκρη της σκιάς του δέντρου. Ο μαθητής μετράει και βρίσκει ότι η σκιά του έχει μήκος 2m και η σκιά του δέντρου ότι έχει μήκος 5m. Στο σχέδιο που ακολουθεί, τα τμήματα OA και OG, με κοινό άκρο O, αναπαριστούν τα μήκη των σκιών του μαθητή και του δέντρου αντίστοιχα και έχουν τον ίδιο φορέα OG, τα δε τμήματα AB και ΓΔ αναπαριστούν τα αντίστοιχα ύψη μαθητή και δέντρου και θεωρούνται κάθετα στην OG.



α) i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AOB και ΓΟΔ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

(Μονάδες 12)

ii. Να βρείτε το ύψος του δέντρου.

(Μονάδες 8)

β) Μπορεί ο μαθητής να χρησιμοποιήσει την ίδια μέθοδο για να μετρήσει το ύψος του ίδιου δέντρου μια άλλη ώρα της ημέρας; Ποια από τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος θα άλλαζαν στην περίπτωση αυτή; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 5)

(σημειώνεται ότι τα σχέδια δεν έχουν γίνει υπό κλίμακα)

**22565.** Οι μαθητές θέλοντας να μετρήσουν την απόσταση των σημείων A και B στην αυλή του σχολείου τους μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται ένα κτίσμα και η απευθείας μέτρηση του μήκους AB είναι αδύνατη, εργάστηκαν ως εξής. Στην αυλή τους επέλεξαν σημείο O ώστε η μέτρηση των τμημάτων OA και OB να είναι εφικτή, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μέτρησαν και βρήκαν  $OA=20m$  και  $OB=30m$ . Στις OA και OB πήραν σημεία Γ και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε  $OG=2m$  και  $OD=3m$ .

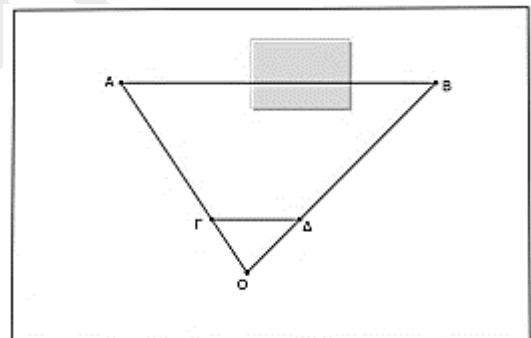
α) Να αποδείξετε ότι:

i. η ΓΔ είναι παράλληλη με την AB, (Μονάδες 8)

ii. τα τρίγωνα ΟΓΔ και ΟΑΒ είναι όμοια. (Μονάδες 7)

β) Ένας από τους μαθητές υποστηρίζει ότι μπορούν να υπολογίσουν την απόσταση των σημείων A και B αν γνωρίζουν την απόσταση των δύο σημείων Γ και Δ. Είναι ο ισχυρισμός του μαθητή αληθής; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)





## Πυθαγόρειο Θεώρημα

2<sup>ο</sup> Θέμα

**16805.** Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ του σχήματος είναι 72 και το Ε είναι σημείο στην πλευρά ΑΒ. Τα μήκη των τμημάτων  $x$ ,  $y$ ,  $z$  είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι  $x = 8$ ,  $y = 16$  και  $z = 12$ .

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΓΕΔ.

(Μονάδες 12)

**16757.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με  $A = 90^\circ$ ,  $AB = 6$  και  $AG = 3$ . Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά ΑΒ, τέτοιο ώστε  $AD = 4$ . Φέρουμε την απόσταση ΒΕ της κορυφής Β από την ΓΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το τμήμα ΓΔ.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ.

(Μονάδες 8)

**17342.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με  $BG = 7$ ,  $\Gamma = 45^\circ$  και ύψος  $AD = 4$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $\Gamma\Delta = 4$ .

(Μονάδες 5)

ii.  $AG = 4\sqrt{2}$ .

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΒ.

(Μονάδες 12)

**21067.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με  $A = 90^\circ$ ,  $AG = 12$  και  $AB = 5$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $BG = 13$ .

(Μονάδες 08)

β) Φέρουμε ημιευθεία Βχ κάθετη στη ΒΓ στο σημείο Β και παίρνουμε σε αυτή σημείο Δ, τέτοιο ώστε  $\Delta\Gamma = 14$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι  $B\Delta = 3\sqrt{3}$ .

(Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίσετε την προβολή της ΒΔ στην ΔΓ.

(Μονάδες 09)

**22130.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $A = 90^\circ$ ) εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Αν οι πλευρές του τριγώνου είναι  $B\Gamma = \alpha$ ,  $A\Gamma = \beta$  και  $AB = \gamma$ , τότε να αποδείξετε ότι:

α)  $\alpha = 2R$ .

(Μονάδες 12)

β)  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 8R^2$ .

(Μονάδες 13)

**22514.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $A = 90^\circ$ ) με  $B\Gamma = 5$  και  $AB = 4$ .

Να υπολογίσετε:

α) την πλευρά ΑΓ.

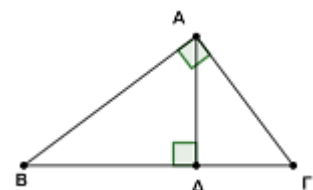
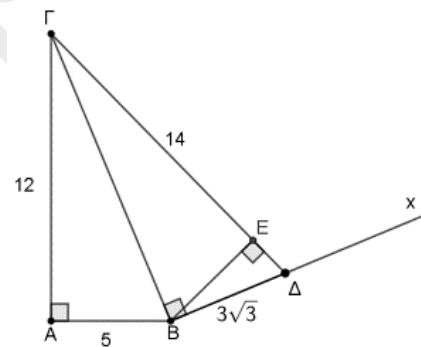
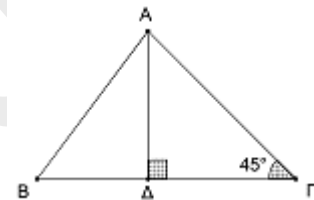
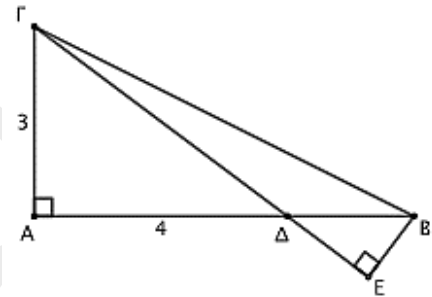
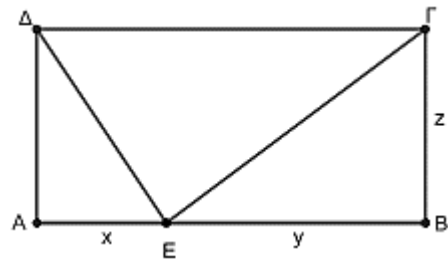
(Μονάδες 9)

β) την προβολή της πλευράς ΑΒ πάνω στη ΒΓ.

(Μονάδες 8)

γ) το ύψος ΑΔ.

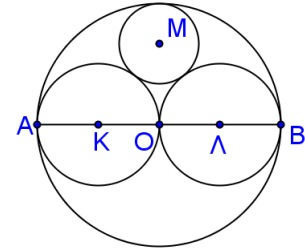
(Μονάδες 8)





4<sup>ο</sup> Θέμα

**14500.** Δύο ίσοι κύκλοι  $(K, R)$  και  $(\Lambda, R)$  εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο  $O$ . Ένας τρίτος κύκλος  $(M, \rho)$  εφάπτεται εξωτερικά με τους δύο κύκλους κέντρων  $K$  και  $\Lambda$ . Με κέντρο το σημείο  $O$  και ακτίνα  $2R$  γράφουμε κύκλο, ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά των 3 παραπάνω κύκλων, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



(Μονάδες 06)

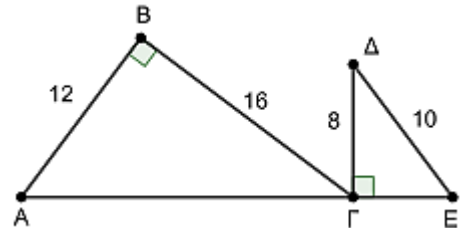
**α)** Στον παρακάτω πίνακα, στη στήλη Α είναι οι διάκεντροι  $KM$ ,  $\Lambda M$  και  $OM$  των κύκλων με κέντρα  $K$ ,  $\Lambda$ ,  $M$  και  $O$  και στη στήλη Β τα μήκη των διακεντρών αυτών. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα αντίστοιχα της στήλης Β, γράφοντας στη κόλλα σας μόνο τις αντιστοιχίες.

| Στήλη Α        | Στήλη Β         |
|----------------|-----------------|
| Διάκεντρος     | Μήκος           |
| 1. $K\Lambda$  | i. $R$          |
| 2. $\Lambda M$ | ii. $2R$        |
| 3. $OM$        | iii. $R + \rho$ |
|                | iv. $2R - \rho$ |

**β)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $MK\Lambda$  είναι ισοσκελές και ότι το τμήμα  $MO$  είναι το ύψος προς τη βάση του. (Μονάδες 06)

**γ)** Να βρείτε την ακτίνα  $\rho$  του κύκλου κέντρου  $M$  ως συνάρτηση του  $R$  όπου  $R$  η ακτίνα των κύκλων κέντρων  $K$  και  $\Lambda$ . (Μονάδες 13)

**16133.** Στο διπλανό σχήμα, τα ευθύγραμμα τμήματα  $AB$ ,  $B\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$  και  $\Delta E$  έχουν μήκη αντίστοιχα 12, 16, 8 και 10, οι γωνίες  $\angle AB\Gamma$  και  $\angle \Gamma\Delta E$  και είναι ορθές και τα σημεία  $A$ ,  $\Gamma$  και  $E$  ανήκουν στην ίδια ευθεία.



**α)** Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος  $AE$ . (Μονάδες 7)

**β)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $E\Gamma\Delta$  είναι όμοια. (Μονάδες 7)

**γ)** Έστω ότι το σημείο τομής των ευθειών  $AB$  και  $ED$  είναι το  $Z$  και  $SH$  είναι το ύψος του τριγώνου  $ZAE$  από την κορυφή του  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:

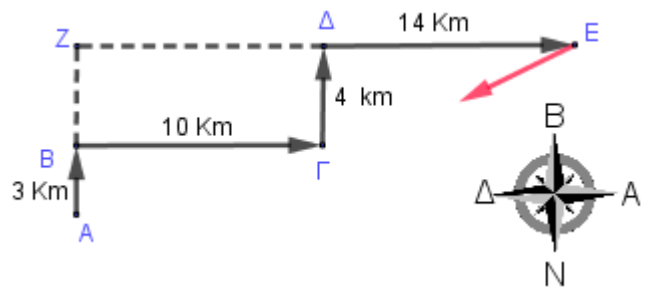
i.  $EH = 13$ ,

(Μονάδες 6)

ii.  $ZH = \frac{52}{3}$

(Μονάδες 5)

**14533.** Δυο κινητά βρίσκονται στο σημείο  $A$  και σκοπεύουν να μεταβούν στο σημείο  $E$ , που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο  $A$  και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια προχωράει 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο  $E$ . Το δεύτερο κινητό ξεκινάει από το σημείο  $A$  κινείται βόρεια μέχρι το σημείο  $Z$  και συνεχίζει ανατολικά μέχρι το σημείο  $E$ . Όταν συναντιούνται στο σημείο  $E$  επιστρέφουν μαζί στο σημείο  $A$  κινούμενα ευθύγραμμα.



**α)** i. Πόσα χιλιόμετρα διάνυσε το κάθε κινητό από το σημείο  $A$  στο σημείο  $E$  με τον τρόπο που κινήθηκε; (Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε την απόσταση  $AE$  που διάνυσαν τα δύο κινητά κατά την επιστροφή από το σημείο  $E$  στο σημείο  $A$  κινούμενα ευθύγραμμα. (Μονάδες 12)

**β)** Επιστρέφοντας τα δύο κινητά από το σημείο  $E$  στο σημείο  $A$ , θα περάσουν από το σημείο  $\Gamma$ ; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 08)

**17348.** Στο διπλανό σχήμα το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο με  $AB = 6$  και το  $E$  σημείο της πλευράς  $B\Gamma$ , ώστε  $BE = 2$ . Έστω  $\Delta Z$  το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο  $\Delta$  προς την  $AE$ .

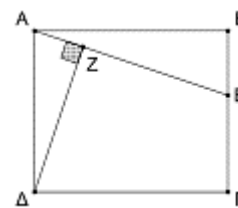
**α)** Να αποδείξετε ότι  $AE = 2\sqrt{10}$ .

(Μονάδες 8)

**β)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $ABE$  και  $\Delta ZA$  είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία που προκύπτει από τους λόγους των ομολόγων πλευρών τους.

(Μονάδες 9)

**γ)** Αν  $\Delta Z = ZE$ , να υπολογίσετε το μήκος του  $A\Delta$ .



(Μονάδες 8)

**21149.** Σε κύκλο κέντρου  $O$  και ακτίνας  $R$  θεωρούμε διάμετρο  $AB$  και σημείο  $\Gamma$  του κύκλου τέτοιο ώστε  $BA\Gamma = 30^\circ$ , όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν  $B\Gamma = 2$ , τότε:

**α)** Να υπολογίσετε:

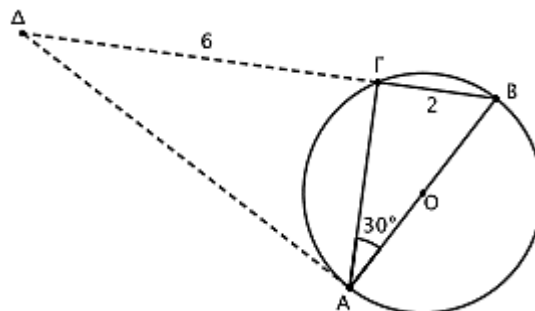
i. Την ακτίνα  $R$ .

ii. Το μήκος της πλευράς  $A\Gamma$ .

(Μονάδες 16)

**β)** Θεωρούμε σημείο  $\Delta$  στην προέκταση της  $B\Gamma$  τέτοιο ώστε  $\Gamma\Delta = 6$ . Να εξετάσετε αν το τμήμα  $\Delta A$  εφάπτεται του κύκλου στο σημείο  $A$ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)



## Γενίκευση πυθαγορείου θεωρήματος

### 2<sup>ο</sup> Θέμα

**14549.** Τα μήκη των πλευρών  $\alpha, \beta, \gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι :  $\alpha=7, \beta=3$  και  $\gamma=5$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι αμβλυγώνιο.

(Μονάδες 12)

**β)** Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς  $AB$  στην πλευρά  $A\Gamma$  και να υπολογίσετε το μήκος της.

(Μονάδες 13)

**16080.** Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = 5, B\Gamma = \sqrt{41}$  και  $A\Gamma = 8$ .

**α)** Να σχεδιάσετε την προβολή  $A\Delta$ , της  $AB$  στην  $A\Gamma$  και να υπολογίσετε το μήκος της.

(Μονάδες 13)

**β)** Αν  $A\Delta = 3$ , να υπολογίσετε το μήκος του ύψους  $B\Delta$ .

(Μονάδες 12)

**16101.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $AB = 8, A\Gamma = 6$  και  $B\Gamma = 11$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι αμβλυγώνιο.

(Μονάδες 10)

**β)** Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς  $A\Gamma$  πάνω στην  $AB$  και να υπολογίσετε το μήκος της.

(Μονάδες 15)

**16804.** Στο διπλανό τρίγωνο  $AB\Gamma$  φέρουμε τα όψη του  $AH$  και  $B\Theta$ .

**α)** Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i. Η προβολή την πλευράς  $B\Gamma$  στην πλευρά  $A\Gamma$  είναι το τμήμα .....

ii. Η προβολή τη πλευράς  $AB$  στην πλευρά  $B\Gamma$  είναι το τμήμα .....

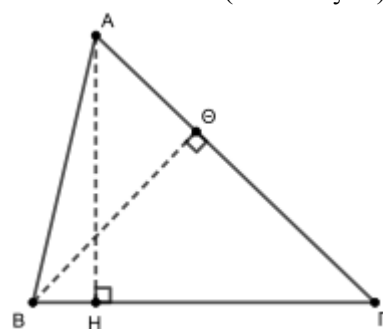
iii. Το τμήμα  $H\Gamma$  είναι η προβολή της πλευράς .....

στην πλευρά .....

iv. Το τμήμα  $A\Theta$  είναι η προβολή της πλευράς ..... στην πλευρά .....

v.  $A\Gamma^2 = AB^2 + \dots - 2B\Gamma \cdot \dots$

vi.  $B\Gamma^2 = \dots + A\Gamma^2 - 2\dots \cdot A\Theta$



(Μονάδες 15)

**β)** Αν  $AB = 4, B\Gamma = 5$  και  $A\Gamma = 6$ , να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος  $A\Theta$ .

(Μονάδες 10)

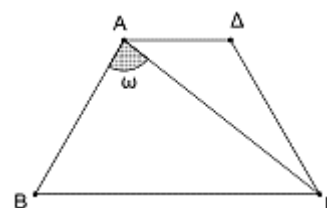
**17343.** Στο τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  του διπλανού σχήματος είναι  $A\Delta = 3$ ,

$AB = \Gamma\Delta = 5, B\Gamma = 8$  και  $\Delta = 120^\circ$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι  $A\Gamma = 7$ .

(Μονάδες 10)

**β)** Να αποδείξετε ότι  $\sin \omega = \frac{1}{7}$ , όπου  $\omega$  είναι η γωνία  $BA\Gamma$ .



Δίνεται ότι  $\sin 120^\circ = -\frac{1}{2}$ .

(Μονάδες 15)

**17354.** Στα παρακάτω τρίγωνο ΔΕΖ φέρουμε τα όψη του ΔΚ και ΖΙ.

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i. Η προβολή της πλευράς ΔΕ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα .....

ii. Η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα .....

iii. Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς ..... στην πλευρά .....

iv. Το τμήμα ΕΙ είναι η προβολή της πλευράς ..... στην πλευρά .....

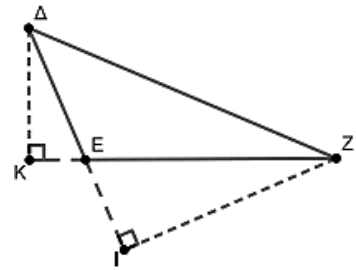
v.  $\Delta Z^2 = \Delta E^2 + \dots + 2EZ \cdot \dots$

vi.  $EZ^2 = \dots + \Delta Z^2 - 2 \dots \cdot \Delta I$

(Μονάδες 15)

β) Αν  $\Delta E = 2$ ,  $EZ = 4$  και  $\Delta Z = 5$ , να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΙ.

(Μονάδες 10)



**21302.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με  $AB = 5$  και  $AD$  το ύψος του από την κορυφή Α. Αν  $BD = 3$  και  $ΓΔ = 8$  να αποδείξετε ότι:

α)  $AD = 4$ .

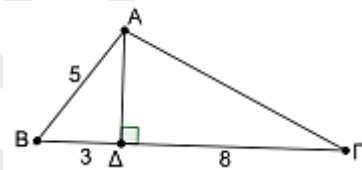
(Μονάδες 07)

β)  $AG = \sqrt{80}$ .

(Μονάδες 08)

γ) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

(Μονάδες 10)



**22248.** Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με  $AB = 9$ ,  $GA = 12$  και  $GB = 15$  και ευθείες ε, δ παράλληλες στην ΑΒ, όπως αυτές του σχήματος.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να βρείτε ποια πλευρά είναι η υποτείνουσά του.

(Μονάδες 8)

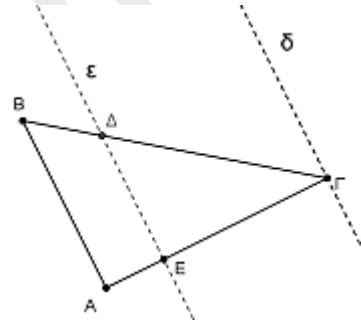
β) Αν η ευθεία (ε) τέμνει τις πλευρές ΓΑ, ΓΒ σε σημεία Ε και Δ αντίστοιχα έτσι ώστε  $EA = 4$  και η ευθεία (δ) διέρχεται από το σημείο Γ, τότε να υπολογίσετε

i. το τμήμα ΔΒ,

(Μονάδες 8)

ii. τις πλευρές του τριγώνου ΔΕΓ.

(Μονάδες 9)



**22512.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με  $BΓ = 4$ ,  $ΑΓ = 2$  και  $\Gamma = 60^\circ$ .

α) Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΒ.

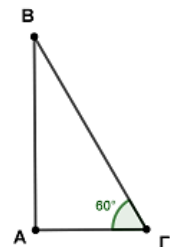
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 8)



#### 4ο Θέμα

**21185.** Τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα αυτά μπορούν να σχηματίσουν ορθογώνιο τρίγωνο.

(Μονάδες 8)

β) Αν τα ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ είναι σχεδιασμένα πάνω σε ένα χαρτί και αυτό το φωτοτυπήσουμε με μεγέθυνση λ%, να αποδείξετε ότι και με τα νέα ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζεται πάλι ορθογώνιο τρίγωνο.

(Μονάδες 10)

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί να σχηματιστεί τρίγωνο με πλευρές 10α, 8β και 6γ.

(Μονάδες 7)

**22400.** Τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ενός τριγώνου ΑΒΓ. Δίνεται ότι  $AB=9$ ,  $AG=12$ ,  $AD=4$  και  $AE=3$ .

**α)** Έστω ότι στο παραπάνω τρίγωνο ΑΒΓ είναι  $BΓ=15$  (Σχήμα 1).

Να αποδείξετε ότι:

**i.** Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 7)

**ii.**  $ΔΕ=5$ .

(Μονάδες 6)

**β)** Έστω τώρα ότι στο αρχικό τρίγωνο ΑΒΓ είναι  $BΓ=10$ , (Σχήμα 2).

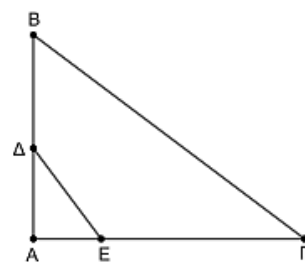
Να αποδείξετε ότι:

**i.** Το τρίγωνο ΑΒΓ δεν είναι ορθογώνιο.

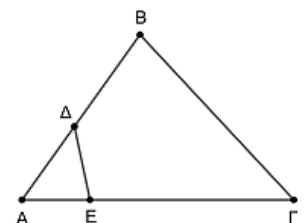
(Μονάδες 6)

**ii.**  $ΔΕ=\frac{10}{3}$ .

(Μονάδες 6)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

### 3<sup>ο</sup> Θέμα

**21102.** Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και έστω Ε το μέσο της ΔΓ.

**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.**  $AG = \alpha\sqrt{2}$ .

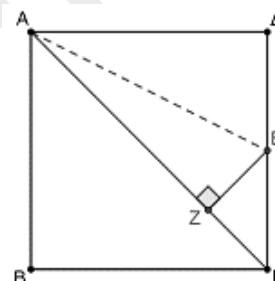
(Μονάδες 09)

**ii.**  $AE = \alpha\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

(Μονάδες 09)

**β)** Να υπολογίσετε την προβολή του τμήματος ΑΕ στην ΑΓ.

(Μονάδες 07)



## Εμβαδό βασικών σχημάτων

2<sup>ο</sup> Θέμα

**16102.** Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από το κέντρο Ο φέρουμε ευθεία η οποία τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Ε και Ζ όπως φαίνεται στο σχήμα.

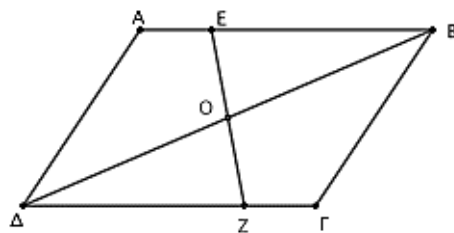
Να αποδείξετε ότι:

α)  $(\Delta OZ) = (BOE)$ .

(Μονάδες 10)

β)  $(\Delta OEA) = (B\Gamma ZO)$ .

(Μονάδες 15)



**16817.** Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α, θεωρούμε σημείο Ε της πλευράς

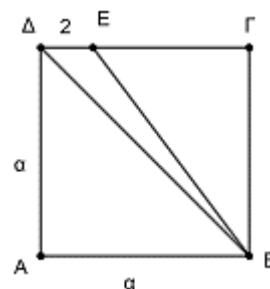
του ΔΓ έτσι ώστε  $DE = 2$ . Αν γνωρίζουμε ότι:  $(BE\Delta) = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{8}$  τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η πλευρά του τετραγώνου α είναι ίση με 8.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ.

(Μονάδες 12)



**18550.** Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ του σχήματος είναι 36 και το Ε είναι σημείο στην πλευρά ΑΒ. Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.

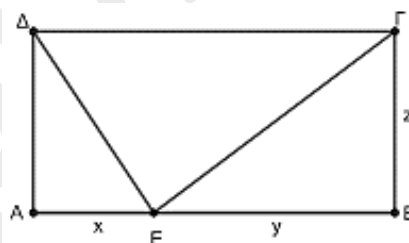
α) Να αποδείξετε ότι  $x = 4$ ,  $y = 8$  και  $z = 6$ .

(Μονάδες 13)

β) i. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ.

ii. Να βρεθεί ο λόγος του εμβαδού του τριγώνου ΓΔΕ προς το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 12)



**18559.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ έχει μήκος 3 και η πλευρά ΑΓ είναι ίση με 4.

Αν  $BE = 5$ , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ΑΕ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΓ.

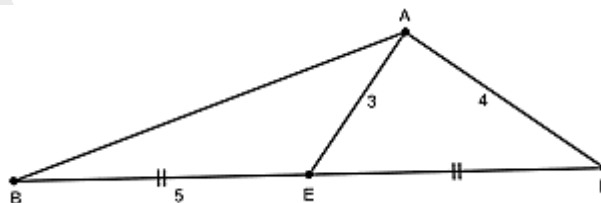
(Μονάδες 10)

β) i. Να δικαιολογήσετε γιατί  $(ABE) = (AGE)$ .

(Μονάδες 05)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 10)



**18560.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με  $B\Gamma = 13$  και  $\Gamma\Delta = 14$ . Αν ΓΕ είναι το κάθετο τμήμα από το σημείο Γ στην πλευρά ΑΒ και το τμήμα ΑΕ έχει μήκος 9, τότε:

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΓΕ.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό

i. του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

ii. του τραπεζίου ΑΕΓΔ.

(Μονάδες 12)

**21101.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές  $B\Gamma = \sqrt{3}$ ,  $AB = \sqrt{2}$ ,  $A\Gamma = 1$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\angle A = 90^\circ$ .

(Μονάδες 09)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 07)

γ) Να υπολογίσετε το ύψος ΑΔ.

(Μονάδες 09)

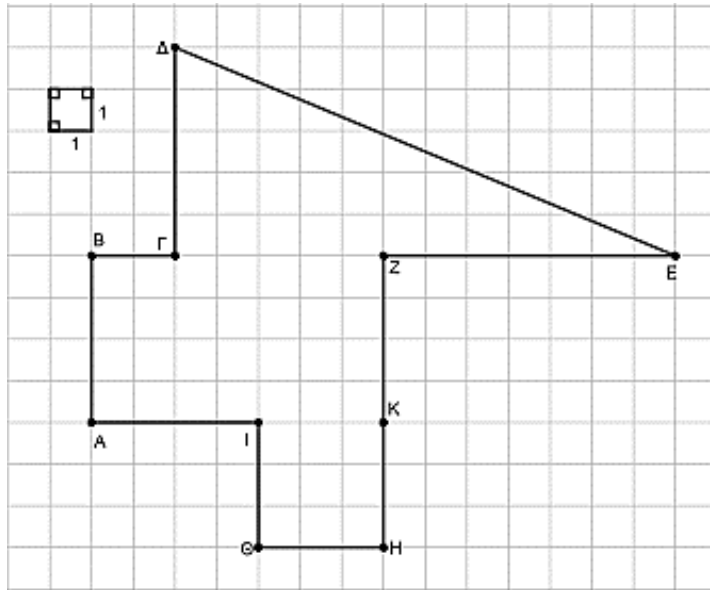
**18558.** Στο παρακάτω σχήμα:

α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΔΕ.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΑ.

(Μονάδες 15)

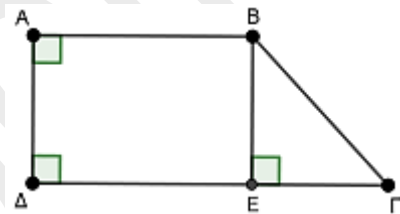


**21823.** Δίνεται το τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  του διπλανού σχήματος, με  $\angle A = \angle \Delta = 90^\circ$  και  $AD = 4$ ,  $AB = 5$ ,  $\Delta\Gamma = 8$ . Από την κορυφή  $B$  του τραπέζιου, φέρνουμε την  $BE$  κάθετη στην πλευρά  $\Delta\Gamma$ .

**α)** Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος  $EG$ . (Μονάδες 8)

**β)** Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς  $B\Gamma$  του τραπέζιου. (Μονάδες 9)

**γ)** Να υπολογίσετε το λόγο:  $\frac{(B\Delta\Gamma)}{(AB\Gamma\Delta)}$ . (Μονάδες 8)



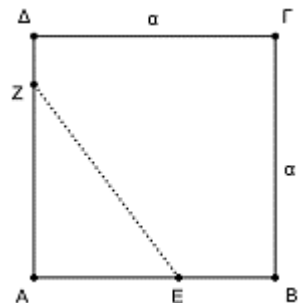
**16821.** Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  πλευράς  $a$ . Στην πλευρά  $AB$  θεωρούμε

σημείο  $E$  έτσι ώστε  $AE = \frac{3}{5} AB$  και στην πλευρά  $A\Delta$  θεωρούμε σημείο  $Z$  έτσι

ώστε  $AZ = \frac{4}{5} A\Delta$ .

**α)** Να υπολογίσετε συναρτήσει του  $a$  τα εμβαδά, του τριγώνου  $AEZ$  και του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$ . (Μονάδες 12)

**β)** Αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του πενταγώνου  $EB\Gamma\Delta Z$  είναι ίσο με 76 να υπολογίσετε το μήκος  $a$  της πλευράς του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$ . (Μονάδες 13)

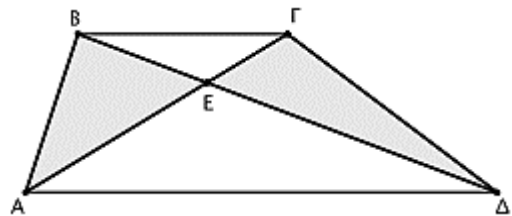


**22032.** Θεωρούμε τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $B\Gamma \parallel A\Delta$ ) και έστω  $E$  το σημείο τομής των διαγωνίων του  $A\Gamma$  και  $B\Delta$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma\Delta$  είναι ισοδύναμα.

(Μονάδες 13)

**β)** Να συγκρίνετε τα εμβαδά των γραμμοσκιασμένων τριγώνων  $ABE$  και  $\Delta\Gamma E$ . (Μονάδες 12)





**22035.** Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  του σχήματος παριστάνει την κάτοψη ενός κτήματος με  $AB = 60$  m,  $B\Gamma = 80$  m,  $\Delta = 60^\circ$  και  $A\Delta = \Gamma\Delta$ .

**α)** Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου  $A\Gamma$ .

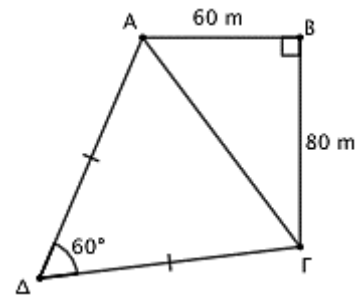
(Μονάδες 09)

**β)** Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 04)

**γ)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $A\Delta\Gamma$ . Πόσο είναι το συνολικό εμβαδόν του κτήματος;

(Μονάδες 12)



**22331.** Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  του σχήματος το  $AH$  είναι ύψος και το  $\Delta$  σημείο του  $AH$ . Δίνονται  $AB = 20$ ,  $BH = 12$ ,  $\Gamma H = 5$ , και ότι το εμβαδόν του  $AB\Delta$  είναι  $(AB\Delta) = 24$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι  $AH = 16$ .

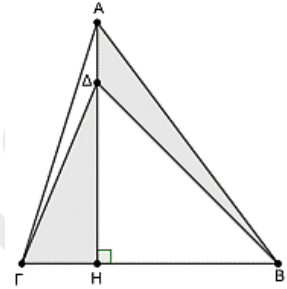
(Μονάδες 13)

**β)** Να αποδείξετε ότι  $A\Delta = 4$ .

(Μονάδες 6)

**γ)** Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $\Gamma\Delta H$ .

(Μονάδες 6)



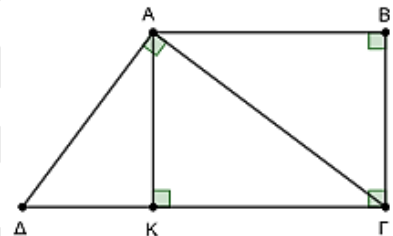
**22338.** Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $B = \Gamma = 90^\circ$  και στο οποίο η πλευρά  $A\Delta$  και η διαγώνιος  $A\Gamma$  είναι κάθετες. Έστω  $K$  η προβολή της κορυφής  $A$  στην πλευρά  $\Gamma\Delta$ ,  $K\Delta = 9$  και  $K\Gamma = 16$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι  $AK = 12$ .

(Μονάδες 12)

**β)** Να βρείτε το εμβαδόν του τραpezίου  $AB\Gamma\Delta$ .

(Μονάδες 13)



**22339.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A = 90^\circ$  και έστω  $\Delta$  η προβολή της κορυφής  $A$  στην υποτείνουσα  $B\Gamma$ . Έστω επίσης  $AB = 15$  και  $\Delta B = 9$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι:

i.  $B\Gamma = 25$ ,

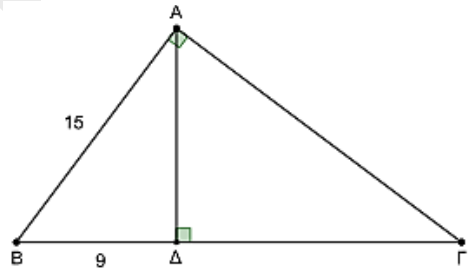
(Μονάδες 9)

ii.  $A\Gamma = 20$ .

(Μονάδες 9)

**β)** Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 7)



**22513.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = 12$ ,  $A\Gamma = 5$  και  $B\Gamma = 13$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι  $A = 90^\circ$ .

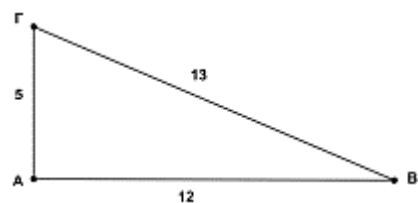
(Μονάδες 8)

**β)** Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 8)

**γ)** Να υπολογίσετε το ύψος  $u_a$ .

(Μονάδες 9)



#### 4<sup>ο</sup> Θέμα

**16807.** Δίνεται ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  με διαστάσεις  $AB = 24$ ,  $B\Gamma = 12$  και σημείο  $E$  στην ευθεία  $AB$ .

**α)** Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου  $\Gamma E\Delta$  όταν :

i. Το σημείο  $E$  είναι το μέσο της πλευράς  $AB$ .

ii. Το σημείο  $E$  ταυτίζεται με την κορυφή  $A$  του ορθογωνίου.

(Μονάδες 16)

**β)** Αφήνουμε το σημείο  $E$  να κινηθεί στην προέκταση του τμήματος  $AB$  προς το  $B$ , απομακρυνόμενο από το σημείο  $B$ .

i. Να εξετάσετε αν η περίμετρος του τριγώνου  $\Gamma E\Delta$  αυξάνεται ή μειώνεται.

(Μονάδες 05)

ii. Για το εμβαδό του τριγώνου  $\Gamma E\Delta$  συμβαίνει η ίδια μεταβολή με αυτή που απαντήσατε για την περίμετρο του τριγώνου  $\Gamma E\Delta$  στο ερώτημα β)i.; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 04)

**16135.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με υποτείνουσα  $B\Gamma = 10$  και έστω ότι  $\Delta$  είναι η προβολή της κορυφής  $A$  στην  $B\Gamma$ .



α) Αν  $\Delta B = 2$  να υπολογίσετε:

i. το ύψος  $AD$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ ,

(Μονάδες 7)

ii. το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 5)

β) Υποθέστε ότι το σημείο  $A$  κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την  $B\Gamma$ .

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι  $(AB\Gamma) = 5AD$ .

(Μονάδες 7)

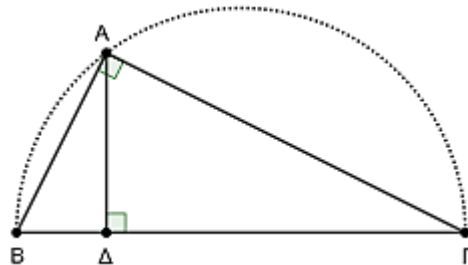
ii. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για όλες τις θέσεις του  $A$  πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την  $B\Gamma$ , το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  δεν υπερβαίνει το 25».

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)



**17349.** Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  πλευράς 3 και σημείο  $E$  της πλευράς  $AD$ , ώστε  $AE = 4 - \sqrt{3}$ . το ημιεπίπεδο που ορίζουν η ευθεία  $BE$  και το σημείο  $\Gamma$  κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο  $BEZ$ . Οι  $\Gamma\Delta$  και  $EZ$  τέμνονται στο σημείο  $H$  και  $\Delta H = \sqrt{3}$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $BE = 2\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$ .

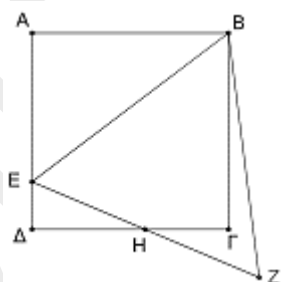
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε το  $H$  είναι το μέσο της  $EZ$ .

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ισόπλευρου τριγώνου  $BEZ$  και εξωτερικά του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$ .

(Μονάδες 9)



**18173.** Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $\Gamma\Delta = 2AB$ . Δίνεται επίσης ότι το σημείο  $K$  είναι μέσο της  $\Gamma\Delta$  και  $M$  τυχαίο σημείο στην  $AD$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $(BK\Gamma) = \frac{1}{2}(ABK\Delta)$ .

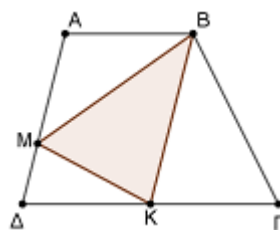
(Μονάδες 09)

ii.  $(BMK) = (BK\Gamma)$

(Μονάδες 09)

β) Δίνεται η πρόταση: «Αν το σημείο  $M$  κινείται πάνω στο εσωτερικό της  $AD$ , τότε ο λόγος των εμβαδών  $(AB\Gamma\Delta)$  και  $(MBK)$  παραμένει σταθερός και ίσος με 3». Να διερευνήσετε την ορθότητα της πρότασης αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)



**18553.** Δίνεται τετράγωνο με πλευρά  $a$  και σημείο  $\Sigma$  στην προέκταση της πλευράς  $AB$  προς το  $B$  τέτοιο ώστε  $B\Sigma = AB$ .

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του  $a$ :

i. Το εμβαδό του τριγώνου  $\Sigma\Delta\Gamma$ .

ii. Το μήκος της πλευράς  $\Sigma\Gamma$  του τριγώνου  $\Sigma\Delta\Gamma$ .

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε τυχαίο σημείο  $\Sigma'$  στην προέκταση της πλευράς  $AB$  προς το  $B$  τέτοιο ώστε  $B\Sigma' > B\Sigma$ .

Να συγκρίνετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

i. Το εμβαδό του τριγώνου  $\Sigma'\Delta\Gamma$  με το εμβαδό του τριγώνου  $\Sigma\Delta\Gamma$ .

ii. Το μήκος της πλευράς  $\Sigma'\Gamma$  με το μήκος της πλευράς  $\Sigma\Gamma$  των τριγώνων  $\Sigma'\Delta\Gamma$  και  $\Sigma\Delta\Gamma$  αντίστοιχα.

iii. Τις αποστάσεις του σημείου  $\Delta$  από τις ευθείες  $\Sigma\Gamma$  και  $\Sigma'\Gamma$ .

(Μονάδες 15)

**18557.** Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με βάσεις  $AB$  και  $\Gamma\Delta$ , ώστε  $AB > \Gamma\Delta$ . Από τις κορυφές  $\Gamma$  και  $\Delta$  φέρουμε  $\Gamma E \parallel AD$  και  $\Delta Z \parallel GB$ , με  $E$  και  $Z$  σημεία στην πλευρά  $AB$  του τραπεζίου.

α) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τετραπλεύρων  $A\Delta\Gamma E$  και  $B\Gamma\Delta Z$ .

(Μονάδες 9)

β) Να εκφράσετε τις περιμέτρους των τετραπλεύρων  $A\Delta\Gamma E$  και  $B\Gamma\Delta Z$  ως συνάρτηση των πλευρών του τραπεζίου  $AB\Gamma\Delta$ .

(Μονάδες 8)

γ) Πώς θα πρέπει να κατασκευάσουμε το τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ώστε τα τετράπλευρα  $A\Delta\Gamma E$  και  $B\Gamma\Delta Z$  να έχουν ίσες περιμέτρους και ίσα εμβαδά;

(Μονάδες 8)

**18562.** Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος της διαγωνίου ΒΔ ισούται με  $a\sqrt{2}$  και να βρείτε το εμβαδό του. (Μονάδες 05)

β) i. Να σχεδιάσετε το τετράγωνο ΒΔΖΗ έτσι ώστε το σημείο Α να είναι εσωτερικό σημείο του και να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι το κέντρο του τετραγώνου ΒΔΖΗ. (Μονάδες 07)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΒΔΖΗ και να το συγκρίνετε με το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 08)

γ) Επαναλαμβάνουμε το σχεδιασμό όπως περιγράφηκε παραπάνω και σχηματίζουμε νέο τετράγωνο, με πλευρά κάθε φορά, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου. Δηλαδή με πλευρά τη διαγώνιο ΔΗ του τετραγώνου ΒΔΖΗ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο, το ΔΗΘΚ. Με πλευρά τη διαγώνιο ΗΚ του ΔΗΘΚ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο κ.ο.κ. Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδό του κα είναι 16 φορές το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ, πόσες φορές ακόμα πρέπει να επαναλάβουμε το σχεδιασμό αυτό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 05)

**18564.** Ο παππούς του Πέτρου έχει έναν κήπο σχήματος ορθογωνίου και θέλει να φυτέψει στον μισό διάφορα λουλούδια και στο υπόλοιπο γκαζόν. Λέει λοιπόν στον Πέτρο ότι έχει σκεφτεί κάποιους απλούς τρόπους να τον χωρίσει σε δύο κομμάτια που να έχουν το ίδιο εμβαδό.

α) Να σχεδιάσετε δύο (2) τρόπους με τους οποίους χωρίζεται ο κήπος σε δύο κομμάτια ίδιου εμβαδού και να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας. (Μονάδες 10)

β) Ο Πέτρος προτείνει στον παππού του έναν δικό του τρόπο για το χωρισμό. Για να ορίσει το κομμάτι που κα φυτευτεί με λουλούδια χρησιμοποιεί τρεις πέτρες. Τοποθετεί την πρώτη πέτρα σε ένα εσωτερικό σημείο της μιας πλευράς του κήπου και τις άλλες δύο στις απέναντι κορυφές του ορθογωνίου. Δείχνει στον παππού του το τρίγωνο που σχηματίζεται εξηγώντας του πως είναι το μισό του κήπου. Προτείνει δε στον παππού του, το τριγωνικό χωρίο που σχηματίζεται, να το μετακινήσει εκείνος σε όποια θέση νομίζει καλύτερα μετακινώντας μόνο την πρώτη πέτρα, χωρίς παρ' όλα αυτά να αλλάξει το εμβαδό του.

i. Να σχεδιάσετε τον τρόπο που προτείνει ο Πέτρος και να αποδείξετε ότι, το εμβαδό του σχηματιζόμενου τριγωνικού χωρίου είναι το μισό του κήπου. (Μονάδες 08)

ii. Τι εννοεί ο Πέτρος λέγοντας ότι «το τριγωνικό χωρίο μπορεί να μετακινηθεί όταν αλλάζει η θέση της πρώτης πέτρας σε εσωτερικό σημείο της πλευράς του κήπου και παρ' όλα αυτά δεν αλλάζει το εμβαδό του»; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

**18565.** Δίνονται δύο κύκλοι με κέντρα Ο και Κ.

Ο κύκλος με κέντρο Ο έχει ακτίνα  $R=7$  ενώ ο κύκλος με κέντρο Κ έχει ακτίνα  $r=2$ .

Το τμήμα ΑΒ είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των δύο κύκλων και το τμήμα ΚΕ είναι παράλληλο στο τμήμα ΑΒ με Ε σημείο του τμήματος ΟΑ. Η διάκεντρος ΟΚ τέμνει τον κύκλο (Ο, R) στο σημείο Γ και τον κύκλο (Κ, r) στο σημείο Δ.

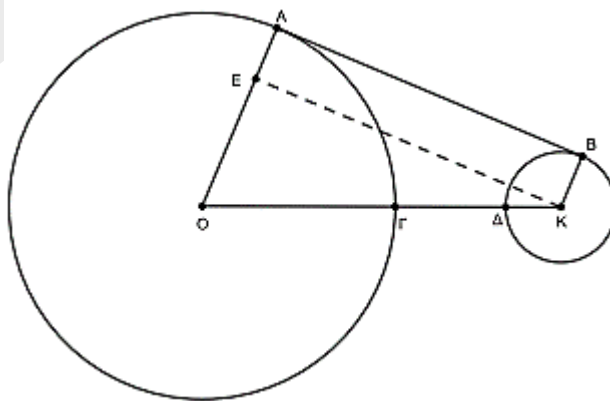
α) Αν η θέση των δύο κύκλων είναι τέτοια ώστε, η απόσταση των σημείων Γ και Δ είναι  $ΓΔ=4$ , τότε:

i. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΚΟ. (Μονάδες 07)

β) Ποια πρέπει να είναι η σχετική θέση των 2 κύκλων, ώστε το εμβαδόν του ΑΒΚΕ να ισούται

με  $4\sqrt{14}$  τ.μ. ; (Μονάδες 08)



**18566.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με  $\angle A = 90^\circ$ .

Με πλευρά την υποτεινούσα ΒΓ και έξω από το τρίγωνο, γράφουμε το τετράγωνο ΒΓΔΕ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το Α και παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε  $BZ = BΓ$ . Από τα σημεία Γ και Ζ φέρουμε παράλληλες προς τα τμήματα ΒΖ και ΒΓ αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο Η.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΒΓΗΖ είναι ρόμβος και να βρείτε τις περιμέτρους του ρόμβου και του τετραγώνου. (Μονάδες 10)

β) Δίνονται οι ισχυρισμοί:

**Ισχυρισμός 1:** «Ο ρόμβος και το τετράγωνο αφού έχουν ίσες περιμέτρους, θα έχουν και ίσα εμβαδά».

**Ισχυρισμός 2:** «Ο ρόμβος έχει μικρότερο εμβαδό από το τετράγωνο και μάλιστα, όπως έχουν κατασκευαστεί τα δύο τετράπλευρα δεν γίνεται να είναι ποτέ ισεμβαδικά». Εξετάστε ποιος από τους 2 παραπάνω ισχυρισμούς είναι σωστός και να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

**21124.α)** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με πλευρές  $a = 40$ ,  $\beta = 25$ ,  $\gamma = 25$  και αντίστοιχα ύψη  $u_a, u_b, u_\gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 6)

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι  $E = 300$  και τα ύψη του είναι  $u_a = 15$  και  $u_b = u_\gamma = 24$ .

(Μονάδες 7)

iii. Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη  $u_a, u_b, u_\gamma$  είναι οξυγώνιο. (Μονάδες 7)

**β)** Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγώνιου τριγώνου, είναι ισοσκελές και οξυγώνιο.»

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

**21183.** Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  έχει πλευρά  $\sqrt{2}$  και το τετράγωνο  $\Delta EZH$  έχει πλευρά 1.

**α)** Να αποδείξετε ότι  $AG = 2$ .

(Μονάδες 6)

**β)** Να αποδείξετε ότι

i.  $AZ^2 = 4 + 2\sqrt{2}$ .

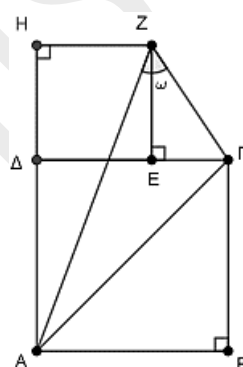
(Μονάδες 7)

ii.  $\Gamma Z^2 = 4 - 2\sqrt{2}$ .

(Μονάδες 7)

**γ)** Να υπολογίσετε σε μοίρες το μέτρο της γωνίας  $AZ\Gamma = \hat{\omega}$ .

(Μονάδες 5)



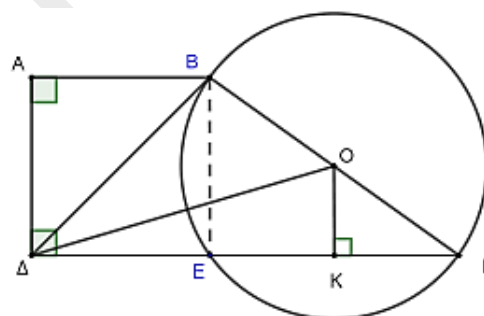
**21840.** Έστω  $AB\Gamma\Delta$  τραπέζιο με  $A = \Delta = 90^\circ$ ,  $AB = 5$ ,  $\Gamma\Delta = 13$  και εμβαδόν  $(AB\Gamma\Delta) = 54$ . Ο κύκλος με διάμετρο τη  $B\Gamma$  τέμνει τη  $\Gamma\Delta$  στο σημείο  $E$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι  $AD = 6$ . (Μονάδες 6)

**β)** Να υπολογίσετε το μήκος των  $BE$  και  $B\Gamma$ . (Μονάδες 6)

**γ)** Αν  $OK$  είναι η κάθετη από το σημείο  $O$  στην  $E\Gamma$ , να αποδείξετε ότι  $OK = 3$ , και να υπολογίσετε το μήκος της  $OD$ . (Μονάδες 6)

**δ)** Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $BDO$ . (Μονάδες 7)



**22100.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με γωνίες

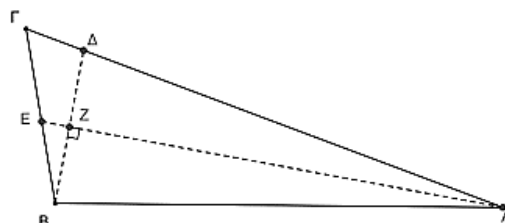
$A = 20^\circ$ ,  $B = 100^\circ$ , και η διχοτόμος  $AE$  της γωνίας του  $A$ . Από το  $B$  φέρνουμε την κάθετη προς την  $AE$  και έστω  $Z$ ,  $\Delta$  τα σημεία τομής της καθέτου με τις  $AE$ ,  $AG$  αντίστοιχα.

**α)** Να αποδείξετε ότι:

i.  $\Gamma B\Delta = A = 20^\circ$ . (Μονάδες 10)

ii. Το τρίγωνο  $B\Delta\Gamma$  είναι όμοιο με το τρίγωνο  $AB\Gamma$ , να γράψετε τα ζεύγη των ομόλογων πλευρών τους και να αιτιολογήσετε γιατί είναι αυτές οι πλευρές ομόλογες. (Μονάδες 10)

**β)** Να σχεδιάσετε εξωτερικά του τριγώνου  $AB\Gamma$  δύο τετράπλευρα: ένα τετράγωνο με πλευρά την  $B\Gamma$  και ένα ορθογώνιο που η μία του πλευρά είναι η πλευρά  $AG$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  και η άλλη του πλευρά είναι ευθύγραμμο τμήμα ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα  $\Gamma\Delta$ . Να εξετάσετε αν τα δυο τετράπλευρα, που σχεδιάσατε, έχουν ίσα εμβαδά. (Μονάδες 5)



**22104.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$  εσωτερικό της πλευράς του  $B\Gamma$ . Έστω  $M$  το μέσο  $M$  του τμήματος  $A\Delta$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι:

i.  $(ABM) = \frac{1}{2}(AB\Delta)$ . (Μονάδες 8)

ii.  $(ABM) + (M\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$ . (Μονάδες 9)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει θέση του σημείου Δ τέτοια ώστε τα τρίγωνα ABM και MΔΓ να έχουν ίσα εμβαδά. Στην περίπτωση που υπάρχει θέση του σημείου Δ για την οποία τα εμβαδά των τριγώνων ABM και MΔΓ είναι ίσα, να βρείτε τι μέρος του εμβαδού του τριγώνου ABΓ είναι το εμβαδόν του κάθε τριγώνου ABM και MΔΓ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

**22396.** Στο διπλανό σχήμα, δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με  $AB = AG$  και έστω Δ η προβολή του σημείου Β πάνω στην ευθεία ΑΓ.

Έστω  $AD = 3$  και  $D\Gamma = 2$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

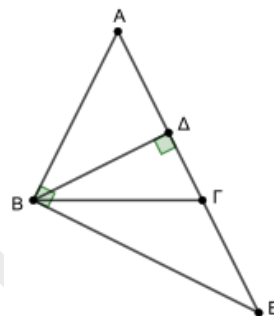
i.  $BD = 4$ . (Μονάδες 6)

ii.  $(AB\Gamma) = 10$ . (Μονάδες 6)

β) Έστω ότι η κάθετη της AB στο σημείο Β, τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Ε. Να βρείτε:

i. Το μήκος του ΔΕ. (Μονάδες 6)

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΕ. (Μονάδες 7)



**22509.** Θεωρούμε ορθογώνιο ABΓΔ με  $AB = 2a$  και  $AD = a$ . Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο Μ με  $MB = x$  και στην προέκταση της ΑΔ σημείο Ν με  $DN = 2x$ .

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση των  $a, x$  τα  $MG^2$ ,  $NG^2$  και  $MN^2$ .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ορθογώνιο.

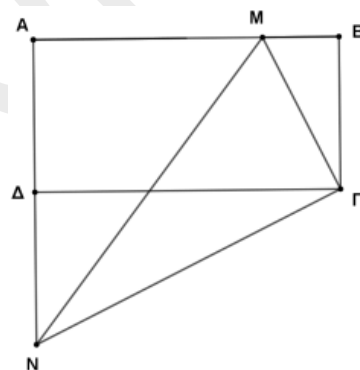
(Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε συναρτήσει των  $a, x$  τα εμβαδά των τριγώνων AMN και ΓMN.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τη θέση του σημείου Μ, πάνω στην ΑΒ ώστε τα τρίγωνα AMN και ΓMN να είναι ισεμβαδικά.

(Μονάδες 5)



**22510.** Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Θεωρούμε τις διαμέτρους ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ.

Να αποδείξετε ότι:

α)  $(AOB) = (BO\Delta)$  και  $(AOG) = (ΔOG)$

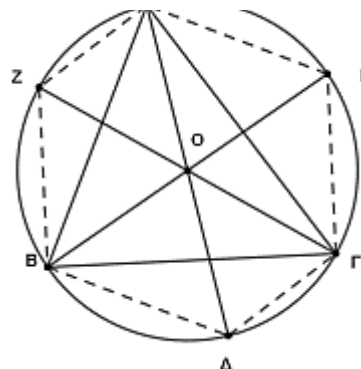
(Μονάδες 8)

β)  $(B\Delta\Gamma) = (AOB) + (AOG) - (BO\Gamma)$

(Μονάδες 8)

γ)  $(AZB\Delta\Gamma E) = 2(AB\Gamma)$

(Μονάδες 9)



### 3<sup>ο</sup> Θέμα

**17908.** Σε τρίγωνο ABΓ τα μήκη των πλευρών του είναι  $a = 4$ ,  $\beta = \sqrt{17}$  και  $\gamma = 5$ .

α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ABΓ, ως προς τις γωνίες του.

(Μονάδες 9)

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ABΓ από την κορυφή Α, τότε:

i. να υπολογίσετε το ΔΒ.

(Μονάδες 9)

ii. να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ABΓ.

(Μονάδες 7)

## Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

### 2<sup>ο</sup> Θέμα

**15979.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με AB=ΑΓ=5 και  $A = 120^\circ$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $BΓ = 5\sqrt{3}$  (Μονάδες 13)

β)  $(ABΓ) = \frac{25\sqrt{3}}{4}$  (Μονάδες 12)

**17346.** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με AB = 6, BΓ = 4 και  $B = 60^\circ$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $ΑΓ = 2\sqrt{7}$ . (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 8)

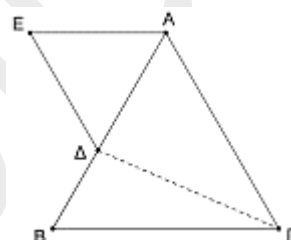
Δίνεται ότι  $\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  και  $\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$ .

**17347.** Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο πλευράς 10 και το τρίγωνο AΔΕ είναι ισόπλευρο πλευράς 6.

α) Να αποδείξετε ότι  $(AΓΔ) = 15\sqrt{3}$ . (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου AΓΔΕ. (Μονάδες 13)

Δίνεται ότι  $\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .



**21196.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με κάθετες πλευρές  $\beta = 8$  και  $\gamma = 6$ .

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του τριγώνου ABΓ είναι  $E = 24$ . (Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε:

i. Να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς α του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 6)

ii. Το ύψος του  $u_a$  που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα α του τριγώνου. (Μονάδες 7)

iii. Την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. (Μονάδες 7)

**21838.** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με πλευρές AB=8, ΑΓ=12 και γωνία

$A = 60^\circ$ .

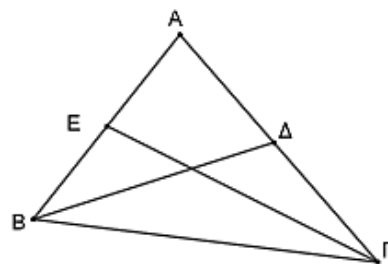
α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ είναι  $(ABΓ) = 24\sqrt{3}$ . (Μονάδες 13)

β) Αν BΔ και ΓΕ διάμεσοι του τριγώνου ABΓ, να αποδείξετε ότι :

i. Τα τρίγωνα BEΓ και AΕΓ είναι ισοδύναμα. (Μονάδες 4)

ii. Τα τρίγωνα EBΓ και ΔΓΒ είναι ισοδύναμα με

$(EBΓ) = (\Delta ΓΒ) = 12\sqrt{3}$ . (Μονάδες 8)



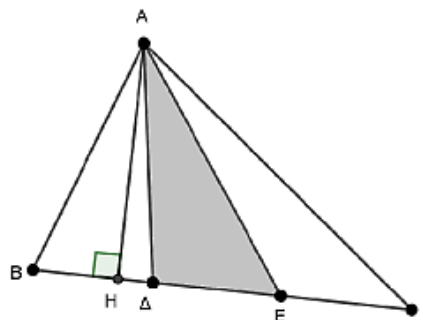
**22259.** Δίνεται τρίγωνο ABΓ και στην πλευρά του BΓ, τα σημεία Δ, Ε ώστε  $BΔ = ΔΕ = ΕΓ$ . Από την κορυφή Α, φέρνουμε το ύψος ΑΗ του τριγώνου ABΓ.

α) Να αποδείξετε ότι  $(AΔΕ) = \frac{1}{3}(ABΓ)$ .

(Μονάδες 13)

β) Αν Μ είναι το μέσο της BΓ, να αποδείξετε ότι

$(AΜΕ) = \frac{1}{6}(ABΓ)$ .



(Μονάδες 12)

**22511.** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με AB = 2, ΑΓ = 3 και  $A = 60^\circ$ . Να υπολογίσετε:

α) το μήκος της πλευράς BΓ. (Μονάδες 9)

β) το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 8)



γ) το ύψος  $u_a$ .

(Μονάδες 8)

#### 4ο θέμα

**22101.** Δίνεται τρίγωνο ABΓ του οποίου οι πλευρές AB και ΑΓ έχουν σταθερά μήκη 3 και 4 αντίστοιχα.

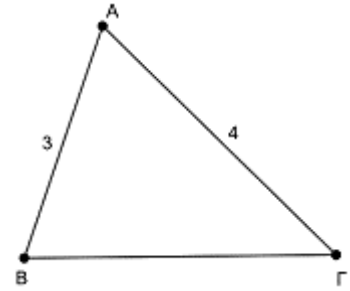
α) Αν η γωνία Α έχει μέτρο  $60^\circ$ , τότε να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 08)

ii. Το μήκος της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 09)

β) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας Α ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ να γίνεται μέγιστο;

Να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 08)



**22369.** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με AB = 8, ΒΓ = 7 και

$A = 60^\circ$ .

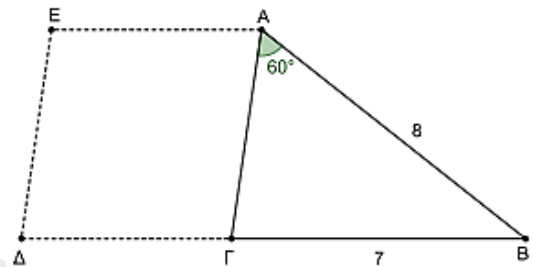
α) Να αποδείξετε ότι  $ΑΓ = 3$  ή  $ΑΓ = 5$ . (Μονάδες 6)

β) Έστω ότι το τρίγωνο ABΓ είναι οξυγώνιο όπως στο διπλανό σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι  $ΑΓ = 5$ . (Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι  $(ABΓ) = 10\sqrt{3}$ . (Μονάδες 6)

iii. Προεκτείνουμε τη ΒΓ κατά τμήμα  $ΓΔ = ΑΓ$  και σχηματίζουμε τον ρόμβο ΑΓΔΕ. Να βρείτε το εμβαδόν του ρόμβου ΑΓΔΕ. (Μονάδες 7)



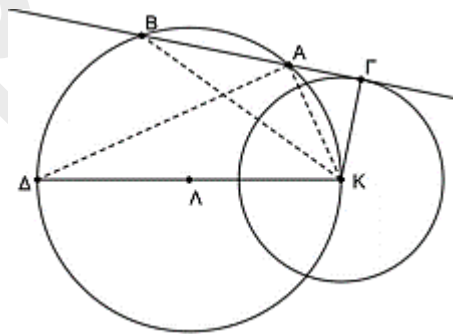
**22568.** Δίνεται κύκλος με κέντρο το σημείο Λ και ακτίνα  $R=10$ , ο οποίος διέρχεται από το κέντρο ενός άλλου κύκλου με κέντρο το σημείο Κ και ακτίνα  $r=6$ . Η εφαπτομένη του κύκλου (Κ,  $r$ ) στο σημείο του Γ τέμνει τον κύκλο (Λ,  $R$ ) στα σημεία Α και Β. Η προέκταση της ΚΛ προς το Λ τέμνει τον κύκλο (Λ,  $R$ ) στο σημείο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΚΓΒ και ΚΑΔ είναι όμοια. (Μονάδες 8)

ii.  $ΚΑ \cdot ΚΒ = 120$  (Μονάδες 9)

β) Αν είναι  $ΚΒ = 15$ , να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΚ. (Μονάδες 8)



#### 3ο θέμα

**21783.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ, με  $\Gamma = 90^\circ$ ,  $A = 30^\circ$  και

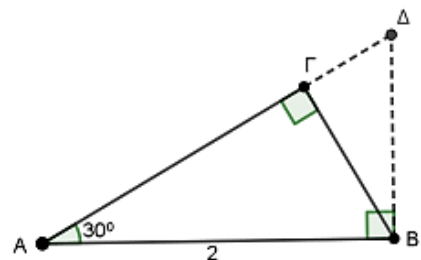
$AB = 2$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $ΑΓ = \sqrt{3}$ . (Μονάδες 7)

β) Φέρνουμε κάθετη στην ΑΒ, στο σημείο Β, που τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο Δ.

Να αποδείξετε ότι  $ΑΔ = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ . (Μονάδες 10)

γ) Αν Κ είναι το μέσο της ΑΔ, να αποδείξετε ότι  $(ΚΑΒ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . (Μονάδες 8)



## Λόγος Εμβαδών

2<sup>ο</sup> Θέμα

**15978.** Στο τρίγωνο ABΓ του παρακάτω σχήματος, τα Δ, Ε, Ζ, είναι σημεία των πλευρών AB, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα, ώστε:

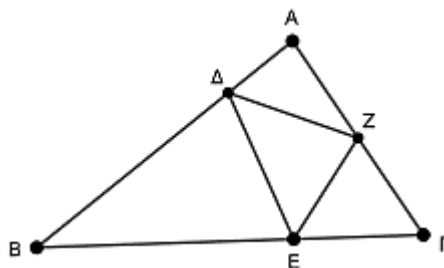
$$A\Delta = \frac{1}{4}AB, BE = \frac{2}{3}B\Gamma \text{ και } \Gamma Z = \frac{1}{2}A\Gamma. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

$$\alpha) (\Delta\Delta Z) = \frac{1}{8}(AB\Gamma), (BE\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Gamma), (\Gamma EZ) = \frac{1}{6}(AB\Gamma).$$

(Μονάδες 15)

$$\beta) (\Delta EZ) = \frac{5}{24}(AB\Gamma)$$

(Μονάδες 10)



**16127.** Ένα τρίγωνο έχει πλευρά  $B\Gamma = 9$  και αντίστοιχο ύψος  $A\Delta = 8$ .

**α)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 9)

**β)** Ένα άλλο τρίγωνο  $A'B'\Gamma'$  είναι όμοιο με το τρίγωνο ABΓ και η ομόλογη πλευρά της ΒΓ είναι η  $B'\Gamma' = 6$ . Να υπολογίσετε:

**i.** τον λόγο ομοιότητας των τριγώνων ABΓ και  $A'B'\Gamma'$ , (Μονάδες 7)

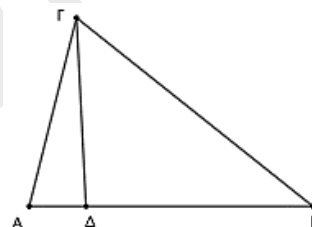
**ii.** το εμβαδόν του τριγώνου  $A'B'\Gamma'$ . (Μονάδες 9)

**16756.** Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB.

$$\alpha) \text{ Να αποδείξετε ότι } \frac{(AB\Gamma)}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{AB}{\Delta B}.$$

(Μονάδες 15)

**β)** Αν  $(AB\Gamma) = 25$  και  $AB = 5A\Delta$ , τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ. (Μονάδες 10)



**16770.** Δίνεται γωνία  $\chi O\psi$  και η διχοτόμος της Οδ. Πάνω στην Οδ παίρνουμε τυχαία σημεία Α και Β. Θεωρούμε σημείο Ε στην πλευρά

Οχ τέτοιο ώστε  $OEB = 70^\circ$  και σημείο Δ στην Οψ τέτοιο ώστε

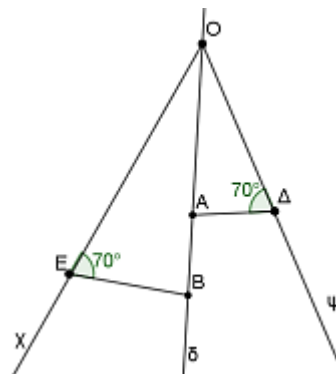
$$O\Delta A = 70^\circ.$$

**α)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΕΒ και ΟΔΑ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

**β)** Αν  $\frac{OA}{OB} = \frac{2}{3}$  να υπολογίσετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών

των τριγώνων. (Μονάδες 06)

**γ)** Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΔ είναι 28 τ.μ. να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΟΕΒ. (Μονάδες 09)

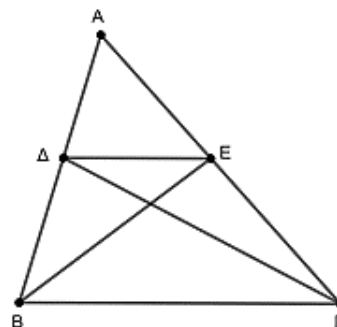


**16806.** Δίνεται τρίγωνο ABΓ και από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB φέρουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.

$$\alpha) \text{ Να δικαιολογήσετε γιατί } \frac{(A\Delta E)}{(\Delta EB)} = \frac{A\Delta}{\Delta B} \text{ και } \frac{(A\Delta E)}{(\Delta E\Gamma)} = \frac{A\Delta}{E\Gamma}.$$

(Μονάδες 13)

**β)** Να αποδείξετε ότι  $(\Delta EB) = (\Delta E\Gamma)$ . (Μονάδες 12)





**18561.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $B\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma\Delta=B\Gamma$  και την πλευρά  $AB$  κατά τμήμα  $BE=AB$ .

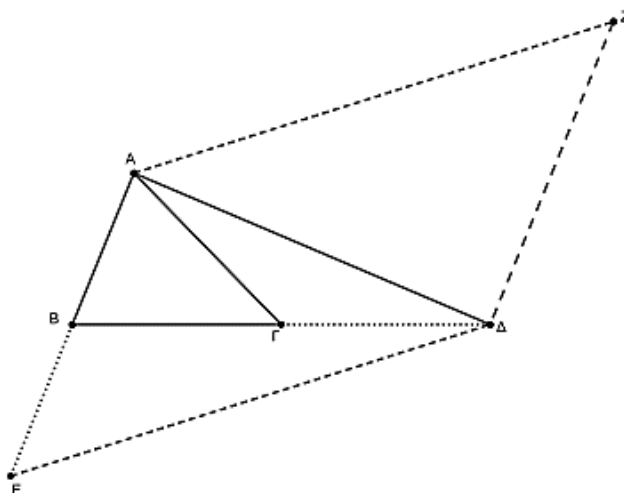
**α)** Αν  $(AB\Gamma)=25\text{ m}^2$ , να αποδείξετε ότι  $(B\Delta E)=50\text{ m}^2$ .

(Μονάδες 10)

**β)** Από την κορυφή  $A$  φέρουμε ευθεία παράλληλη στην  $ED$  και από την κορυφή  $\Delta$  ευθεία παράλληλη στην  $EA$  που τέμνονται στο σημείο  $Z$ .

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου  $AZ\Delta$  είναι 4-πλάσιο του εμβαδού του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 15)



**20667.** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $B\Gamma=8$ . Στην προέκταση της  $\Gamma B$  προς το  $B$  παίρνουμε σημείο  $\Delta$ , ώστε  $\Delta B=4$  και  $E$  είναι το μέσο της  $A\Gamma$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι  $(AB\Gamma)=4A\Gamma \cdot \eta\mu\Gamma$ .

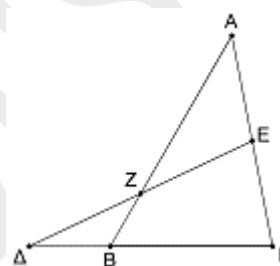
(Μονάδες 8)

**β)** Να αποδείξετε ότι  $(\Gamma\Delta E)=3A\Gamma \cdot \eta\mu\Gamma$ .

(Μονάδες 9)

**γ)** Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $\Gamma\Delta E$  και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ , αν το εμβαδόν του τριγώνου  $\Gamma\Delta E$  είναι 12 τ.μ.

(Μονάδες 8)



**21120.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=\sqrt{2}$ . Από σημείο  $\Delta$  της πλευράς  $AB$  ώστε  $A\Delta=1$ , φέρνουμε παράλληλη στη  $B\Gamma$  η οποία τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι:

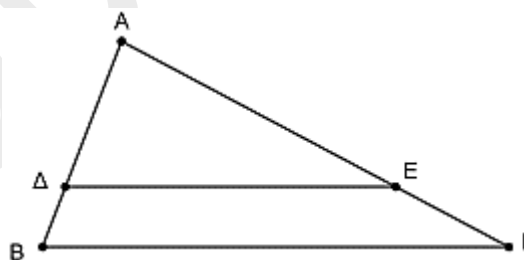
**i.** τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $AB\Gamma$  είναι όμοια και να γράψετε τον λόγο ομοιότητας,

**ii.** το εμβαδόν του τριγώνου  $A\Delta E$  είναι το μισό του εμβαδού του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 18)

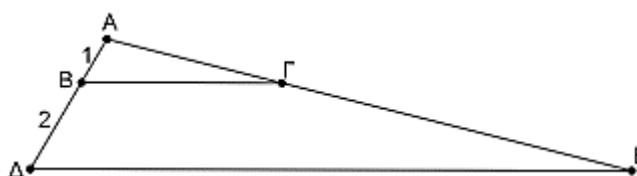
**β)** Αν το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι 2, να βρείτε τα εμβαδά του τριγώνου  $A\Delta E$  και του τραapeζίου  $B\Gamma E\Delta$ .

(Μονάδες 7)



**21304.** Δίνεται το τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=1$ . Στις προεκτάσεις των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  παίρνουμε σημεία  $\Delta$  και  $E$ , αντίστοιχα, ώστε η  $\Delta E$  να είναι παράλληλη στη  $B\Gamma$  και  $B\Delta=2$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A\Delta E$  είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $1/3$ .



(Μονάδες 10)

**β)** Αν η περίμετρος του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι ίση με 8,5, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου  $A\Delta E$ .

(Μονάδες 08)

**γ)** Αν το εμβαδόν του τριγώνου  $A\Delta E$  είναι 15, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 07)

**21636.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ , με μήκη πλευρών  $AB=6$ ,  $A\Gamma=8$ , και  $B\Gamma=10$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 10)

**β)** Αν  $A\Delta$  είναι ύψος του τριγώνου  $AB\Gamma$  τότε:

**i.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma\Delta$  είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\lambda = \frac{3}{4}$ .

(Μονάδες 5)

**ii.** Να υπολογίσετε το λόγο:  $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}$ .

(Μονάδες 5)

**22070.** Ένα τρίγωνο ABΓ έχει μήκη πλευρών  $\alpha = 17$ ,  $\beta = 8$ ,  $\gamma = 15$ .

**α)** Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 13)

**β)** Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ABΓ:

**i.** Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους λ.

**ii.** Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών  $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}$ .

(Μονάδες 12)

#### 4<sup>ο</sup> Θέμα

**16582.** Στο διπλανό τρίγωνο ABΓ τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

**α)** Έστω ότι  $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{AG} = \frac{1}{2}$ .

**i.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με το  $\frac{1}{4}$  του εμβαδού του τριγώνου ABΓ.

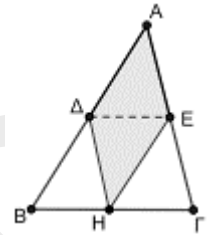
(Μονάδες 07)

**ii.** Αν Η είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΔΗΕ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τριγώνου ABΓ.

(Μονάδες 12)

**β)** Αν γνωρίζετε ότι  $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{AG} = \lambda$ , τότε ποια είναι η σχέση των εμβαδών του τετραπλεύρου ΑΔΗΕ και του τριγώνου ABΓ;

(Μονάδες 06)



**16732.** Έστω τετράγωνο ABΓΔ και Μ το μέσο της ΑΒ. Οι ευθείες ΔΜ και ΓΒ τέμνονται στο Κ. Να αποδείξετε ότι:

**α)** Τα τρίγωνα ΜΚΒ και ΔΚΓ είναι όμοια.

(5 μονάδες)

**β)**  $(MKB) = \frac{1}{4}(ΔΚΓ)$ .

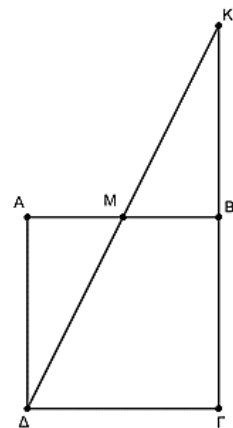
(5 μονάδες)

**γ)**  $(MB\Gamma\Delta) = \frac{3}{4}(AB\Gamma\Delta)$ .

(10 μονάδες)

**δ)** Αν  $(MB\Gamma\Delta) = 75 \text{ m}^2$  να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου.

(5 μονάδες)



**17956.** Δίνεται τρίγωνο ABΓ και σημείο Δ στο εσωτερικό του τμήματος ΒΓ. Από το Δ φέρουμε παράλληλες στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ. Η παράλληλη στην ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και η παράλληλη στην ΑΓ τέμνει την ΑΒ στο Ε. Θεωρούμε Κ και Λ τα μέσα των ΒΔ και ΔΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

**α)**  $(EK\Delta) = \frac{(BE\Delta)}{2}$ .

(Μονάδες 09)

**β)**  $(EZ\Delta) = \frac{(AE\Delta Z)}{2}$ .

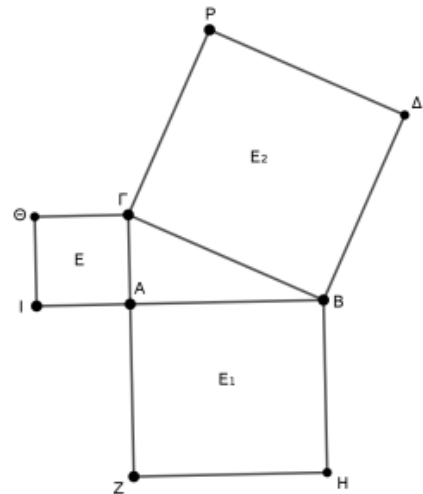
(Μονάδες 09)

**γ)** Το εμβαδόν του ΚΕΖΛ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου Δ.

(Μονάδες 07)

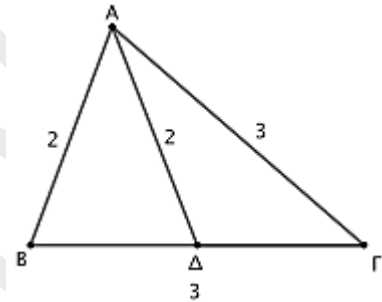
**17907.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Με πλευρές τις  $AB$ ,  $A\Gamma$ ,  $B\Gamma$  κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου  $AB\Gamma$ , τα τετράγωνα  $ABHZ$ ,  $A\Gamma\Theta I$ ,  $B\Gamma P\Delta$ . Έστω  $E$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ , τα εμβαδά των τετραγώνων  $A\Gamma\Theta I$ ,  $ABHZ$ ,  $B\Gamma P\Delta$  αντίστοιχα. Αν ισχύουν οι ισότητες  $E_1 = 4E$ ,  $E_2 = 5E$  τότε:

- α)** να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία  $A$ . (Μονάδες 9)  
**β)** να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των τριγώνων  $AB\Gamma$ ,  $AIZ$ ,  $BH\Delta$ ,  $\Gamma P\Theta$  είναι ίσα. (Μονάδες 9)  
**γ)** αν η  $A\Gamma = 1$  να υπολογίσετε το εμβαδόν του πολυγώνου  $ZH\Delta P\Theta I$ . (Μονάδες 7)



**18101.** Στο σχήμα, τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $AB\Delta$  είναι ισοσκελή με  $AG = BG = 3$  και  $AB = AD = 2$ .

- α)** Να αποδείξετε ότι οι γωνίες  $B$  και  $BAG$  είναι ίσες. (Μονάδες 8)  
**β)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $B\Delta A$  είναι όμοια. (Μονάδες 9)  
**γ)** Να υπολογίσετε τον λόγο  $\frac{(AB\Gamma)}{(B\Delta A)}$  των εμβαδών των δύο τριγώνων. (Μονάδες 8)



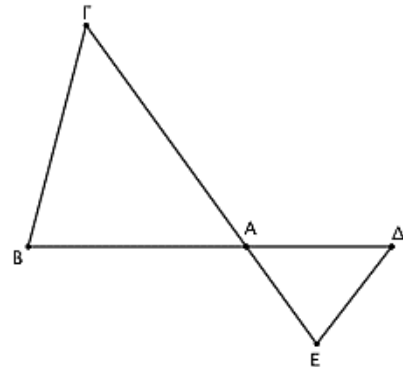
**18301.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  προεκτείνουμε τις πλευρές  $BA$  και  $\Gamma A$  κατά τμήματα  $A\Delta$  και  $A\epsilon$  αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

- α)** Αν είναι  $A\Delta = \frac{1}{2} AB$  και  $A\epsilon = \frac{2}{5} A\Gamma$ , να υπολογίσετε τον λόγο  $\frac{(A\Delta\epsilon)}{(AB\Gamma)}$ . (Μονάδες 10)

- β)** Αν είναι  $A\Delta = \frac{1}{\lambda} AB$  και  $A\epsilon = \frac{\lambda}{\mu} A\Gamma$  όπου  $\lambda, \mu$  είναι θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι ο λόγος  $\frac{(A\Delta\epsilon)}{(AB\Gamma)}$  είναι ανεξάρτητος

από την τιμή του  $\lambda$ .

- γ)** Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων  $\lambda$  και  $\mu$  για τα οποία είναι  $(A\Delta\epsilon) = (AB\Gamma)$ ». Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

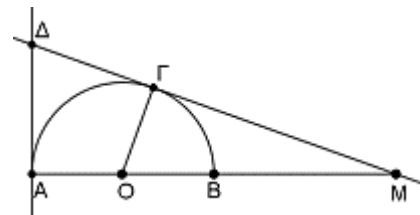


**18370.** Δίνεται ημικύκλιο κέντρου  $O$  και διαμέτρου  $AB = 2\rho$ . Στην προέκταση του  $AB$  προς το  $B$ , θεωρούμε σημείο  $M$ . Από το  $M$  φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα  $M\Gamma$  στο ημικύκλιο. Αν η εφαπτόμενη του ημικυκλίου στο σημείο  $A$  τέμνει την προέκταση της  $M\Gamma$  στο  $\Delta$  τότε:

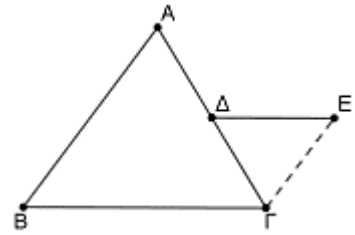
- α)** Αν  $BM = 2\rho$  να αποδείξετε ότι  $M\Gamma = 2\sqrt{2}\rho$ . (Μονάδες 09)

- β) i.** Να αποδείξετε ότι  $\frac{MO}{M\Gamma} = \frac{MA}{MA}$ . (Μονάδες 09)

- ii.** Αν για το  $M$  ισχύει ότι  $BM = \lambda \cdot \rho$ , όπου  $\lambda$  θετικός αριθμός, να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του  $\lambda$ , τέτοια ώστε  $(A\Delta M) = 9(MO\Gamma)$ . (Μονάδες 07)



**18371.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $\Delta$  μέσο της  $AG$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε  $\Delta E$  παράλληλη στην  $B\Gamma$  και ίση με το μισό της  $AB$  όπως στο σχήμα.



**α) i.** Να αποδείξετε ότι  $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Delta E}{2B\Gamma}$ . (Μονάδες 10)

**ii.** Αν το  $\Delta E\Gamma B$  είναι παραλληλόγραμμο, τότε να αποδείξετε ότι  $(\Delta E\Gamma) = (AB\Delta)$ . (Μονάδες 10)

**β)** Σε ένα τεστ που χρειάστηκε από τους μαθητές να βρεθεί ο λόγος

$\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)}$  ένας μαθητής έγραψε: «Παρατηρώ ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta E\Gamma$  έχουν  $\Delta = \Gamma$ , ως εντός εναλλάξ

των παραλλήλων  $\Delta E$  και  $B\Gamma$  που τέμνονται από την  $\Delta\Gamma$  και δύο πλευρές τους ανάλογες, αφού

$\frac{\Delta\Gamma}{A\Gamma} = \frac{\Delta E}{AB} = \frac{1}{2}$ . Επειδή έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις γωνίες τους  $\Delta, \Gamma$  ίσες, τα τρίγωνα

θα είναι όμοια. Επομένως, ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς

τους  $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \left(\frac{\Delta E}{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ». Ο καθηγητής του του είπε ότι έχει κάνει ένα σημαντικό λάθος.

Μπορείτε να εντοπίσετε σε ποιο σημείο ο συλλογισμός του μαθητή είναι λανθασμένος;

(Μονάδες 05)

**21189.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και  $M, N$  τα μέσα των πλευρών του  $AB$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

**α)**  $(AB\Gamma) = (A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$ . (Μονάδες 8)

**β)**  $\frac{(BMN)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{4}$ . (Μονάδες 12)

**γ)**  $(BMN) = \frac{1}{8}(AB\Gamma\Delta)$ . (Μονάδες 5)

**21194.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ ,  $AM$  η διάμεσός του και  $E$  το μέσο της  $AM$ . Από το σημείο  $E$  φέρουμε παράλληλες στις  $AB$  και  $A\Gamma$  οι οποίες τέμνουν την  $B\Gamma$  στα σημεία  $\Delta$  και  $Z$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

**α)**  $(AMB) = (AM\Gamma)$  (Μονάδες 5)

**β)**  $(ME\Delta) = \frac{1}{8}(AB\Gamma)$ . (Μονάδες 12)

**γ)**  $(AB\Delta E) = (A\Gamma ZE)$  (Μονάδες 8)

**18302.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  προεκτείνουμε τις πλευρές  $BA$  και  $\Gamma A$  κατά τμήματα  $A\Delta$  και  $A\epsilon$  αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

**α)** Αν είναι  $A\Delta = 2AB$  και  $A\epsilon = \frac{1}{2}A\Gamma$ , να αποδείξετε ότι τα

τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $AB\Gamma$  είναι ισοδύναμα. (Μονάδες 09)

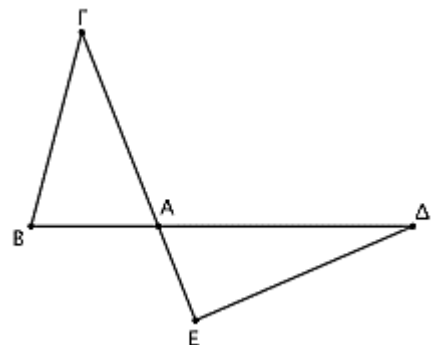
**β)** Αν προεκτείνουμε τις πλευρές  $BA$  και  $\Gamma A$  κατά τμήματα είναι  $A\Delta = \mu \cdot AB$  και  $A\epsilon = \nu \cdot A\Gamma$  αντίστοιχα, όπου  $\mu, \nu$  είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, ποια πρέπει να είναι η σχέση των αριθμών  $\mu$  και  $\nu$  ώστε τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $AB\Gamma$  να είναι ισοδύναμα;

(Μονάδες 10)

**γ)** Αν είναι  $A\Gamma = \frac{3}{2}AB$  και  $A\Delta = 2AB$ , να βρείτε τις δυνατές

θέσεις του  $E$  ώστε τα  $AB\Gamma$  και  $A\Delta E$  να είναι όμοια.

(Μονάδες 06)



**18369.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ ,  $\angle A = 36^\circ$ .

**α)** Αν η  $B\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $B$ , να αποδείξετε ότι:

**i.** Τα τρίγωνα  $B\Delta\Gamma$  και  $AB\Gamma$  είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

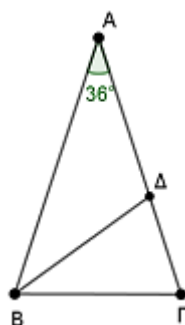
**ii.** Να γράψετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών.

(Μονάδες 06)

**β)** Μετακινούμε το σημείο  $\Delta$  στο εσωτερικό της  $A\Gamma$ .

Για ποια θέση του σημείου  $\Delta$  θα ισχύει  $\frac{(AB\Delta)}{(\Delta B\Gamma)} = 3$ .

(Μονάδες 09)



**20678.** Η κορνίζα του παρακάτω σχήματος αποτελείται από δύο όμοια ορθογώνια με παράλληλες πλευρές και κοινό κέντρο  $O$ . Το ορθογώνιο  $A'B'\Gamma'\Delta'$  έχει το μισό εμβαδόν από το ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$ .

**α)** Να βρείτε τον λόγο ομοιότητας του ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$  προς το ορθογώνιο  $A'B'\Gamma'\Delta'$ .

(Μονάδες 5)

**β)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι όμοια.

(Μονάδες 6)

**γ)** Στην κορνίζα τοποθετούμε μια φωτογραφία που χωράει ακριβώς στο κάδρο, χωρίς να χάνεται κανένα μέρος της.

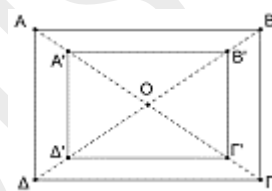
Η διαγώνιος  $A\Gamma$  της κορνίζας έχει μήκος 40 cm και  $\angle AOB = 120^\circ$ .

**i.** Πόσο μήκος έχει η διαγώνιος της φωτογραφίας;

(Μονάδες 6)

**ii.** Πόσο είναι το εμβαδόν της φωτογραφίας;

(Μονάδες 8)



**21839.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = 6$  cm και  $A\Gamma = 3$  cm και

$\angle A$  οξεία. Εξωτερικά του τριγώνου με πλευρές τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα του τριγώνου  $AB\Gamma$  σχηματίζουμε τα τετράγωνα  $AB\Delta E$  και  $A\Gamma H Z$  και φέρνουμε την  $EZ$ , όπως στο παρακάτω σχήμα.

**α)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AEZ$  και  $AB\Gamma$  είναι ισοδύναμα.

(Μονάδες 10)

**β)** Αν το εμβαδόν του πολυγωνικού χωρίου  $EZH\Gamma B\Delta$  είναι  $(EZH\Gamma B\Delta) = 54 \text{ cm}^2$ :

**i.** Να αποδείξετε ότι η γωνία  $A$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι

$\angle A = 30^\circ$ .

(Μονάδες 10)

**ii.** Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει για πλευρά την πλευρά  $B\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 5)

**22023.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Από τυχαίο σημείο  $\Delta$  της πλευράς  $AB$  φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά  $B\Gamma$  η οποία τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $AB\Gamma$  είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

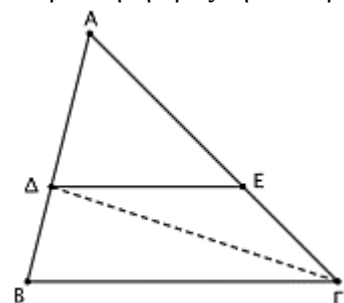
**β)** Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών  $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}$  όταν το σημείο  $\Delta$  είναι

μέσο της  $AB$ .

(Μονάδες 10)

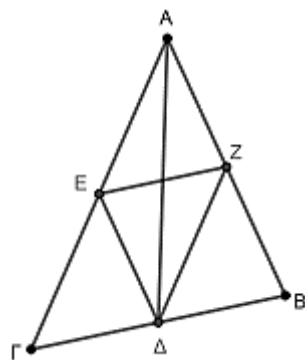
**γ)** Να βρείτε τη θέση του σημείου  $\Delta$  ώστε  $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{2}{9}$ .

(Μονάδες 05)



**22150.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $E$  και  $Z$  τα μέσα των πλευρών του  $AG$  και  $AB$ , αντίστοιχα.

**α)** Αν επιπλέον το ευθύγραμμο τμήμα  $A\Delta$  ενώνει την κορυφή  $A$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  και το μέσο  $\Delta$  της απέναντι πλευράς  $B\Gamma$ , όπως στο σχήμα, να αποδείξετε ότι:



**i.** Τα τρίγωνα  $E\Delta\Gamma$  και  $AB\Gamma$  είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\frac{1}{2}$ .

**ii.** Για το εμβαδόν  $(AE\Delta Z)$  του τετραπλεύρου  $AE\Delta Z$  ισχύει ότι  $(AE\Delta Z) = (AB\Gamma) - 2(E\Delta\Gamma)$ .

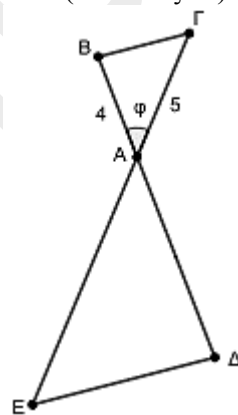
**iii.** Το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $AE\Delta Z$  είναι ίσο με το  $\frac{1}{2}$  του εμβαδού του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 18)

**β)** Αν το σημείο  $\Delta$  είναι τυχαίο εσωτερικό σημείο της πλευράς  $B\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ , τότε ισχύει ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $AE\Delta Z$  είναι ίσο με το  $\frac{1}{2}$  του εμβαδού του τριγώνου  $AB\Gamma$ ;

(Μονάδες 07)

**22141.** Το ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma$  έχει τα άκρα του  $B$  και  $\Gamma$  στις προεκτάσεις των πλευρών  $\Delta A$  και  $EA$ , αντίστοιχα, του τριγώνου  $\Delta AE$ , έτσι ώστε να είναι παράλληλο στην πλευρά  $\Delta E$ . Επίσης δίνονται τα μήκη των πλευρών του τριγώνου  $AB\Gamma$ ,  $AB = 4$  και  $AG = 5$ . Έστω ότι ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $\Delta AE$  είναι  $\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = \frac{1}{4}$ .



**α)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta AE$  είναι όμοια με λόγο  $\frac{1}{2}$ .

(Μονάδες 10)

**β)** Αν  $\angle BAG = \varphi$  να αποδείξετε ότι το εμβαδόν  $(\Delta AE)$  του τριγώνου  $\Delta AE$  είναι ίσο με  $40\eta\mu\varphi$ .

(Μονάδες 07)

**γ)** Να βρείτε σημείο  $Z$  εσωτερικό της πλευράς  $\Delta A$ , ώστε το εμβαδόν του τριγώνου  $A\Gamma Z$  που σχηματίζεται να είναι ίσο με το  $\frac{1}{4}$  του εμβαδού του τριγώνου  $\Delta AE$ .

(Μονάδες 08)

**22148.** Έστω  $E$  σημείο στην πλευρά  $\Gamma A$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Από το  $E$  φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά  $B\Gamma$  του  $AB\Gamma$  η οποία τέμνει την πλευρά  $AB$  στο σημείο  $\Delta$  και παίρνουμε σημείο  $Z$  στην προέκταση  $A\chi$  της πλευράς  $\Gamma A$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  ώστε να είναι  $AZ = AE$ , όπως στο σχήμα.

**α)** Έστω  $AG = 3AE$ . Να αποδείξετε ότι:

**i.** Το εμβαδόν του τριγώνου  $\Delta AE$  είναι ίσο με το  $\frac{1}{9}$  του εμβαδού του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

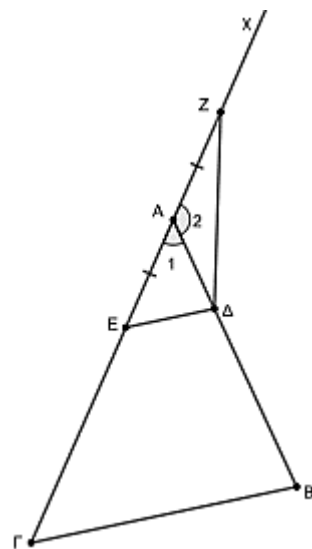
(Μονάδες 07)

**ii.** Το εμβαδόν του τριγώνου  $\Delta EZ$  είναι ίσο με τα  $\frac{2}{9}$  του εμβαδού του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 10)

**β)** Αν το εμβαδόν του  $\Delta EZ$  είναι ίσο με το  $\frac{1}{2}$  του εμβαδού του  $AB\Gamma$ , να υπολογίσετε το λόγο  $\frac{AE}{AG}$ .

(Μονάδες 08)





**22243.** Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημείο Ζ στην πλευρά ΑΔ, ώστε

$$AZ = \frac{3}{4} AB.$$

α) Να αποδείξετε ότι  $BZ = \frac{5}{4} AB$ .

(Μονάδες 6)

β) Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, Ε το μέσο της ΓΔ και Η είναι το σημείο τομής των ΑΕ, ΒΖ, να αποδείξετε ότι:

i.  $BE^2 = \frac{5}{4} AB^2$  και  $ZE^2 = \frac{5}{16} AB^2$ .

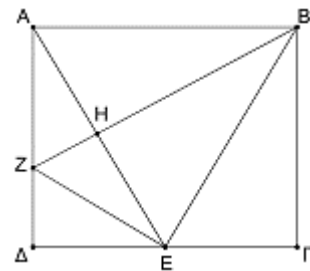
(Μονάδες 6)

ii. το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ είναι όμοια και να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών τους.

(Μονάδες 8)



**22260.** Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω

σχήματος, με  $AB=4$ ,  $AG=6$  και  $\angle A = 150^\circ$ .

Αν το σημείο Δ είναι το μέσον της ΑΓ και το Ε

είναι σημείο της ΒΓ ώστε  $GE = \frac{2}{3} GB$ , τότε να

υπολογίσετε:

α) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Δίνεται  $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$ .

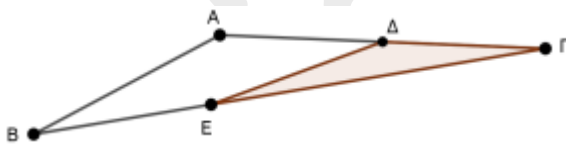
(Μονάδες 9)

β) το λόγο  $\frac{(ΓΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$ .

(Μονάδες 9)

γ) το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΕ.

(Μονάδες 7)



**22340.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και το εσωτερικό σημείο Κ της πλευράς ΒΓ.

Θεωρούμε σημείο Ο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΚ, ώστε

$$AO = \frac{3}{4} AK. \text{ Από το Ο φέρνουμε ευθεία } \epsilon \text{ η οποία τέμνει τις πλευρές}$$

ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $(AOΔ) = \frac{3}{4} (AKΔ)$ .

(Μονάδες 7)

ii.  $(AOE) = \frac{3}{4} (AKE)$ .

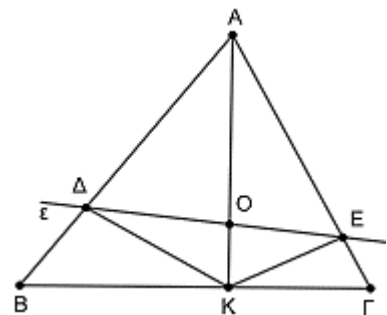
(Μονάδες 7)

iii.  $(ADE) = \frac{3}{4} (AKE)$ .

(Μονάδες 7)

β) Είναι δυνατόν να ισχύει  $(ADE) = \frac{3}{4} (ABΓ)$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)



**22375.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε σημείο Κ ώστε

$KB = 2ΚΓ$  και στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΚ παίρνουμε σημείο Λ ώστε

$LA = 2LK$ . Έστω  $E_1, E_2, E_3$  και  $E_4$  τα εμβαδά των τριγώνων ΑΛΓ, ΓΛΚ, ΒΛΚ

και ΑΛΒ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $\frac{E_1}{E_2} = 2$  και  $\frac{E_4}{E_3} = 2$ .

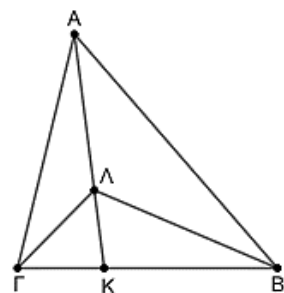
(Μονάδες 10)

ii.  $E_1 = E_3$ .

(Μονάδες 8)

β) Αν  $E_1 = 10$ , να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 7)



**22380.** Στο διπλανό σχήμα δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με  $B = \Gamma = 90^\circ$  και  $B\Gamma = 16$ ,  $\Gamma\Delta = 22$  και  $A\Delta = 20$ . Έστω Κ η προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία ΓΔ και Λ η προβολή του σημείου Β πάνω στην ευθεία ΑΔ.

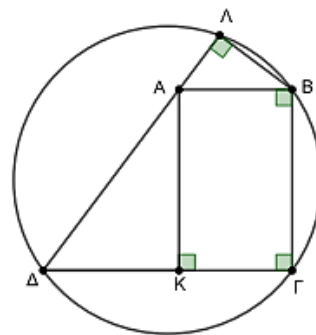
α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $K\Delta = 12$ , (Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΚΔ είναι 96. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΒΛΑ είναι όμοια και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΛΑ. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το μήκος της διαμέτρου του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΒΓΔΛ. (Μονάδες 5)



**22404.** Το σημείο Μ διαιρεί εσωτερικά την πλευρά ΒΓ ενός τριγώνου

ΑΒΓ σε λόγο  $\frac{MB}{MG}$  και το σημείο Ν διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο

τμήμα ΑΜ σε λόγο  $\frac{NA}{NM}$ .

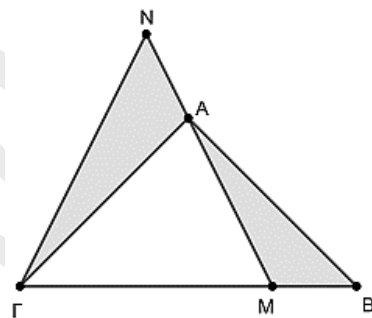
α) Έστω  $\frac{MB}{MG} = \frac{1}{3}$  και  $\frac{NA}{NM} = \frac{1}{4}$ . Να αποδείξετε ότι:

i.  $\frac{(AMB)}{(AMG)} = \frac{1}{3}$ . (Μονάδες 7)

ii.  $\frac{NA}{AM} = \frac{1}{3}$ . (Μονάδες 6)

iii.  $(AMB) = (ANG)$ . (Μονάδες 6)

β) Έστω  $\frac{MB}{MG} = 1$  και  $(AMB) = (ANG)$ . Να βρείτε τον λόγο  $\frac{NA}{NM}$  στον οποίο το σημείο Ν διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ. (Μονάδες 6)



**22406.** Στο διπλανό σχήμα η ΒΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ και επίσης είναι  $B\Gamma = 2AB$ .

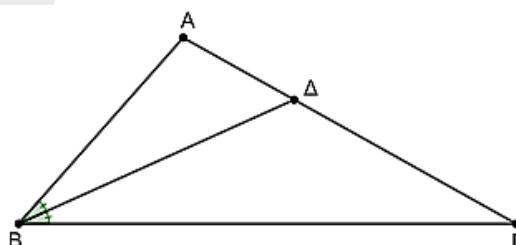
α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΔ. (Μονάδες 6)

β) Να χωρίσετε το τρίγωνο ΑΒΓ σε τρία ισοδύναμα τρίγωνα. (Μονάδες 6)

γ) Έστω ότι  $AB = 12$  και  $\eta\mu B = \frac{3}{4}$ .

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 108. (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τα εμβαδά των τριγώνων ΔΒΓ και ΑΒΔ. (Μονάδες 6)



**22407.** Στο διπλανό σχήμα η ΑΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ και η ΑΚ είναι η προβολή της πλευράς ΑΓ πάνω στην ευθεία ΑΒ. Δίνονται  $AB = 10$ ,  $AG = 15$  και  $AK = 9$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

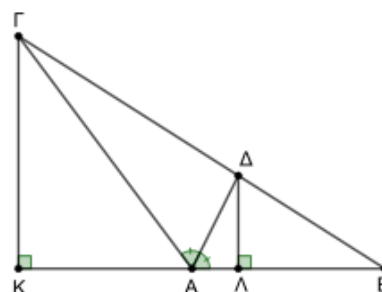
i.  $\Gamma K = 12$  και  $(AB\Gamma) = 60$ . (Μονάδες 8)

ii.  $(A\Delta B) = 24$  και  $(A\Delta \Gamma) = 36$ . (Μονάδες 10)

β) Έστω Λ η προβολή του σημείου Δ πάνω στην ευθεία ΑΒ.

i. Να αποδείξετε ότι  $\frac{\Delta\Lambda}{\Gamma K} = \frac{2}{5}$ . (Μονάδες 3)

ii. Να βρείτε τον λόγο  $\frac{\Delta B}{\Delta K}$  στον οποίο το Λ σημείο διαιρεί εσωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα. (Μονάδες 4)



3<sup>ο</sup> Θέμα

**19037.** Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα σημεία  $\Delta$ ,  $E$ ,  $Z$  των πλευρών  $AB$ ,  $B\Gamma$ ,  $A\Gamma$  αντίστοιχα τέτοια ώστε  $\Delta B = \frac{1}{5} AB$ ,  $E\Gamma = \frac{1}{4} B\Gamma$ ,  $Z\Gamma = \frac{1}{2} A\Gamma$ .

**α)** Να υπολογίσετε τους λόγους  $\frac{(\Delta BE)}{(\Delta B\Gamma)}$ ,  $\frac{(E\Gamma Z)}{(E\Gamma\Gamma)}$ ,  $\frac{(Z\Delta\Delta)}{(Z\Delta\Gamma)}$ . (Μονάδες 15)

**β)** Αν είναι  $(AB\Gamma) = 120$ , να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $\Delta EZ$ . (Μονάδες 10)

## Κανονικά πολύγωνα

## Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων

2<sup>ο</sup> Θέμα

**20638.** Δύο κανονικά πολύγωνα έχουν πλήθος πλευρών  $n_1$  και  $n_2$ , κεντρικές γωνίες  $\omega_1$  και  $\omega_2$  και γωνίες  $\varphi_1$  και  $\varphi_2$ , αντίστοιχα. Αν ο λόγος του  $n_1$  προς το  $n_2$  είναι ίσος με  $\frac{1}{2}$ , τότε:

**α)** Να υπολογίσετε τον λόγο των αντίστοιχων κεντρικών γωνιών  $\omega_1$  και  $\omega_2$  αυτών των πολυγώνων.

(Μονάδες 10)

**β)** Αν το πλήθος των πλευρών ενός από τα δύο κανονικά πολύγωνα είναι  $n_1 = 5$ , να υπολογίσετε τον λόγο των γωνιών των τους  $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ .

(Μονάδες 15)

**21841.** Έστω ABΓΔΕΖ κανονικό εξαγώνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R).

**α)** Να αποδείξετε ότι:

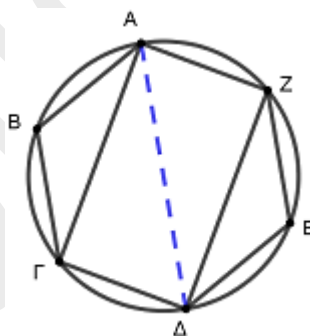
**i.** Η διαγώνιος ΑΔ του εξαγώνου είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 6)

**ii.** Οι γωνίες ΓΑΔ και ΑΔΖ είναι ίσες. (Μονάδες 3)

**iii.** Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΖΔ του εξαγώνου είναι παράλληλες. (Μονάδες 3)

**iv.** Το τετράπλευρο ΑΓΔΖ είναι ορθογώνιο και να βρείτε το εμβαδόν του συναρτήσει της ακτίνας R του κύκλου. (Μονάδες 7)

**β)** Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι σε κάθε κανονικό πολύγωνο με περισσότερες από πέντε πλευρές υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαγώνιοι που να είναι παράλληλες. Συμφωνείτε με την άποψη αυτού του μαθητή; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 6)

4<sup>ο</sup> Θέμα

**22099.** Δίνεται κανονικό πεντάγωνο ABΓΔΕ και σημείο Μ στο εσωτερικό του. Έστω  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$  οι προβολές του σημείου Μ στις πλευρές AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ αντίστοιχα.

**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.**  $(ABM) = \frac{1}{2} \lambda_5 \cdot MM_1$ , όπου  $\lambda_5$  είναι η πλευρά του κανονικού πενταγώνου. (Μονάδες 6)

**ii.**  $(ABΓΔΕ) = \frac{1}{2} \lambda_5 \cdot (MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5)$ . (Μονάδες 7)

**iii.**  $MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5 = 5\alpha_5$ , όπου  $\alpha_5$  είναι το απόστημα του κανονικού πενταγώνου. (Μονάδες 7)

**β)** Ένας μαθητής διατύπωσε τον ισχυρισμό: «Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός κανονικού ν-γώνου  $A_1A_2 \dots A_n$  και  $M_1, M_2, \dots, M_n$  είναι οι προβολές του σημείου Μ στις πλευρές  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$  αντίστοιχα, τότε  $MM_1 + MM_2 + \dots + MM_n = n\alpha_n$ , όπου  $\alpha_n$  είναι το απόστημα του κανονικού ν-γώνου». Να αποδείξετε ότι ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός. (Μονάδες 5)

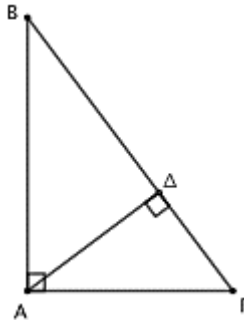
1<sup>ο</sup> Θέμα

**16097.α)** Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα.

ii. Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.

iii. Στο σχήμα, η προβολή της πλευράς AB στην υποτείνουσα BΓ είναι το τμήμα ΓΔ.



iv. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

v. Ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός κανονικού πολυγώνου είναι ομόκεντροι.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

(Μονάδες 15)

**21975.α)** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.

ii. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.

iii. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

iv. Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει  $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ , τότε το τρίγωνο είναι πάντοτε οξυγώνιο.

v. Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

β) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε να αποδείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

(Μονάδες 15)

## Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους

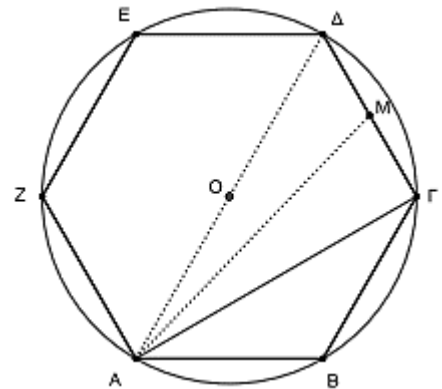
### 4<sup>ο</sup> Θέμα

**17600.** Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Φέρουμε τα τμήματα ΑΓ, ΑΔ και ΑΜ, όπου το σημείο Μ είναι το μέσο του ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

α)  $(ΑΒΓΔΕΖ) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$ . (Μονάδες 7)

β)  $(ΑΜΓ) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$ . (Μονάδες 6)

γ)  $(ΑΜΔΕΖ) = R^2\sqrt{3}$ . (Μονάδες 12)



## Μήκος κύκλου - τόξου

### 2<sup>ο</sup> Θέμα

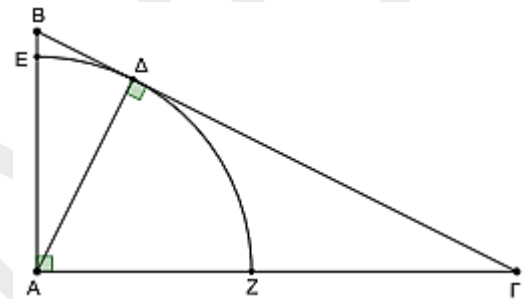
**21122.** Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος, το Δ είναι η προβολή της κορυφής Α στην υποτείνουσα ΒΓ και είναι ΒΔ = 1 και ΔΓ = 4.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΔ = 2. (Μονάδες 12)

β) Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΔ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ, στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου ΕΔΖ.

(Μονάδες 13)



**21298.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με Α ορθή γωνία και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου, που έχει κέντρο το Κ και ακτίνα ρ. Επίσης δίνεται ότι το μήκος του κύκλου ισούται με 10π.

α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ του κύκλου έχει μήκος 5.

(Μονάδες 08)

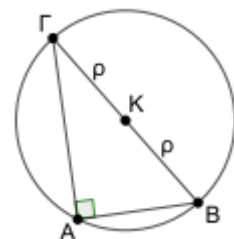
β) Αν η χορδή ΑΒ έχει μήκος 6 να υπολογίσετε:

i. το μήκος της χορδής ΑΓ του κύκλου,

(Μονάδες 10)

ii. το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 07)



**22046.** Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα R = 1.

Θεωρούμε ακτίνα ΟΓ την οποία προεκτείνουμε κατά τμήμα ΓΒ = ΟΓ = R και το εφαπτόμενο τμήμα ΒΑ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι ΟΒΑ = 30°.

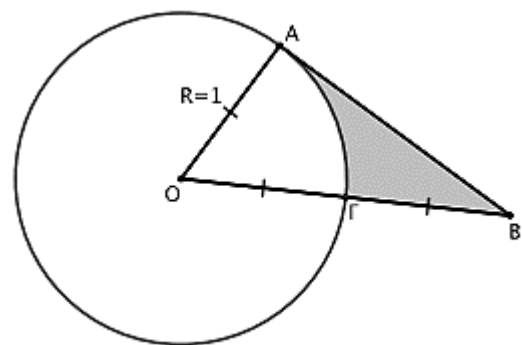
(Μονάδες 05)

β) Να αποδείξετε ότι ΑΒ = √3.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου μεικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 10)





4<sup>ο</sup> Θέμα

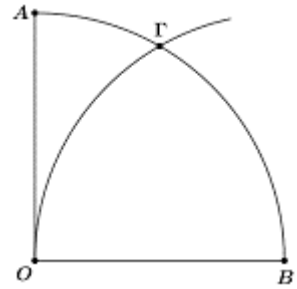
**21192.** Δίνεται τεταρτοκύκλιο  $OAB$  κέντρου  $O$  και ακτίνας  $R$ . Αν ο κύκλος κέντρου  $B$  και ακτίνας  $R$  τέμνει το τόξο  $AB$  στο σημείο  $\Gamma$  όπως στο σχήμα, τότε:

**α)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $O\Gamma B$  είναι ισόπλευρο και το μήκος  $\ell_{B\Gamma}$

του τόξου  $B\Gamma$  είναι  $\ell_{B\Gamma} = \frac{\pi R}{3}$ . (Μονάδες 8)

**β)** Να αποδείξετε ότι το μήκος του τόξου  $A\Gamma$  είναι  $\ell_{A\Gamma} = \frac{\pi R}{6}$ . (Μονάδες 8)

**γ)** Να υπολογίσετε την περίμετρο του μεικτόγραμμου τριγώνου  $O\Delta\Gamma$  που αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα  $OA$  και τα τόξα  $A\Gamma$  και  $O\Gamma$ . (Μονάδες 9)



**21193.** Στο διπλανό σχήμα τρεις κυκλικοί τροχοί με ίσες ακτίνες, έχουν τα κέντρα τους στις κορυφές τριγώνου  $AB\Gamma$  με πλευρές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ . Ένας τεντωμένος ιμάντας μήκους  $L$  συνδέει τους τρεις ίσους τροχούς όπως στο σχήμα και εφάπτεται σε αυτούς στα σημεία  $K$ ,  $\Lambda$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $\Sigma$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** Το τετράπλευρο  $\Lambda M\Gamma N$  είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 4)

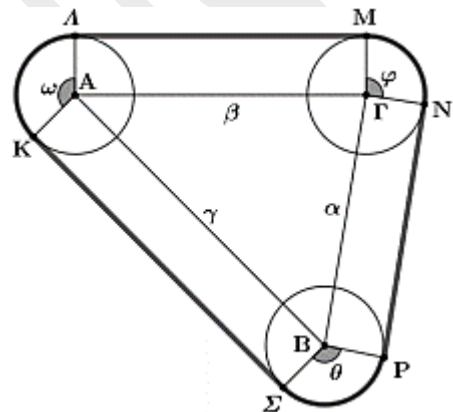
**ii.** Η κυρτή γωνία  $\angle K\Lambda\Lambda$  και η γωνία  $\angle A$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι παραπληρωματικές.

(Μονάδες 4)

**β)** Αν  $\angle K\Lambda\Lambda = \hat{\omega}$ ,  $\angle \Sigma B P = \hat{\theta}$ ,  $\angle M\Gamma N = \hat{\phi}$ , να αποδείξετε ότι

$\hat{\omega} + \hat{\theta} + \hat{\phi} = 360^\circ$ . (Μονάδες 8)

**γ)** Να αποδείξετε ότι το μήκος του ιμάντα  $L$  είναι  $L = 2(\tau + \pi R)$  όπου  $\tau$  η ημιπερίμετρος του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 9)



## Εμβαδόν κυκλικού δίσκου - τομέα

2<sup>ο</sup> Θέμα

**18098.** Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς  $a = 4$ .

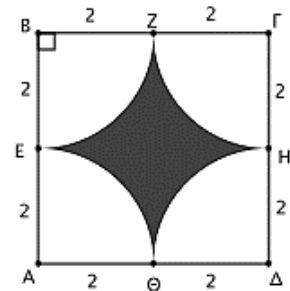
Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα  $\rho = 2$  σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι  $E = 4(4 - \pi)$ .

(Μονάδες 12)



**20672.** Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα  $AB = 6$ , και σημείο του  $\Gamma$ , ώστε  $B\Gamma = 4$ . Στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η  $AB$  σχεδιάζουμε τα ημικύκλια  $C_1$  και  $C_2$  με διαμέτρους  $AB$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα και στο άλλο ημιεπίπεδο σχεδιάζουμε ημικύκλιο  $C_3$  με διάμετρο  $A\Gamma$ .

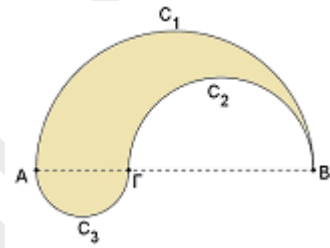
α) Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των ημικυκλίων  $C_1, C_2$  και  $C_3$  είναι

$\frac{9\pi}{2}, 2\pi$  και  $\frac{\pi}{2}$  αντίστοιχα.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.

(Μονάδες 10)



**21075.** Δίνεται κύκλος με κέντρο  $O$ , ακτίνα  $\rho$  και εμβαδόν ίσο με  $16\pi$ .

α) Να υπολογίσετε την ακτίνα  $\rho$  του κύκλου.

(Μονάδες 07)

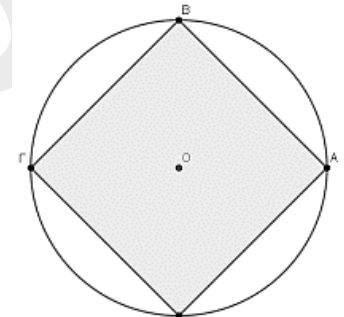
β) Αν η ακτίνα  $\rho$  του κύκλου είναι 4 να υπολογίσετε:

i. Την πλευρά του εγγεγραμμένου τετραγώνου στον κύκλο.

(Μονάδες 09)

ii. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στο τετράγωνο και στον κύκλο.

(Μονάδες 09)



**21121.** Στο διπλανό σχήμα, το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει υποτείνουσα  $B\Gamma = 13$  και αντίστοιχο ύψος  $A\Delta = 6$ . Με κέντρο το Α και ακτίνα  $A\Delta$  γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου, στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

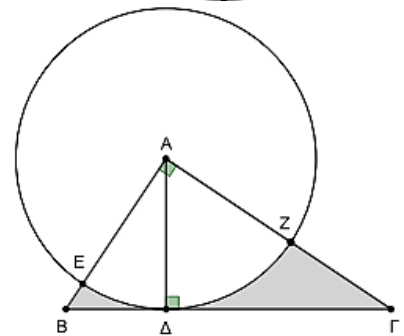
β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά:

i. του κυκλικού τομέα ΑΕΔΖ,

(Μονάδες 9)

ii. του σκιασμένου χωρίου που είναι εσωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ και εξωτερικά του κύκλου, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.

(Μονάδες 8)



**21300.** Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ, το οποίο είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο  $(K, \rho)$ , όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΚΔ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 08)

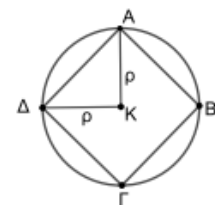
β) Αν επιπλέον το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΔ είναι 4:

i. Να αποδείξετε ότι  $\rho = \sqrt{8}$ .

(Μονάδες 07)

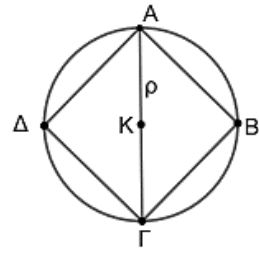
ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου  $(K, \rho)$ .

(Μονάδες 10)



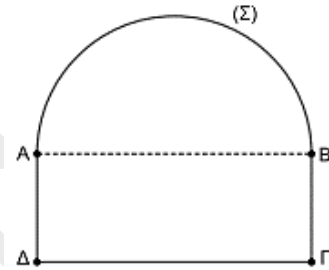
**21301.** Σε κύκλο  $(K, \rho)$  εμβαδού  $E = 4\pi$  είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$ , όπως στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε:

- α) την ακτίνα  $\rho$  του κύκλου  $(K, \rho)$ . (Μονάδες 07)  
 β) το μήκος της διαμέτρου  $A\Gamma$  του κύκλου  $(K, \rho)$  και της πλευράς  $AB$  του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$ . (Μονάδες 10)  
 γ) το εμβαδόν του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$ . (Μονάδες 08)



**22310.** Το παρακάτω σχήμα  $(\Sigma)$  αποτελείται από το ημικύκλιο διαμέτρου  $AB$  και το ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$ . Το ημικύκλιο και το ορθογώνιο έχουν ίσα εμβαδά. Δίνεται  $AB = 8\text{cm}$ .

- α) Να αποδείξετε ότι:  
 i. το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι  $E = 8\pi\text{cm}^2$ . (Μονάδες 8)  
 ii. το μήκος του ημικυκλίου είναι  $L = 4\pi\text{cm}$ . (Μονάδες 8)  
 β) Να βρείτε:  
 i. το μήκος της πλευράς  $A\Delta$  του ορθογώνιου, (Μονάδες 5)  
 ii. την περίμετρο του σχήματος  $(\Sigma)$ . (Μονάδες 4)



#### 4<sup>ο</sup> Θέμα

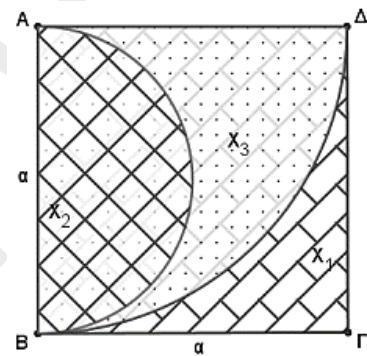
**17599.** Σε τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  πλευράς  $a$  του παρακάτω σχήματος, γράφουμε τεταρτοκύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου με κέντρο  $A$  και ακτίνα  $a$ .

α) Αν  $X_1$  είναι το χωρίο του τετραγώνου που βρίσκεται εξωτερικά του τεταρτοκυκλίου, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ισούται με:

$$(X_1) = \frac{a^2}{4} \cdot (4 - \pi). \quad (\text{Μονάδες } 5)$$

β) Με διάμετρο  $AB$  κατασκευάζουμε ημικύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου. Αν  $X_2$  είναι το χωρίο του ημικυκλίου και  $X_3$  το χωρίο του τεταρτοκυκλίου που βρίσκεται εξωτερικά του ημικυκλίου, να υπολογίσετε τα εμβαδά των δύο χωρίων  $X_2$  και  $X_3$ . (Μονάδες 11)

γ) Ποιο από τα χωρία  $X_1$  και  $X_2$  έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



(Μονάδες 9)

**21197.** Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι τετράγωνο πλευράς  $2a$  και  $\Lambda$  το μέσο της πλευράς του  $\Gamma\Delta$ . Έστω ότι το ημικύκλιο, που σχεδιάζεται στο εσωτερικό του τετραγώνου με διάμετρο την πλευρά του  $AB$ , έχει εμβαδόν 10. Τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

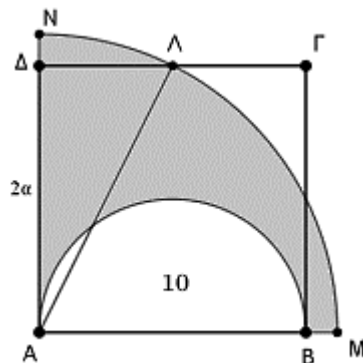
i. Το εμβαδό του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $(AB\Gamma\Delta) = \frac{80}{\pi}$ . (Μονάδες 6)

ii.  $A\Lambda^2 = \frac{100}{\pi}$ . (Μονάδες 6)

β) Με κέντρο το  $A$  και ακτίνα  $A\Lambda$  κατασκευάζουμε τεταρτοκύκλιο  $AMN$ , και έστω  $M$ ,  $N$  είναι τα σημεία τομής του με τις προεκτάσεις των πλευρών του τετραγώνου  $AB$ ,  $A\Delta$  αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου  $ABMNA$ . (Μονάδες 8)

ii. Τον λόγο του εμβαδού του τεταρτοκυκλίου  $AMN$  προς το εμβαδό του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$ . (Μονάδες 5)



**21103.** Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  πλευράς  $2a$  και με διαμέτρους τις  $B\Gamma$  και  $BA$  φτιάχνουμε εξωτερικά του τετραγώνου ημικύκλια, όπως φαίνεται στο σχήμα.

**α)** Να αποδείξετε ότι το μήκος κάθε ημικυκλίου ισούται με  $\pi - a$ .

(Μονάδες 07)

**β) i.** Αν η περίμετρος της καρδιάς είναι  $2\pi + 4$ , να υπολογίσετε το  $a$ .

(Μονάδες 06)

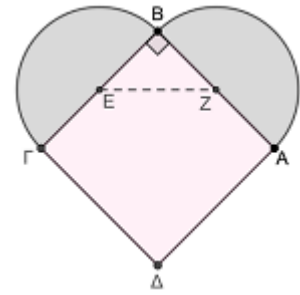
**ii.** Αν  $a = 1$  να βρείτε το μήκος του τμήματος που ενώνει τα κέντρα των δύο ημικυκλίων.

(Μονάδες 06)

**γ)** Αν  $(\tau)$  είναι το άθροισμα των εμβαδών των δυο ημικυκλίων να συγκρίνετε τον λόγο

$\frac{(\tau)}{(AB\Gamma\Delta)}$  με την μονάδα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 06)



**21979.** Στο παρακάτω σχήμα, το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισόπλευρο, πλευράς  $2a$ . Με διάμετρο τη  $B\Gamma$  γράφουμε ημικύκλιο, που τέμνει τις πλευρές  $AB$ ,  $A\Gamma$  στα σημεία  $\Delta$ ,  $E$  αντίστοιχα. Αν  $O$  είναι το κέντρο του ημικυκλίου, να αποδείξετε ότι:

**α)**  $\Delta\Gamma = a\sqrt{3}$ .

(Μονάδες 8)

**β)** το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων που βρίσκονται στο εξωτερικό του τριγώνου ισούται με

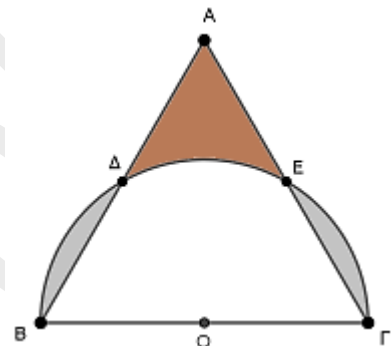
$$E = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})a^2}{6}.$$

(Μονάδες 9)

**γ)** το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου που ορίζεται από τα

ευθύγραμμα τμήματα  $A\Delta$ ,  $AE$  και το τόξο  $\Delta E$  είναι:  $E' = \frac{(3\sqrt{3} - \pi)a^2}{6}$ .

(Μονάδες 8)



**22021.** Δίνεται ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\angle A = 90^\circ$  και  $B\Gamma = 2\rho$ . Με διάμετρο  $B\Gamma$  γράφουμε ημικύκλιο εξωτερικά του τριγώνου.

Επίσης, γράφουμε τον κυκλικό τομέα  $AB\Gamma$  με κέντρο το  $A$  και ακτίνα  $AB$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

**α)** Να αποδείξετε ότι  $AB = \rho\sqrt{2}$ .

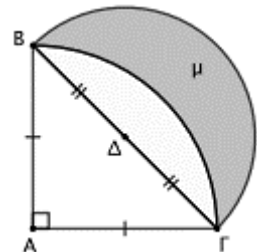
(Μονάδες 10)

**β)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σχηματιζόμενου μηνίσκου  $\mu$  ως συνάρτηση του  $\rho$ .

(Μονάδες 10)

**γ)** Να συγκρίνετε το εμβαδόν του μηνίσκου  $\mu$  με το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Τι συμπέρασμα προκύπτει;

(Μονάδες 05)



**22024.** Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  και τυχαίο σημείο του  $M$ , τέτοιο ώστε  $AM = 2\alpha$  και  $MB = 2\beta$ . Με διαμέτρους  $AM$ ,  $MB$  και  $AB$  γράφουμε ημικύκλια προς το ίδιο μέρος του  $AB$ , όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω  $\Gamma$  το σημείο τομής του ημικυκλίου  $AB$  και της κάθετης από το  $M$  στο  $AB$ .

**α)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν καθενός από τα τρία ημικύκλια

$ZAM$ ,  $EMB$  και  $\Delta AB$  όπου  $Z$ ,  $E$ ,  $\Delta$  είναι τα μέσα των  $AM$ ,  $MB$  και  $AB$  αντίστοιχα.

(Μονάδες 09)

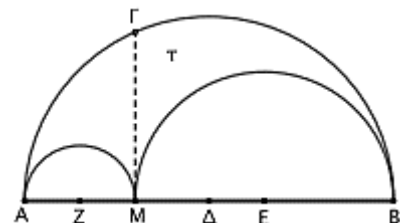
**β)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν καμπυλόγραμμου σχήματος  $\tau$  που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων.

(Μονάδες 06)

**γ)** Να αποδείξετε ότι το καμπυλόγραμμο σχήμα  $\tau$  που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων έχει το ίδιο εμβαδόν με τον κύκλο διαμέτρου  $M\Gamma$ .

(Μονάδες 05)

**δ)** Για ποια θέση του  $M$  μεγιστοποιείται το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος  $\tau$ ; (Μονάδες 05)

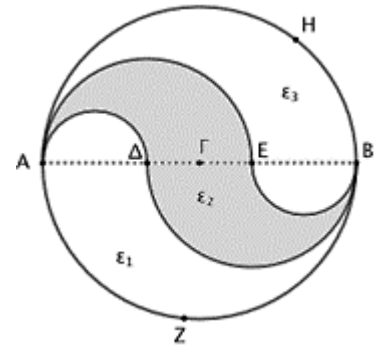


**22058.** Θεωρούμε κύκλο με κέντρο  $\Gamma$  και ακτίνα  $R$ . Έστω  $AB$  διάμετρος του κύκλου και  $\Delta, E$  σημεία της τέτοια ώστε  $A\Delta = \Delta E = EB$ . Σχεδιάζουμε τα ημικύκλια  $A\Delta$  και  $AE$  πάνω από τη διάμετρο  $AB$  και τα ημικύκλια  $BE$  και  $BD$  κάτω από τη διάμετρο  $AB$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

**α)** Να υπολογίσετε τα εμβαδά  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_3$  των καμπυλόγραμμων σχημάτων  $A\Delta BZ$  και  $BEAH$  αντίστοιχα. (Μονάδες 12)

**β)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $\varepsilon_2$  του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου σχήματος  $A\Delta BE$ . (Μονάδες 08)

**γ)** Να εξετάσετε αν ο κύκλος χωρίζεται σε τρία ισοδύναμα καμπυλόγραμμα σχήματα. (Μονάδες 05)



**22098.** Στο παρακάτω σχήμα το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο με  $AB = 4a$  και  $A\Delta = \pi a$ . Στο εσωτερικό του ορθογωνίου σχεδιάστηκε ημικύκλιο διαμέτρου  $AB$ .

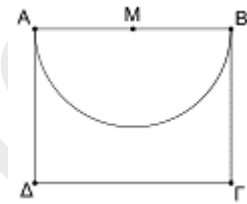
**α)** Να αποδείξετε ότι το ημικύκλιο χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία. (Μονάδες 8)

**β)** Αν η διαγώνιος  $BD$  τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο  $E$  και  $M$  είναι το μέσο της  $AB$ ,

**i.** να αποδείξετε ότι  $AB^2 = BD \cdot BE$  και  $A\Delta^2 = BD \cdot \Delta E$ .

**ii.** να αποδείξετε ότι  $BE = \frac{16a}{\sqrt{16 + \pi^2}}$  και  $\Delta E = \frac{\pi^2 a}{\sqrt{16 + \pi^2}}$ .

**iii.** να υπολογίσετε το  $\text{συν}BME$ .



(Μονάδες 6)

(Μονάδες 6)

(Μονάδες 5)

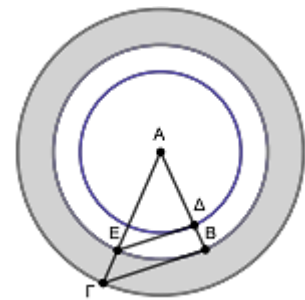
**22151.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ . Στην πλευρά  $AB$  παίρνουμε σημείο  $\Delta$  και στην πλευρά  $A\Gamma$  σημείο  $E$  ώστε  $AE = AB$ . Με κέντρο το σημείο  $A$  και ακτίνες  $\rho = A\Delta$ ,  $r = AB = AE$  και  $R = A\Gamma$  γράφουμε τρεις ομόκεντρους κύκλους  $(A, \rho)$ ,  $(A, r)$  και  $(A, R)$  όπως στο σχήμα. Έστω  $E_{\Gamma\Gamma}$  το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων  $(A, r)$  και  $(A, R)$ ,  $E_{\Delta B}$  το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων  $(A, \rho)$  και  $(A, r)$ ,  $E_{AB}$  το εμβαδόν του κύκλου  $(A, r)$  και  $E_{\Delta\Delta}$  το εμβαδόν του κύκλου  $(A, \rho)$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.**  $\frac{E_{\Gamma\Gamma}}{E_{\Delta\Delta}} = \frac{R^2 - r^2}{r^2}$ .

**ii.**  $\frac{E_{\Delta B}}{E_{\Delta\Delta}} = \frac{r^2 - \rho^2}{\rho^2}$ .

**β)** Αν επιπλέον οι  $\Delta E$  και  $B\Gamma$  είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι:  $\frac{E_{\Gamma\Gamma}}{E_{\Delta\Delta}} = \frac{E_{\Delta B}}{E_{\Delta\Delta}}$ .



(Μονάδες 10)

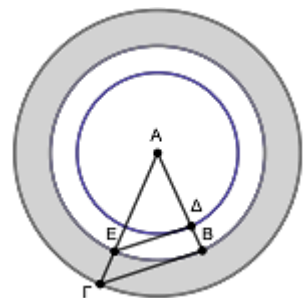
(Μονάδες 07)

(Μονάδες 08)

**22154.** Δίνονται τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A\Delta E$ , που η κοινή κορυφή τους  $A$  βρίσκεται στο κέντρο τριών ομόκεντρων κύκλων  $(A, \rho_1)$ ,  $(A, \rho_2)$  και  $(A, \rho_3)$ , η κορυφή  $\Gamma$  βρίσκεται στον κύκλο  $(A, \rho_3)$ , οι κορυφές  $B$  και  $E$  στον κύκλο  $(A, \rho_2)$  και η κορυφή  $\Delta$  στον κύκλο  $(A, \rho_1)$ , όπως στο σχήμα, με  $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ . Ονομάζουμε  $E_{\Gamma\Gamma}$  το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων  $(A, \rho_2)$  και  $(A, \rho_3)$ ,  $E_1$  το εμβαδόν του κύκλου  $(A, \rho_1)$ ,  $E_2$  το εμβαδόν του κύκλου  $(A, \rho_2)$  και  $E_3$  το εμβαδόν του κύκλου  $(A, \rho_3)$ .

**α)** Αν  $\frac{E_{\Gamma\Gamma}}{E_2} = \frac{7}{9}$ , να αποδείξετε ότι:

**i.**  $\frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{3}{4}$ .



(Μονάδες 07)



ii.  $\frac{E_2}{E_3} = \frac{9}{16}$ . (Μονάδες 05)

iii. Αν επιπλέον οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες να αποδείξετε ότι  $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{3}{4}$ . (Μονάδες 08)

β) Αν  $E_{\text{ΕΓ}} = E_2$  και επιπλέον οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι  $E_{\Delta\text{Β}} = E_1$  όπου  $E_{\Delta\text{Β}}$  είναι το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων  $(A, \rho_1)$  και  $(A, \rho_2)$ . (Μονάδες 05)

**22244.** Ένας κηπουρός θέλει να ποτίσει το γκαζόν που έχει φυτέψει σε έναν τετράγωνο κήπο πλευράς 10 m. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιεί μηχανισμούς ποτίσματος τους οποίους μπορεί να ρυθμίσει, ώστε να ποτίζουν έναν κυκλικό τομέα με συγκεκριμένη γωνία και ακτίνα.

α) Ο κηπουρός τοποθετεί στις απέναντι κορυφές Α, Γ του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 10m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Να αποδείξετε ότι:

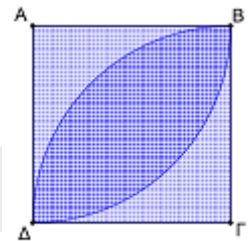
i. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζει κάθε μηχανισμός είναι  $25\pi \text{ m}^2$ . (Μονάδες 4)

ii. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζουν ταυτόχρονα και οι δύο μηχανισμοί είναι  $50(\pi - 2) \text{ m}^2$ . (Μονάδες 5)

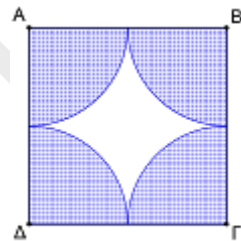
β) Ο κηπουρός τοποθετεί στις τέσσερις κορυφές του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 5m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.

i. Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που δεν ποτίζεται. (Μονάδες 8)

ii. Για να μην μείνει απότιστη κάποια περιοχή του κήπου ο κηπουρός τοποθετεί έναν πέμπτο μηχανισμό ποτίσματος στο κέντρο του κήπου ο οποίος ποτίζει την περιοχή ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας 5m. Να βρείτε το εμβαδόν του κήπου που ποτίζεται από δύο μηχανισμούς ταυτόχρονα και να το συγκρίνετε με την απάντηση που βρήκατε στο ερώτημα α). (Μονάδες 8)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

**22389.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με  $\angle A = 90^\circ$ . Με κέντρο το σημείο Β και ακτίνα  $R = BA$  γράφουμε τον κύκλο  $(B, R)$  ο οποίος τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ. Με κέντρο το σημείο Γ και ακτίνα  $\rho = ΓΔ$  γράφουμε τον κύκλο  $(Γ, \rho)$  ο οποίος τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε. Έστω ότι το Ε είναι το μέσο της ΑΓ.

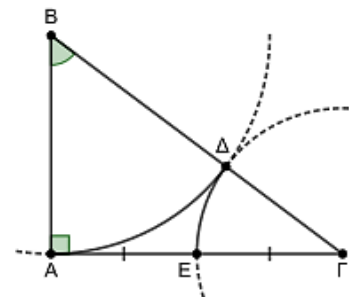
α) Να αποδείξετε ότι  $\rho = \frac{2}{3} R$ . (Μονάδες 8)

β) Έστω  $E_1$  το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ και  $E_2$  το εμβαδόν του κύκλου  $(B, R)$ . Να αποδείξετε ότι  $\frac{E_2}{E_1} = \frac{3\pi}{2}$ .

(Μονάδες 8)

γ) Έστω  $B = \mu^\circ$  και  $E_3$  και  $E_4$  είναι το εμβαδά των κυκλικών τομέων ΒΑΔ και ΓΔΕ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι  $\frac{E_4}{E_3} = \frac{4(90 - \mu)}{9\mu}$ . (Μονάδες 9)





3<sup>ο</sup> Θέμα

**22054.** Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  πλευράς  $2a$ . Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα  $a$  σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του όπως φαίνεται στο σχήμα.

**α)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα ως συνάρτηση του  $a$ . (Μονάδες 08)

**β)** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου είναι:  $E = a^2(4 - \pi)$ . (Μονάδες 12)

**γ)** Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου. (Μονάδες 05)

