

ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Για να συγκρίνουμε δύο πραγματικούς αριθμούς α και β , βρίσκουμε τη διαφορά τους $\alpha - \beta$ και εξετάζουμε αν είναι θετική ή αρνητική ή μηδέν.

- Αν $\alpha - \beta > 0$ τότε $\alpha > \beta$
- Αν $\alpha - \beta < 0$ τότε $\alpha < \beta$
- Αν $\alpha - \beta = 0$ τότε $\alpha = \beta$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

1. Μεταβατική ιδιότητα

$$\text{Αν } \alpha > \beta \text{ και } \beta > \gamma \text{ τότε } \alpha > \gamma$$

2. Αν και στα δυο μέλη μιας ανισότητας **προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε** τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει πάλι μια ανισότητα με την **ίδια φορά**. Δηλαδή:

$$\text{Αν } \alpha > \beta \text{ τότε } \alpha + \gamma > \beta + \gamma \text{ και } \alpha - \gamma > \beta - \gamma$$

3. Αν και στα δυο μέλη μιας ανισότητας **πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε** με τον ίδιο **θετικό** αριθμό, τότε προκύπτει πάλι μια ανισότητα με την **ίδια φορά**. Δηλαδή:

$$\text{Αν } \alpha > \beta \text{ και } \gamma > 0 \text{ τότε } \alpha\gamma > \beta\gamma \text{ και } \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$$

4. Αν και στα δυο μέλη μιας ανισότητας **πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε** με τον ίδιο **αρνητικό** αριθμό, τότε προκύπτει πάλι μια ανισότητα με **αντίστροφη φορά**.

$$\text{Αν } \alpha > \beta \text{ και } \gamma < 0 \text{ τότε } \alpha\gamma < \beta\gamma \text{ και } \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$$

5. Αν δυο ανισώσεις έχουν **ίδια φορά** (ομόστροφες) μπορώ να τις προσθέσω κατά μέλη χωρίς να αλλάξει η φορά.

$$\begin{array}{r} \alpha > \beta \\ + \gamma > \delta \\ \hline \alpha + \gamma > \beta + \delta \end{array}$$

6. Αν δυο ανισώσεις έχουν **ίδια φορά** (ομόστροφες) και **θετικά μέλη**, μπορώ να τις πολλαπλασιάσω κατά μέλη χωρίς να αλλάξει η φορά.

$$\begin{array}{r} \alpha > \beta \\ \cdot \gamma > \delta \\ \hline \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta \end{array} \quad \text{όπου } \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$$

Προσοχή!!!: • Ποτέ δεν αφαιρώ ή διαιρώ ανισώσεις κατά μέλη.

Για παράδειγμα, αν αφαιρέσουμε ή διαιρέσουμε κατά μέλη τις ανισότητες $\begin{cases} 6 > 4 \\ 3 > 1 \end{cases}$ τότε καταλήγουμε στις ανισότητες $3 > 3$ ή $2 > 4$, που δεν ισχύουν.

- Ποτέ δεν πολλαπλασιάζω ανισώσεις κατά μέλη αν δεν γνωρίζω ότι όλα τους τα μέλη είναι θετικά.

7. Αν α, β θετικούς και n θετικό ακέραιο ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n$$

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^n = \beta^n$$

8. Αν α, β ομόσημοι τότε ισχύει $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$

☞ Για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α ισχύει: $\alpha^2 \geq 0$. Η ισότητα ισχύει **μόνο** για $\alpha = 0$.

$$\text{☞ } \alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 0 \text{ και } \beta^2 = 0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να συμπληρώσετε τα κενά μ' ένα από τα σύμβολα $>$, $<$, $\leq$, $\geq$, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

- α) Αν $\alpha > 3$, τότε $\alpha - 3 \dots 0$ β) Αν $\alpha \geq 6$ τότε $\alpha - 6 \dots 0$
 γ) Αν $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma$, τότε $\alpha \dots \gamma$ δ) Αν $x \leq 2$ και $y \leq 3$, τότε $x \cdot y \dots 6$
 ε) Αν $\alpha > 0$ και $\beta < 0$ τότε $\alpha \cdot \beta \dots 0$ στ) Αν $\alpha \neq 0$, τότε $\alpha^2 \dots 0$

2. Αν $\alpha < 1 < \beta$, να βρείτε τα πρόσημα των παραστάσεων:

- α) $(\alpha - 1)(\alpha - \beta)$ β) $(\alpha - 1)(1 - \beta)(\beta - \alpha)$ γ) $(\alpha^2 + 1)(\beta - 1)$

3. Να εφαρμόσετε ιδιότητες της διάταξης στην ανισότητα $x > -6$, για να αποδείξετε τις ανισότητες: α) $-5x - 30 < 0$ β) $3x + 18 > 0$ γ) $2(x + 4) > -4$

4. Αν $\alpha > 2$ και $\beta > 3$, τότε να αποδείξετε ότι:

- α) $\alpha \cdot \beta > 6$ β) $(\alpha - 2) \cdot (\beta - 3) > 0$ γ) $(\alpha + 2) \cdot \beta > 12$

5. Αν $2 < x < 4$ και $1 < y < 3$, βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών παίρνουν τιμές οι παραστάσεις:

- α) $x + y$ β) $-3y$ γ) $2x - 3y$ δ) $x \cdot y$ ε) $\frac{x}{y}$

6 (Τράπεζα Θεμάτων). Αν $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$, βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

- α) $\alpha - 2\beta$ β) $\alpha \cdot \beta$ γ) $\alpha^2 + \beta^2$

7. Να αποδείξετε τις ανισότητες:

- α) $x^2 + 1 \geq 2x$ β) $x^2 \geq 3(2x - 3)$ γ) $x(x + 4y) \geq y(2x - y)$

8 (Τράπεζα Θεμάτων). α) Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε πραγματικού αριθμούς x, y ισχύει: $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$

9. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Ανίσωση που ικανοποιεί ο x	Διάστημα στο οποίο ανήκει ο x
$-1 < x < 2$	
	$x \in [-3, 0]$
$x \leq -6$	
	$x \in [5, 10)$
$-7 < x \leq -3$	
	$x \in (-\infty, 1)$
$x > 5$	
	$x \in (-2, 3)$
$-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$	
	$x \in (2, +\infty)$