

Η φυσική της Α λυκείου

1. Ευθύγραμμες Κινήσεις



- ▶ Στοιχεία Θεωρίας
- ▶ Α, Β, Γ, Δ Θέματα με τις λύσεις τους
- ▶ Α, Β, Γ, Δ Θέματα προς λύση

2017 By Leo Kastanas

1. Ευθύγραμμες κινήσεις

Υλικό σημείο: Ένα σώμα αμελητέων διαστάσεων (γεωμετρικό σημείο) που έχει μάζα. Το υλικό σημείο κάνει μόνο μεταφορική κίνηση. Κάθε σώμα που κάνει μόνο μεταφορική κίνηση μπορεί να θεωρηθεί ως υλικό σημείο με όλη τη μάζα του συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας.

Θέση: Το γεωμετρικό σημείο στο οποίο βρίσκεται κάποια χρονική στιγμή το υλικό σημείο που κινείται (το κινητό).

Τροχιά: Το σύνολο των θέσεων από τις οποίες περνάει κατά την κίνησή του ένα υλικό σημείο, δηλαδή μια συνεχής γραμμή, ευθεία ή καμπύλη.

Χρονική στιγμή t : Προσδιορίζει το πότε συνέβη ένα γεγονός. Μονάδα μέτρησης στο SI, το 1s.

Χρονική διάρκεια, $\Delta t = t_2 - t_1$: Είναι η διαφορά δύο χρονικών στιγμών και καθορίζει το πόσο, διαρκεί ένα φαινόμενο.

Διάνυσμα θέσης, $\vec{x}$ (στις ευθύγραμμες κινήσεις): Είναι το διάνυσμα που έχει αρχή την αρχή του άξονα κίνησης και τέλος το σημείο του άξονα που βρίσκεται το κινητό.

Μετατόπιση, $\Delta \vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$: Είναι η μεταβολή του διανύσματος θέσης. Είναι διανυσματικό μέγεθος με αρχή την αρχική θέση του κινητού και τέλος την τελική του θέση. Αν $\Delta x > 0$ το κινητό κινείται προς τη θετική κατεύθυνση, αν $\Delta x < 0$ κινείται προς την αρνητική. Μονάδα μέτρησης στο SI, το 1m.

Διάστημα, s . Είναι το μήκος της συνολικής διαδρομής που διένυσε το κινητό. Μέγεθος μονόμετρο και πάντα θετικό. Μονάδα μέτρησης στο SI, το 1m.

Στιγμιαία ταχύτητα, $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$: Είναι ο ρυθμός μεταβολής της θέσης. Είναι διανυσματικό μέγεθος και αναφέρεται σε ορισμένο σημείο της τροχιάς του κινητού και σε ορισμένη χρονική στιγμή. Εκφράζεται ως το πηλίκο μια στοιχειώδους μετατόπισης $d\vec{x}$ που πραγματοποιείται σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα dt .

Ταχύτητα, $\vec{v} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$: Είναι το πηλίκο της μετατόπισης του κινητού προς τη χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο πραγματοποιήθηκε. Λέγεται και μέση διανυσματική ταχύτητα και είναι μέγεθος διανυσματικό.

Μέση (αριθμητική) ταχύτητα $v_m = \frac{s}{t}$: Είναι το πηλίκο του διαστήματος που διάνυσε το κινητό προς τη χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο διανύθηκε.

Μονάδα κάθε ταχύτητας στο SI είναι το 1m/s.

Άλλη μονάδα ταχύτητας είναι το 1km/h=(10/36)m/s.

Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση: Είναι ευθύγραμμη κίνηση κατά την οποία το διάνυσμα της ταχύτητας διατηρείται σταθερό. Το κινητό διανύσει σε ίσα χρονικά διαστήματα, ίσες μετατοπίσεις. Μέση και στιγμιαία ταχύτητα ταυτίζονται.

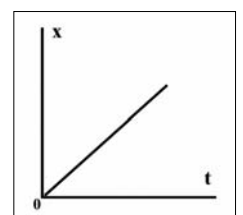
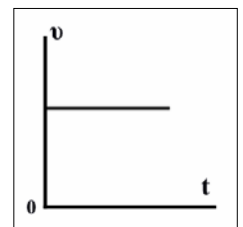
Έτσι:

$$v = \text{σταθ} \text{ και } \Delta x = v \cdot \Delta t$$

Αν για $t_0 = 0$ είναι $x_0 = 0$ τότε:

$$v = \text{σταθ} \text{ και } x = v \cdot t$$

Στο διάγραμμα ($v-t$) το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα των χρόνων για ορισμένο χρονικό διάστημα ισούται αλγεβρικά με τη μετατόπιση.



Στο διάγραμμα (x-t) η κλίση της ευθείας είναι αριθμητικά ίση με την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας. Κλίση είναι η εφαπτομένη της γωνίας μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα των χρόνων.

Στιγμιαία επιτάχυνση, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$: Είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας. Είναι διανυσματικό μέγεθος και αναφέρεται σε ορισμένο σημείο της τροχιάς του κινητού και σε ορισμένη χρονική στιγμή. Εκφράζεται ως το πηλίκο μια στοιχειώδους μεταβολής της ταχύτητας $d\vec{v}$ που πραγματοποιείται σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα dt .

Επιτάχυνση, $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$: Είναι το πηλίκο της μεταβολής της ταχύτητας του κινητού προς τη χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο πραγματοποιήθηκε. Λέγεται και μέση διανυσματική επιτάχυνση και είναι μέγεθος διανυσματικό.

Μονάδα μέτρησης της κάθε επιτάχυνσης στο SI είναι το 1m/s^2 .

Το πρόσημο της επιτάχυνσης είναι ίδιο με το πρόσημο της μεταβολής της ταχύτητας.

Στην επιταχυνόμενη κίνηση, ($a > 0$), ταχύτητα και επιτάχυνση έχουν την ίδια κατεύθυνση.

Στην επιβραδυνόμενη κίνηση ($a < 0$), ταχύτητα και επιτάχυνση έχουν αντίθετη κατεύθυνση.

Ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση: Είναι ευθύγραμμη κίνηση κατά την οποία το διάνυσμα της επιτάχυνσης μένει σταθερό, $\vec{a} = \text{σταθ.}$

Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση: Είναι ευθύγραμμη κίνηση κατά την οποία το διάνυσμα της επιτάχυνσης μένει σταθερό, και της ίδιας κατεύθυνσης με την αρχική ταχύτητα. Το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται με σταθερό ρυθμό: $a = \text{σταθ.} > 0$

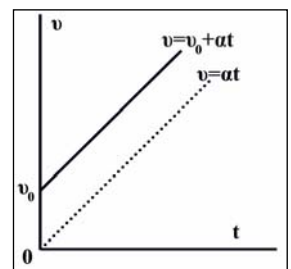
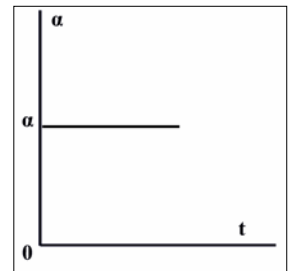
Αν τη χρονική στιγμή t_0 η ταχύτητα είναι v_0 και η θέση $x = x_0$ τότε σε μια τυχαία χρονική στιγμή t , η ταχύτητα, v και η μετατόπιση $\Delta x = x - x_0$ θα είναι:

Οι εξισώσεις: $v = v_0 + a\Delta t$ $\Delta x = v_0\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2$

Αν $v_0 = 0$ τότε $v = a \cdot \Delta t$ $\Delta x = \frac{1}{2}a \cdot \Delta t^2$

Αν για $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ τότε: $v = v_0 + a \cdot t$ $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

Αν για $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $v_0 = 0$ τότε: $v = at$ $x = \frac{1}{2}at^2$

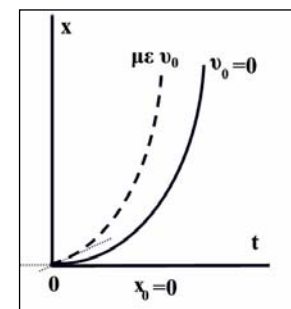


Σημ. Στο διάγραμμα (v-t) η κλίση της ευθείας είναι αριθμητικά ίση με την αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης.

Στο διάγραμμα (a-t) το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα των χρόνων για ορισμένο χρονικό διάστημα ισούται αριθμητικά με τη μεταβολή ταχύτητας.

Στο διάγραμμα (v-t) το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα των χρόνων για ορισμένο χρονικό διάστημα ισούται αριθμητικά με τη μετατόπιση.

Η γραφική παράσταση x-t είναι παραβολή με αυξανόμενη κλίση μιας και αυτή εκφράζει την ταχύτητα που αυξάνεται



Ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση: Είναι ευθύγραμμη κίνηση κατά την οποία το διάνυσμα της επιτάχυνσης μένει σταθερό, και με αντίθετη κατεύθυνση από την αρχική ταχύτητα. Το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται με σταθερό ρυθμό: $a = \text{σταθ.} < 0$

Οι εξισώσεις :

$$v = v_0 - |a|\Delta t \quad \Delta x = v_0 \Delta t - \frac{1}{2}|a|\Delta t^2$$

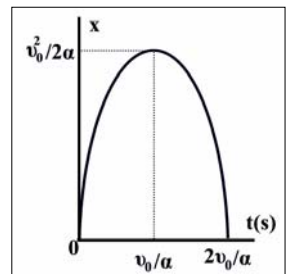
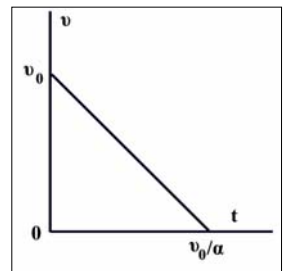
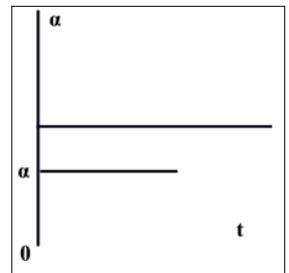
Αν για $t_0=0$ είναι $x_0=0$:

$$v = v_0 - |a|t \quad x = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$$

Για να μηδενιστεί η ταχύτητα ($v=0$) απαιτείται χρονικό διάστημα: $\Delta t_{\text{stop}} = \frac{v_0}{a}$

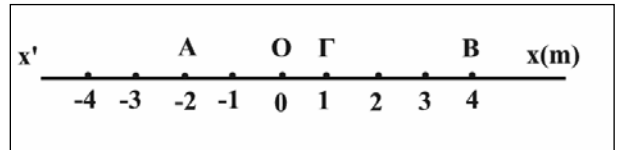
Τότε η μέγιστη μετατόπιση είναι: $\Delta x_{\text{stop}} = \frac{v_0^2}{2a}$

Σημ. Η γραφική παράσταση $x-t$ είναι παραβολή με μειούμενη κλίση μέχρι τη στιγμή t_{stop} μιας και η κλίση εκφράζει την ταχύτητα που μειώνεται. Μετά το τη στιγμή t_{stop} , αν το σώμα συνεχίσει να κινείται με αντίθετη κατεύθυνση και με την ίδια επιτάχυνση, η ταχύτητα αυξάνεται κατά μέτρο αλλά μειώνεται αλγεβρικά αφού είναι αρνητική. Οι εξισώσεις της ομαλά επιβραδυνόμενης κίνησης μπορούν να περιγράψουν και αυτήν την φάση της κίνησης που είναι επιταχυνόμενη αλλά με αρνητική επιτάχυνση.



Β' ΘΕΜΑΤΑ ΜΕ ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥΣ

B.1.1 Κινητό κινείται πάνω στον άξονα $x'Ox$. Σε ποιες από τις παρακάτω τρεις μετακινήσεις, η τελική μετατόπιση είναι $\Delta x = -3m$ και το συνολικό διάστημα $s = 3m$;
 α. Από το σημείο Α στο σημείο Β και μετά στο Γ.
 β. Από το σημείο Β στο σημείο Α και μετά στο Ο.
 γ. Από το σημείο Γ στο σημείο Ο και μετά στο Α.



Απάντηση

Στη διαδρομή (α): $\Delta x_{A\Gamma} = x_{\Gamma} - x_A = 1m - (-2m) = 3m$

$S_{AB\Gamma} = S_{AB} + S_{B\Gamma} = 6m + 3m = 9m$

Στη διαδρομή (β): $\Delta x_{BO} = x_O - x_B = 0m - (4m) = -4m$

$S_{BAO} = S_{BA} + S_{AO} = 6m + 2m = 8m$

Στη διαδρομή (γ): $\Delta x_{\Gamma A} = x_A - x_{\Gamma} = -2m - 1m = -3m$

$S_{\Gamma O A} = S_{\Gamma O} + S_{OA} = 1m + 2m = 3m$

Σωστό είναι το (γ)

B.1.2 Τα 144km/h ισοδυναμούν με:

α. 10m/s,

β. 40m/s,

γ. 72m/s

Απάντηση

Το 1km=1000m και 1h=3600s

$v = 144 \frac{km}{h} = 144 \cdot \frac{1000m}{3600s} = 40m/s \rightarrow v = 40m/s$

Σωστό είναι το (α)

B.1.3 Τα 25m/s ισοδυναμούν με:

α. 30km/h,

β. 90km/h,

γ. 0,250km/h

Απάντηση

Το 1km=1000m $\rightarrow 1m = \frac{1}{1000}km$ και 1h=3600s $\rightarrow 1s = \frac{1}{3600}h$

$v = 25 \frac{m}{s} = 25 \cdot \frac{\frac{1}{1000}km}{\frac{1}{3600}h} \rightarrow v = 90km/h$

Σωστό είναι το (β)

B.1.4 Στο διάγραμμα του σχήματος φαίνονται οι μεταβολές θέσης δύο κινητών που κινούνται ευθύγραμμα στον ίδιο άξονα.

I. Ο λόγος των ταχυτήτων των δύο κινητών v_A/v_B είναι:

α. $v_A/v_B = 0,4$

β. $v_A/v_B = 0,6$

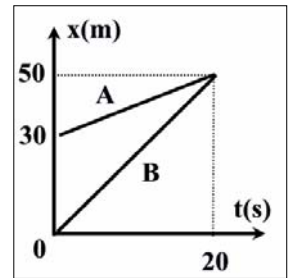
γ. $v_A/v_B = 1$

II. Τη χρονική στιγμή $t=10s$ η μεταξύ τους απόσταση είναι

α. $\Delta x = 20m$

β. $\Delta x = 10m$

γ. $\Delta x = 15m$



Απάντηση

I. Οι γραφικές παραστάσεις θέσης-χρόνου των δύο κινητών είναι ευθείες πράγμα που σημαίνει ότι οι κινήσεις είναι ευθύγραμμες και ομαλές. Οι ταχύτητες είναι σταθερές:

$$v_A = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{50m - 30m}{20s - 0s} = 1m/s$$

$$v_B = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{50m - 0m}{20s - 0s} = 2,5m/s$$

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{1m/s}{2,5m/s} \rightarrow \frac{v_A}{v_B} = 0,4$$

Σωστό είναι το (α)

II. Στα 10s το A θα βρίσκεται στη θέση $x_A = v_A t = 1m/s \cdot 10s = 10m$

Και το B στη θέση

$$x_B = v_B \cdot t = 2,5m/s \cdot 10s = 25m$$

$$\Delta x = x_B - x_A = 25m - 10m \rightarrow \Delta x = 15m$$

Το B προηγείται του A κατά 15m

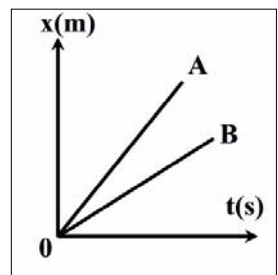
Σωστό είναι το (γ)

B.1.5 Στο διάγραμμα βλέπουμε τη μεταβολή της θέσης σε σχέση με το χρόνο για δύο κινητά A και B που κάνουν ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Για τις ταχύτητες ισχύει

α. $v_A = v_B$

β. $v_A > v_B$

γ. $v_A < v_B$



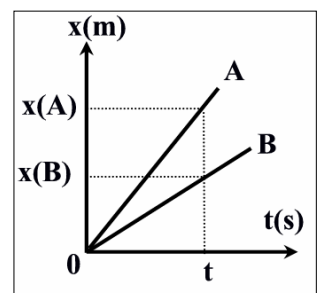
Απάντηση

Σε μια τυχαία χρονική στιγμή, t , το κινητό A βρίσκεται στη θέση $x(A)$ και το κινητό B στη θέση $x(B)$. Από το διάγραμμα φαίνεται ότι $x(A) > x(B)$.

$$\text{Οι ταχύτητες είναι: } v_A = \frac{\Delta x_A}{\Delta t} = \frac{x(A)}{t}$$

$$v_B = \frac{\Delta x_B}{\Delta t} = \frac{x(B)}{t}$$

Άρα: $v_A > v_B$ Σωστό είναι το (β)



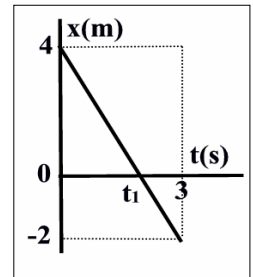
Σημ. Όταν η κλίση της ευθείας στο $(x-t)$ είναι μεγαλύτερη είναι και η ταχύτητα μεγαλύτερη

B.1.6 Στο διάγραμμα βλέπουμε τη μεταβολή της θέσης σε σχέση με το χρόνο για ένα κινητό που κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Το κινητό περνάει από τη θέση $x=0$ τη χρονική στιγμή

α. $t_1=2s$

β. $t_1=1s$

γ. $t_1=1,5s$



Απάντηση

Για να βρούμε τη χρονική στιγμή t_1 που περνάει από κάποια θέση, $x_1=0$, χρειάζεται να έχουμε βρει την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας. Σαυτό θα μας βοηθήσει το διάγραμμα και ο ορισμός της ταχύτητας. Από το διάγραμμα φαίνεται ότι για $t_{αρχ}=0$ είναι στη θέση $x_{αρχ}=4m$ και για $t_{τελ}=3s$ είναι στη $x_{τελ}=-2m$. Άρα:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{τελ} - x_{αρχ}}{\Delta t} = \frac{-2m - 4m}{3s - 0s} \rightarrow v = -2m/s$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι το κινητό κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα κίνησης. Το κινητό φτάνει στη θέση $x_1=0$, τη χρονική στιγμή t_1

$$\Delta x = v \cdot \Delta t \rightarrow x_1 - x_{αρχ} = v(t_1 - t_{αρχ}) \rightarrow t_1 = \frac{0m - 4m}{-2m/s} \rightarrow t_1 = 2s \quad \text{Σωστό είναι το (α)}$$

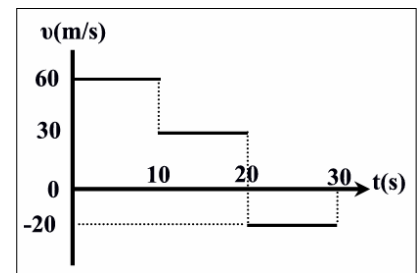
B.1.7 Το διάγραμμα του σχήματος δίνει τη μεταβολή της ταχύτητας ενός σωματιδίου που κινείται ευθύγραμμα σε σχέση με το χρόνο. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $x_{αρχ}=-200m$.

I. Η συνολική μετατόπιση $\Delta x_{ολ}$ στο χρονικό διάστημα $[0,30s]$ είναι

α. 800m

β. 700m

γ. 1100m



II. Το συνολικό διάστημα $s_{ολ}$ που διένυσε στο ίδιο χρονικό διάστημα είναι

α. 1100m

β. 700m

γ. 800m

III. Η θέση του τη χρονική στιγμή $t=30s$ είναι

α. $x=500m$

β. $x=900m$

γ. $x=700m$

Απάντηση

I. Η συνολική μετατόπιση είναι το αλγεβρικό άθροισμα των επιμέρους μετατοπίσεων, δηλαδή $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3$.

Αυτές μπορούμε να τις υπολογίσουμε αριθμητικά από τα εμβαδά των χωρίων που σχηματίζονται στο δεδομένο διάγραμμα $v-t$.

$$\Delta x_1 = 60m/s \cdot 10s = 600m \quad \Delta x_2 = 30m/s \cdot (20-10)s = 300m \quad \Delta x_3 = -20m/s \cdot (30-20)s = -200m$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 600m + 300m - 200m \rightarrow \Delta x = 700m \quad \text{Σωστό είναι το (β)}$$

II. Το συνολικό διάστημα ισούται με το άθροισμα των αποστάσεων που διένυσε σε κάθε χρονικό διάστημα δηλαδή το άθροισμα των απολύτων τιμών των επιμέρους μετατοπίσεων.

$$S_{ολ} = s_1 + s_2 + s_3 = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| = 600\text{m} + 300\text{m} + 200\text{m} \rightarrow S_{ολ} = \mathbf{1100\text{m}}$$

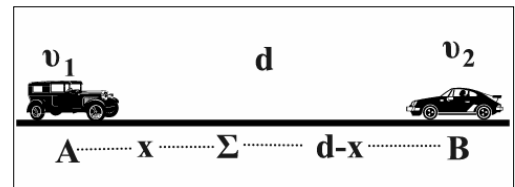
Σωστό είναι το **(α)**

III. Για την τελική θέση με δεδομένο ότι $x_{αρχ} = -200\text{m}$:

$$\Delta x_{ολ} = x_{τελ} - x_{αρχ} \rightarrow x_{τελ} = \Delta x_{ολ} + x_{αρχ} = 700\text{m} + (-200\text{m}) \rightarrow x_{τελ} = \mathbf{500\text{m}}$$

Σωστό το **(α)**

B.1.8 Από δύο σημεία A και B ενός ευθύγραμμου δρόμου περνούν, τη χρονική στιγμή $t_0=0$, δύο αυτοκίνητα με σταθερές ταχύτητες $v_1=10\text{m/s}$ και $v_2=20\text{m/s}$, αντίστοιχα. Τα δύο σημεία απέχουν απόσταση $AB=d=3\text{km}$ και τα αυτοκίνητα κινούνται με αντίθετες φορές με στόχο να συναντηθούν. Το σημείο συνάντησης απέχει από το σημείο A απόσταση



α. 2km

β. 0,6km

γ. 1km

Απάντηση

Έστω Σ το σημείο συνάντησης που απέχει απόσταση x από το σημείο A. Τότε όμως θα απέχει και απόσταση $d-x$ από το σημείο B. Τα αυτοκίνητα φτάνουν στο σημείο Σ τη χρονική στιγμή t . Άρα

$$x = v_1 t \quad (1) \quad \text{και} \quad d - x = v_2 t \quad (2)$$

$$\text{Από (1)+(2)} \rightarrow x + d - x = v_1 t + v_2 t \rightarrow d = (v_1 + v_2)t \rightarrow t = \frac{d}{v_1 + v_2} \rightarrow t = 100\text{s}$$

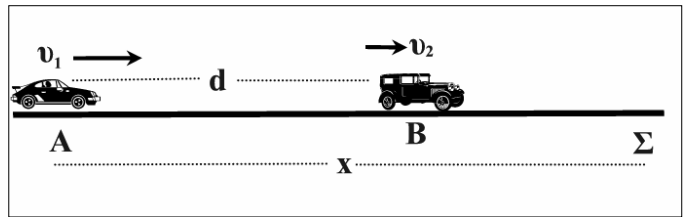
$$\text{Άρα (1)} \rightarrow x = (10\text{m/s}) \cdot 100\text{s} \rightarrow x = \mathbf{1000\text{m} = 1\text{km}}$$

Σωστό είναι το **(γ)**

Σημ. Υποθέτουμε ότι τη χρονική στιγμή $t_0=0$ το αυτοκίνητο A εκπέμπει έναν ηχητικό παλμό ο οποίος κινείται οριζόντια με σταθερή ταχύτητα $v=340\text{m/s}$. Ο παλμός ανακλάται συνεχώς πάνω στα δύο αυτοκίνητα χωρίς να αλλάζει ταχύτητα καθώς πηγαиноέρχεται μεταξύ τους. Το συνολικό διάστημα που διανύει ο παλμός μέχρι τα αυτοκίνητα να συναντηθούν είναι:

$$S = vt = 340\text{m/s} \cdot 100\text{s} = 34000\text{m} \rightarrow S = \mathbf{34\text{km}}$$

B.1.9 Από δύο σημεία Α και Β ενός ευθύγραμμου δρόμου περνάνε, τη χρονική στιγμή $t_0=0$, δύο αυτοκίνητα με σταθερές ταχύτητες $v_1=20\text{m/s}$ και $v_2=10\text{m/s}$, αντίστοιχα. Τα δύο σημεία απέχουν αρχικά απόσταση $AB=d=3000\text{m}$ και τα αυτοκίνητα κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση. Το σημείο συνάντησης Σ απέχει από το σημείο Α απόσταση



α. 2000m

β. 6000m

γ. 1000m

Απάντηση

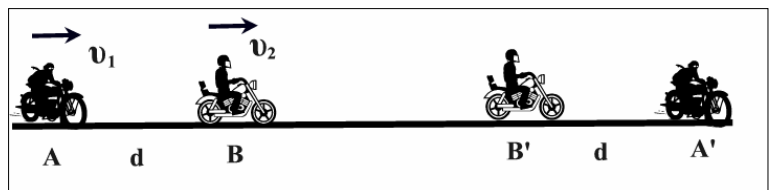
Έστω Σ το σημείο συνάντησης που απέχει απόσταση x από το Α. Σύμφωνα με το σχήμα το Σ θα απέχει και απόσταση $x-d$ από το σημείο Β. Τα αυτοκίνητα φτάνουν στο σημείο Σ τη χρονική στιγμή t . Άρα

$$x=v_1t \quad (1) \quad \text{και} \quad x-d=v_2t \quad (2)$$

$$\text{Άρα:} \quad v_1t-d=v_2t \rightarrow d=(v_1-v_2)t \rightarrow t=\frac{d}{v_1-v_2} \rightarrow t=300\text{s}$$

Άρα το σημείο Σ απέχει από το Α: $x=v_1t=20\text{m/s} \cdot 300\text{s} \rightarrow x=6000\text{m}$ Σωστό είναι το (β)

B.1.10 Δύο μοτοσικλετιστές M_1, M_2 κινούνται σε ευθύγραμμο δρόμο με σταθερές ταχύτητες ο M_1 με $v_1=3v$ και ο M_2 με $v_2=v$ προς την ίδια κατεύθυνση, με τον M_2 να προηγείται.



Μετρήσαμε ότι τη χρονική στιγμή $t_0=0$ οι μηχανές βρίσκονται στα σημεία, η μεν M_1 στο Α, η δε άλλη στο Β που απέχουν $AB=d$. Η χρονική στιγμή κατά την οποία ο μοτοσικλετιστής M_1 θα προηγείται του M_2 κατά d είναι:

α. $t=\frac{3d}{v}$

β. $t=\frac{d}{v}$

γ. $t=\frac{2d}{v}$

Απάντηση

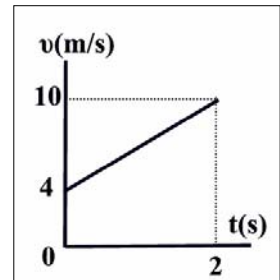
Στο ζητούμενο χρόνο t ο M_1 έχει διανύσει την απόσταση $AA'=v_1t$ ενώ ο M_2 την απόσταση $BB'=v_2t$. Από το σχήμα είναι φανερό ότι:

$$(AA')=(AB)+(BB')+(B'A') \rightarrow v_1t=d+v_2t+d \rightarrow 3vt=d+vt+d \rightarrow 2vt=2d \rightarrow t=\frac{d}{v}$$

Σωστό είναι το (β)

B.1.11 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το διάγραμμα (v-t) μιας ευθύγραμμης κίνησης ενός σώματος. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$, το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_0=0$. Τη χρονική στιγμή $t=1s$ η ταχύτητα και η θέση του σημείου είναι

- α. $v=2m/s$ και $x=1m$
 β. $v=7m/s$ και $x=5,5m$
 γ. $v=7m/s$ και $x=14m$



Απάντηση

Από το διάγραμμα φαίνεται ότι η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με αρχική ταχύτητα $v_0=4m/s$. Η επιτάχυνση είναι

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(10-4)m/s}{2s} \rightarrow a=3m/s^2$$

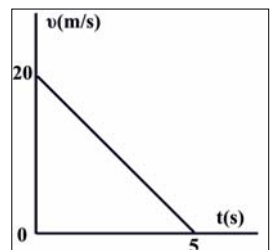
$$\text{Άρα για } t=1s \text{ είναι } v=v_0+at=4m/s+3m/s^2 \cdot 1s \rightarrow v=7m/s$$

$$x=v_0t + \frac{at^2}{2} \rightarrow x=4m+1,5m \rightarrow x=5,5m \quad \text{Σωστό είναι το (β)}$$

Σημ: Η μετατόπιση υπολογίζεται και από το εμβαδόν του τραπεζίου.

B.1.12 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου, (v-t) της ευθύγραμμης κίνησης ενός σώματος. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_0=-10m$. Η θέση του κινητού τη χρονική στιγμή $t_1=5s$ είναι:

- α. $x_1=50m$ β. $x_1=100m$ γ. $x_1=140m$



Απάντηση

Η κίνηση είναι ομαλά επιβραδυνόμενη με $v_0=20m/s$. Τη χρονική στιγμή $t=5s$ η ταχύτητα μηδενίζεται, $v=0$. Μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο της επιβράδυνσης $|a|$.

$$v=v_0-|a|t \rightarrow |a| = \frac{v_0}{t} \rightarrow |a|=4m/s^2$$

Η θέση x_1 τη χρονική στιγμή $t_1=5s$ θα είναι:

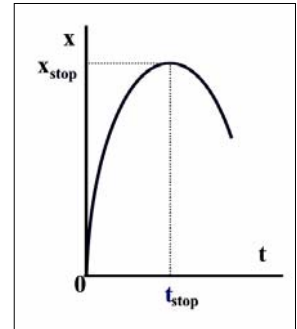
$$x_1=x_0+v_0t_1-\frac{1}{2}|a|t_1^2=-10m+20m/s \cdot 5s-\frac{1}{2} \cdot 4m/s^2 \cdot 5^2s^2 \rightarrow x_1=140m \quad \text{Σωστό είναι το (γ).}$$

B.1.13 Αυτοκίνητο έχει τη χρονική στιγμή $t_0=0$ ταχύτητα v_0 , φρενάρει και επιβραδύνεται με επιβράδυνση μέτρου $|a|$. Η μέγιστη μετατόπιση του αυτοκινήτου μέχρι να σταματήσει είναι

α. $\Delta x_{\text{stop}} = \frac{v_0^2}{2|a|}$

β. $\Delta x_{\text{stop}} = \frac{v_0^2}{|a|}$

γ. $\Delta x_{\text{stop}} = \frac{2v_0^2}{|a|}$



Απάντηση

Η χρονική διάρκεια του φρεναρίσματος μέχρι το αυτοκίνητο να σταματήσει ($v=0$) είναι

$$v = v_0 - |a|\Delta t_{\text{stop}} \rightarrow \Delta t_{\text{stop}} = \frac{v_0}{|a|} \quad (1)$$

Η μέγιστη μετατόπιση θα είναι:

$$\Delta x_{\text{stop}} = v_0(\Delta t_{\text{stop}}) - \frac{1}{2}|a|(\Delta t_{\text{stop}})^2 = \frac{v_0^2}{|a|} - \frac{v_0^2}{2|a|} \rightarrow \Delta x_{\text{stop}} = \frac{v_0^2}{2|a|} \quad \text{Σωστό είναι το (α)}$$

B.1.14 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ο τρόπος μεταβολής της ταχύτητα δύο κινητών σε σχέση με το χρόνο.

I. Για τις επιταχύνσεις ισχύει:

α. $a_A = a_B$

β. $a_A > a_B$

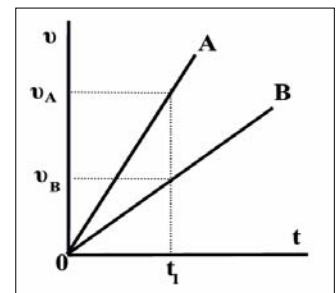
γ. $a_A < a_B$

II. Για τις μετατοπίσεις τους στο ίδιο χρονικό διάστημα $[0, t_1]$, ισχύει:

α. $\Delta x_A = \Delta x_B$

β. $\Delta x_A > \Delta x_B$

γ. $\Delta x_A < \Delta x_B$



Απάντηση

I. Σε μια τυχαία χρονική στιγμή t_1 οι ταχύτητες των δύο κινητών είναι v_A και v_B αντιστοίχως με $v_A > v_B$. Από τον ορισμό της επιτάχυνσης για ομαλά μεταβαλλόμενες κινήσεις έχουμε

$$a_A = \frac{\Delta v_A}{\Delta t} = \frac{v_A}{t_1} \quad \text{και} \quad a_B = \frac{\Delta v_B}{\Delta t} = \frac{v_B}{t_1}$$

Επειδή $v_A > v_B$ θα είναι και $a_A > a_B$. Άρα σωστό είναι το **(β)**

II. Από τα εμβαδά που σχηματίζονται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων και του άξονα των χρόνων στο ίδιο χρονικό διάστημα $[0, t_1]$, είναι προφανές ότι $\Delta x_A > \Delta x_B$. Άρα σωστό είναι το **(β)**.

Σημ. Η μεγαλύτερη κλίση της ευθείας στο διάγραμμα $v-t$ συνεπάγεται και γρηγορότερη μεταβολή ταχύτητας άρα και μεγαλύτερη επιτάχυνση. Το μεγαλύτερο εμβαδόν συνεπάγεται μεγαλύτερη μετατόπιση

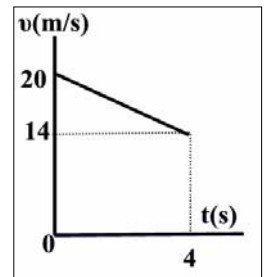
B.1.15 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της ταχύτητας ενός οχήματος που κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο, σε συνάρτηση με το χρόνο.

I. Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του οχήματος είναι:

- α. $0,5\text{m/s}^2$ β. -1m/s^2 γ. $-1,5\text{m/s}^2$

II. Η μετατόπιση του οχήματος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ s έως τη χρονική στιγμή $t = 4$ s είναι ίση με:

- α. 36 m β. 40 m γ. 68 m



Απάντηση

I. Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι η επιτάχυνση $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(14-20)\text{m/s}}{4\text{s}} \rightarrow a = -1,5\text{m/s}^2$.

Σωστό είναι το (γ)

II. Η μετατόπιση ισούται με το εμβαδόν μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα των χρόνων δηλαδή με το εμβαδόν του τραπεζίου που φαίνεται στο σχήμα

$$\Delta x = \frac{(20+14)\text{m/s}}{2} \cdot 4\text{s} \rightarrow \Delta x = 68\text{m} \quad \text{Σωστό είναι το (γ)}$$

B.1.16 Δύο αυτοκίνητα Α και Β με ταχύτητες v_1 και v_2 φρενάρουν ταυτόχρονα και επιβραδύνονται με επιβραδύνσεις που έχουν μέτρα a_1 και a_2 με $a_2 = 2a_1$. Μέχρι να σταματήσουν διανύουν διαστήματα s_1 και s_2 αντιστοίχως με σχέση $s_2 = 8s_1$. Για τις αρχικές τους ταχύτητες ισχύει η σχέση:

- α. $v_2 = 4v_1$ β. $v_2 = 2v_1$ γ. $v_2 = 8v_1$

Απάντηση

Η μέγιστη μετατόπιση κατά τη διάρκεια του ομαλά επιβραδυνόμενου φρεναρίσματος είναι

$$\Delta x_{\text{stop}} = \frac{v_0^2}{2a} \quad (\text{βλέπε B.1.13}).$$

$$\text{Άρα } s_1 = \frac{v_1^2}{2a_1} \quad \text{και} \quad s_2 = \frac{v_2^2}{2a_2}.$$

Από τη σχέση των μετατοπίσεων $s_2 = 8s_1$ και τη σχέση των επιβραδύνσεων $a_2 = 2a_1$ έχουμε:

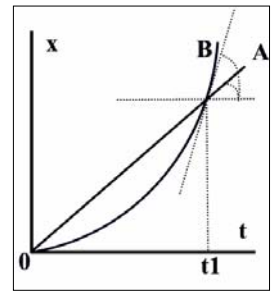
$$s_2 = 8s_1 \rightarrow \frac{v_2^2}{2a_2} = 8 \frac{v_1^2}{2a_1} \rightarrow \frac{v_2^2}{2 \cdot 2a_1} = 8 \frac{v_1^2}{2a_1} \rightarrow v_2^2 = 16v_1^2 \rightarrow v_2 = 4v_1 \quad \text{Σωστό είναι το (α)}$$

B.1.17 Στο διπλανό διάγραμμα φαίνονται οι μεταβολές της θέσης δύο κινητών σε σχέση με το χρόνο, που κάνουν ευθύγραμμες κινήσεις. Τη χρονική στιγμή t_1 οι ταχύτητες των κινητών είναι v_A και v_B αντιστοίχως για τα μέτρα των οποίων ισχύει

α. $v_A = v_B$

β. $v_A > v_B$

γ. $v_A < v_B$



Απάντηση

Το σημείο τομής Σ των δύο γραφικών παραστάσεων $x-t$ αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή t_1 που τα δύο κινητά βρίσκονται στην ίδια θέση x_1 . Η ταχύτητα ισούται με το ρυθμό μεταβολής της θέσης άρα με την κλίση της γραμμής μεταβολής της θέσης x σε σχέση με το χρόνο. Από το διάγραμμα είναι φανερό ότι η κλίση της καμπύλης Β στο Σ είναι μεγαλύτερη από την κλίση της ευθείας Α στο ίδιο σημείο. Άρα $v_B > v_A$. Σωστό είναι το (γ).

► **B.1.18** Δρομέας των 100m μπορεί να τρέξει με μέγιστη επιτάχυνση 10m/s^2 και μπορεί να αποκτήσει μέγιστη ταχύτητα έως 10m/s . Ο μικρότερος χρόνος που μπορεί ο δρομέας αυτός να τρέξει τα 100m είναι

α. $t=10\text{s}$

β. $t=10,5\text{s}$

γ. $t=9,5\text{s}$

Απάντηση

Ο δρομέας ξεκινάει ως γνωστόν από την ηρεμία. Αν επιταχύνεται με τη μέγιστη δυνατή επιτάχυνση $a=10\text{m/s}^2$, θα αποκτήσει τη μέγιστη ταχύτητα $v=10\text{m/s}$ σε χρόνο $\Delta t_1 = v/a = 1\text{s}$. Στο χρονικό διάστημα αυτό θα έχει διανύσει μια απόσταση $\Delta x_1 = \frac{1}{2}a\Delta t_1^2 = 5\text{m}$. Συνεπώς του απομένουν μέχρι τα 100m άλλα $\Delta x_2 = 95\text{m}$ να τα τρέξει με τη μέγιστη σταθερή ταχύτητα $v=10\text{m/s}$, συνεπώς χρειάζεται ακόμα χρόνο

$\Delta x_2 = v\Delta t_2 \rightarrow \Delta t_2 = 9,5\text{s}$. Συνεπώς ο συνολικός χρόνος που θα διανύσει τα 100m του αγωνίσματος θα είναι

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 \rightarrow \Delta t = 10,5\text{s}. \text{ Σωστό είναι το (β).}$$

► **B.1.19** Ο αναβάτης μιας μοτοσικλέτας ξεκινάει από ένα πράσινο φανάρι χωρίς αρχική ταχύτητα και θέλει να φτάσει στο λιγότερο δυνατό χρόνο σε ένα κόκκινο φανάρι που βρίσκεται σε απόσταση 400m και να σταματήσει ακριβώς μπροστά του. Η μηχανή του μπορεί να αποκτήσει μέγιστη επιτάχυνση 10m/s^2 αλλά και μέγιστη επιβράδυνση ίσου μέτρου, ενώ η μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να πιάσει είναι τα 144km/h .

Το ελάχιστο χρονικό διάστημα που μπορεί να διανύσει τη συγκεκριμένη απόσταση από φανάρι σε φανάρι είναι

α. 10s

β. 12s

γ. 14s

Απάντηση

Ο αναβάτης πρέπει να κάνει στην αρχή επιταχυνόμενη κίνηση με $a_1=10\text{m/s}^2$ και για χρόνο t_1 μέχρι να πιάσει τη μέγιστη δυνατή ταχύτητα $v_1=144\text{km/h}=40\text{m/s}$. Μετά να κινηθεί ομαλά με αυτήν την ταχύτητα για χρόνο t_2 και τέλος να επιβραδυνθεί με $a_2=10\text{m/s}^2$ για χρόνο t_3 και να σταματήσει. Στο συνολικό χρονικό διάστημα πρέπει να διανύσει συνολικά $\Delta x=400\text{m}$.

Στην επιταχυνόμενη διαδρομή ισχύουν:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 \text{ με τελική ταχύτητα, } v_1 = a_1 t_1 = 40\text{m/s} \rightarrow t_1 = v_1/a_1 = 4\text{s}$$

Άρα στο διάστημα αυτό έχει διανύσει απόσταση $\Delta x_1 = \frac{1}{2}10 \cdot 4^2 = 80\text{m}$

Στην ομαλή διαδρομή ισχύει: $\Delta x_2 = v_1 t_2$

Στην επιβραδυνόμενη: $\Delta x_3 = v_1 t_3 - \frac{1}{2}a_2 t_3^2$ και $v_{\text{τελ}} = v_1 - a_2 t_3$ με $v_{\text{τελ}} = 0$ άρα $t_3 = \frac{v_1}{a_2} = 4\text{s}$.

$$\text{Συνεπώς } \Delta x_3 = \frac{v_1^2}{2a_2} = 80\text{m}$$

$$\text{Ισχύει: } \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 \rightarrow \Delta x_2 = 400\text{m} - 80\text{m} - 80\text{m} \rightarrow \Delta x_2 = 240\text{m}$$

$$\text{Άρα } \Delta x_2 = v_1 t_2 \rightarrow t_2 = \frac{\Delta x_2}{v_1} = \frac{240\text{m}}{40\text{m/s}} \rightarrow t_2 = 6\text{s}$$

$$\text{Άρα } t_{\text{ολ}} = t_1 + t_2 + t_3 = 4\text{s} + 6\text{s} + 4\text{s} \rightarrow t_{\text{ολ}} = 14\text{s} \text{ Σωστό είναι το (γ)}$$

► **B.1.20** Ποδηλάτης βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t_0=0$ στη θέση $x_0=0$ με ταχύτητα $v_0=0$ και κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και αυξάνει την ταχύτητά του κατά 8m/s κάθε 2s . Η μετατόπιση του ποδηλάτη κατά τη διάρκεια του $6^{\text{ου}}$ δευτερόλεπτου της κίνησης είναι

α. $\Delta x=20\text{m}$

β. $\Delta x=22\text{m}$

γ. $\Delta x=24\text{m}$

Απάντηση

$$\text{Η επιτάχυνση του ποδηλάτη είναι } a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{8\text{m/s}}{2\text{s}} \rightarrow a = 4\text{m/s}^2$$

Το 6^{o} sec διαρκεί από τη χρονική στιγμή $t_1=5\text{s}$ έως τη $t_2=6\text{s}$. Θα υπολογίσουμε τις θέσεις του ποδηλάτη x_1, x_2 αυτές τις χρονικές στιγμές και στη συνέχεια θα τις αφαιρέσουμε για να υπολογίσουμε τη μετατόπιση κατά τη διάρκεια του $6^{\text{ου}}$ s.

$$x_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = 2\text{m/s}^2 \cdot 25\text{s}^2 = 50\text{m}$$

και

$$x_2 = \frac{1}{2}at_2^2 = 2\text{m/s}^2 \cdot 36\text{s}^2 = 72\text{m}$$

Άρα η μετατόπιση από t_1 έως t_2 θα είναι

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 72\text{m} - 50\text{m} \rightarrow \Delta x = 22\text{m} \quad \text{Σωστό είναι το (β)}$$

B.1.21 Ο χρόνος αντίδρασης του οδηγού αυτοκινήτου είναι 0,4s. Ο οδηγός κινείται με 20m/s όταν βλέπει εμπόδιο και πατά φρένο. Το αυτοκίνητο επιβραδύνει με σταθερή επιβράδυνση $\alpha=10\text{m/s}^2$. Αν το εμπόδιο βρίσκεται σε απόσταση 30m από το σημείο που το είδε ο οδηγός, το αυτοκίνητο θα

- α. σταματήσει ακριβώς μπροστά στο εμπόδιο
- β. σταματήσει 2m πριν το εμπόδιο
- γ. θα συγκρουστεί με το εμπόδιο

Απάντηση

Αφού ο χρόνος αντίδρασης είναι $t_{av}=0,4\text{s}$ αυτό σημαίνει ότι από τη στιγμή που αποφασίζει να φρενάρει σε απόσταση 30m από το εμπόδιο και για 0,4s, διανύει ομαλά απόσταση, d που είναι:

$$d=v \cdot t_{av}=(20\text{m/s}) \cdot (0,4\text{s}) \rightarrow d=8\text{m}$$

Συνεπώς απομένουν $30\text{m}-8\text{m}=22\text{m}$ να τα διανύσει επιβραδυνόμενος πριν συγκρουστεί με το εμπόδιο. Με τη δεδομένη ταχύτητα $v=20\text{m/s}$ και τη δεδομένη επιβράδυνση $\alpha=10\text{m/s}^2$ θα σταματήσει αφού μετατοπιστεί κατά

$$\Delta x_{\text{stop}} = \frac{v^2}{2\alpha} = \frac{20^2\text{m/s}}{2 \cdot 10\text{m/s}^2} \rightarrow \Delta x_{\text{stop}}=20\text{m}$$

Άρα $22\text{m}-20\text{m}=2\text{m}$, σταματάει 2m μπροστά από το εμπόδιο. Συνεπώς σωστό είναι το **(β)**

► **B.1.22** Υλικό σημείο κάνει ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα v_0 . Μετά από χρόνο Δt η ταχύτητα έχει γίνει $v_1 > v_0$ ενώ στην ίδια χρονική διάρκεια έχει διανύσει απόσταση s. Η σχέση που συνδέει την επιτάχυνση α με το διάστημα s και τις ταχύτητες v_0 και v_1 είναι:

$$\alpha. v_1^2 = v_0^2 + 2s \cdot \alpha$$

$$\beta. v_1^2 = v_0^2 - 2s \cdot \alpha$$

$$\gamma. v_1^2 = v_0^2 + s \cdot \alpha$$

Απάντηση

Από τις σχέσεις $v_1 = v_0 + \alpha t \rightarrow t = \frac{v_1 - v_0}{\alpha}$ και

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \rightarrow s = v_0 \cdot \frac{v_1 - v_0}{\alpha} + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{v_1 - v_0}{\alpha} \right)^2 \rightarrow s = \frac{v_0 \cdot v_1 - v_0^2}{\alpha} + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{v_1^2 - 2v_1 \cdot v_0 + v_0^2}{\alpha^2} \rightarrow$$

$$s = \frac{2v_0 \cdot v_1 - 2v_0^2 + v_1^2 - 2v_0 v_1 + v_0^2}{2\alpha} \rightarrow s = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2\alpha} \rightarrow v_1^2 = v_0^2 + 2s \cdot \alpha. \quad \text{Σωστό είναι το (α)}$$

Σημ. Η σχέση $v_1^2 = v_0^2 + 2s \cdot \alpha$ είναι χρήσιμη όταν δεν ξέρουμε χρόνο, t. Ισχύει και για την επιβραδυνόμενη με (-) και απόλυτη τιμή στο α, δηλαδή $v_1^2 = v_0^2 - 2s \cdot |\alpha|$.

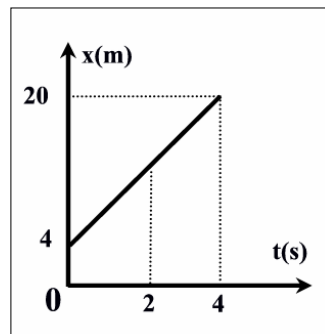
Γ' ΘΕΜΑΤΑ ΜΕ ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥΣ

Γ.1.1 Για δρομέα που κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο δίνεται το διπλανό διάγραμμα θέσης – χρόνου, (x-t).

A. Πόση είναι η ταχύτητα του δρομέα;

B. Σε ποια θέση θα βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t_1=2s$;

Γ. Σε ποια χρονική στιγμή t_2 θα βρίσκεται στη θέση $x_2=20m$;



Απάντηση

Προσέχουμε ότι από το διάγραμμα δίνεται ότι τη χρονική στιγμή $t_0=0$ το κινητό βρίσκεται στη θέση $x_0=4m$ και όχι στο $x=0$.

A. Η κίνηση είναι ευθύγραμμη και ομαλή διότι στο διάγραμμα (x-t) η γραφική παράσταση είναι ευθεία, δηλαδή έχει σταθερή κλίση. Η κλίση αυτής της ευθείας εκφράζει τη ταχύτητα που είναι σταθερή

Η ταχύτητα στη ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{20m-4m}{4s-0} \rightarrow v=4m/s$$

B. Η μετατόπιση είναι: $\Delta x_1 = vt_1 = 4m/s \cdot 2s \rightarrow \Delta x_1 = 8m$

Μέσα στα 2s μετατοπίζεται κατά 8m αλλά τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται ήδη στη θέση $x_0=4m$.

$$\text{Άρα: } x_2 = x_0 + \Delta x_1 \rightarrow x_2 = 4m + 8m \rightarrow x_2 = 12m$$

Γ. Όταν βρεθεί στη θέση $x_2=24m$ θα έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x = v \cdot \Delta t$ σε σχέση με την αρχική του θέση

$$x_2 = x_0 + v \cdot \Delta t \rightarrow x_2 - x_0 = v \cdot \Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{x_2 - x_0}{v} = \frac{24m - 4m}{4m/s} \rightarrow$$

$$\Delta t = 5s \rightarrow t_2 = 5s$$

Γ.1.2 Δίνεται το διπλανό διάγραμμα θέσης – χρόνου ενός κινητού. Να υπολογιστούν

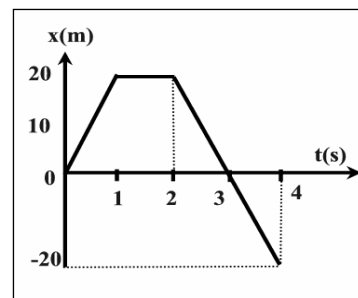
A. οι ταχύτητες τις χρονικές στιγμές $t_1=0,5s$, $t_2=1,5s$ και $t_3=3s$

B. η μετατόπιση στο χρονικό διάστημα $[0,4s]$.

Γ. το διάστημα που διένυσε από 0 έως 4s.

Δ. η μέση αριθμητική ταχύτητα

E. Να γίνει το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου ($v-t$).



Απάντηση

A. Από 0 έως 1s η ταχύτητα είναι σταθερή $v_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{20m}{1s} = 20m/s$. Άρα και τη χρονική στιγμή $t_1=0,5s$ η ταχύτητα θα είναι **$v_1=20m/s$**

Από 1s έως 2s το κινητό ηρεμεί ($x=σταθ.$) και $v_2 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0$ άρα και τη χρονική στιγμή $t_2=1,5s$ η ταχύτητα είναι **$v_2=0$**

Από 2s έως 4s η ταχύτητα είναι και πάλι σταθερή και $v_3 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(-20-20)m/s}{(4-2)s} = -20m/s$ άρα και τη χρονική στιγμή $t_3=3s$ η ταχύτητα είναι **$v_3=-20m/s$** .

B. Η τελική μετατόπιση: $\Delta x = x_{τελ} - x_{αρχ} = -20m - 0 \rightarrow \Delta x = -20m$

Γ. Το διάστημα είναι η συνολική απόσταση που διένυσε το κινητό δηλαδή το άθροισμα των επιμέρους διαστημάτων που διένυσε, $s = 20m + 0m + 20m + 20m = 60m \rightarrow s = 60m$

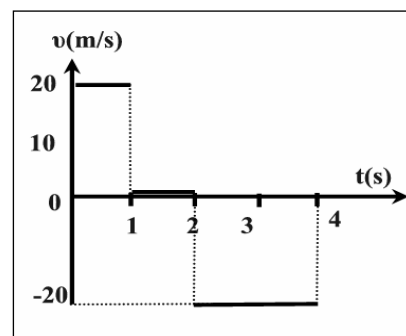
Δ. Η μέση αριθμητική ταχύτητα είναι το πηλίκο του διαστήματος που διανύει σε χρονικό διάστημα Δt προς το Δt .

$$v_{\mu} = \frac{s}{\Delta t} = \frac{60m}{4s} \rightarrow v_{\mu} = 15m/s$$

E. Το διάγραμμα της ταχύτητας χρόνου φαίνεται στο διπλανό σχήμα

Οι ταχύτητες είναι

Από (0–1)s	20m/s
(1–2)s	0m/s
(2–4)s	-20m/s



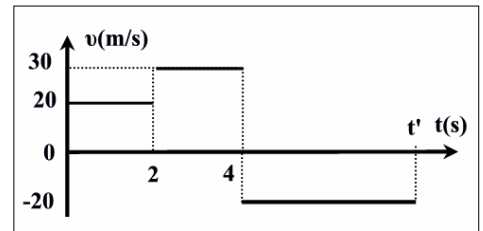
Γ.1.3 Κινητό βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t_0=0$ στη θέση $x_0=0$ του άξονα κίνησης. Στο διάγραμμα βλέπουμε τις μεταβολές της ταχύτητάς του σε σχέση με το χρόνο.

A. Να βρεθούν οι μετατοπίσεις από 0 έως το 2s και από 0 έως τα 4s.

B. Να βρεθεί η χρονική στιγμή t' που η συνολική μετατόπιση του κινητού θα είναι μηδέν.

Γ. Να υπολογιστεί η μέση αριθμητική ταχύτητα στο χρονικό διάστημα από 0s έως τη χρονική στιγμή t' .

Δ. Να γίνει η γραφική παράσταση θέσης – χρόνου ($x-t$).



Απάντηση

Το κινητό κάνει τρεις διαδοχικές ομαλές κινήσεις με τρεις διαφορετικές ταχύτητες.

A. Από 0 έως 2s κινείται με ταχύτητα $v_1=20\text{m/s}$. Άρα $\Delta x_1=v_1 \cdot \Delta t_1 \rightarrow \Delta x_1=20\text{m/s} \cdot 2\text{s} \rightarrow \Delta x_1=40\text{m}$

Από 0 έως 4s έχει διανύσει τα 2 πρώτα sec με ταχύτητα 20m/s και τα δύο επόμενα με 30m/s. Άρα έχει διανύσει συνολικά: $\Delta x_2=20\text{m/s} \cdot 2\text{s} + 30\text{m/s} \cdot 2\text{s} \rightarrow \Delta x_2=100\text{m}$

B. Οι θετικές τιμές της ταχύτητας αντιστοιχούν σε κίνηση κατά τη θετική φορά του άξονα ενώ οι αρνητικές σε κίνηση κατά την αντίθετη φορά. Μέχρι τα 4s έχει μετατοπιστεί κατά 100m προς τα θετικά και μετά αρχίζει να κινείται αντίθετα με ταχύτητα μέτρου $|v_3|=20\text{m/s}$. Άρα χρειάζεται χρόνο Δt_3 για να διανύσει τα 100m αντίθετα ώστε να επιστρέψει στο $x=0$.

$$\Delta x_3=|v_3| \Delta t_3 \rightarrow \Delta t_3=5\text{s}.$$

Άρα θα βρεθεί πάλι στο $x=0$ τη χρονική στιγμή:

$$t'=\Delta t_2+\Delta t_3=4\text{s}+5\text{s} \rightarrow t'=9\text{s}$$

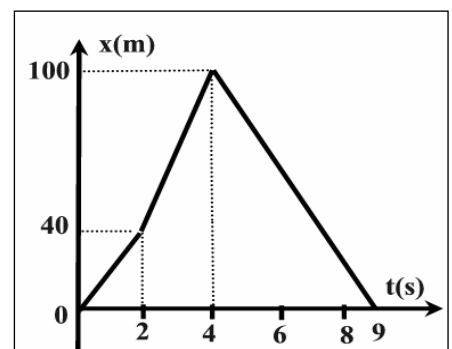
Γ. Το συνολικό διάστημα που διανύει από 0 έως t' είναι $s=100\text{m}+100\text{m}=200\text{m}$

Η χρονική διάρκεια είναι $\Delta t=t'=9\text{s}$. Η μέση αριθμητική ταχύτητα είναι το πηλίκο του διαστήματος που διανύει σε χρονικό διάστημα Δt προς το Δt .

$$v_{\mu}=\frac{s}{\Delta t}=\frac{200\text{m}}{9\text{s}} \rightarrow v_{\mu}=22,22\text{m/s}$$

Δ. Για το διάγραμμα πρέπει να προσέξουμε ότι:

Στα 2s βρίσκεται στη θέση $x_1=40\text{m}$. Στα 4s έχει διανύσει αλλά 60m και βρίσκεται στη θέση $x_2=100\text{m}$. Μετά γυρίζει πίσω και τη χρονική στιγμή 9s έχει επιστρέψει στη θέση $x_0=0$.



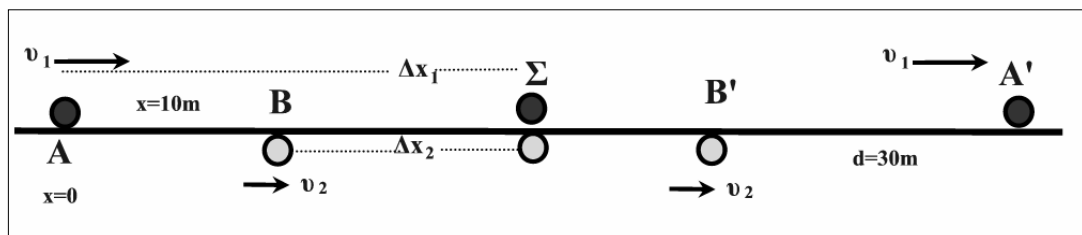
► **Γ.1.4** Δύο σφαίρες σ_1, σ_2 κινούνται σε παράλληλες τροχιές στο θετικό ημιάξονα Ax ευθύγραμμα και ομαλά με ταχύτητες $v_1=20\text{m/s}$ και $v_2=10\text{m/s}$ αντιστοίχως. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ η σ_1 είναι στη θέση A ($x_A=0$) και η σ_2 στη θέση B με $AB=10\text{m}$.

A. Να βρείτε τη θέση του σημείου συνάντησης Σ των δύο σφαιρών.

B. Να βρείτε τη χρονική στιγμή που η σφαίρα σ_1 θα προηγείται της σ_2 κατά $d=30\text{m}$.

Γ. Να γίνουν σε κοινό διάγραμμα οι γραφικές παραστάσεις θέσης – χρόνου ($x-t$) για τα δύο κινητά από 0 έως 4s.

Απάντηση



A. Στο σημείο συνάντησης Σ οι σφαίρες θα έχουν διανύσει σε χρονικό διάστημα Δt , διαστήματα

$$\Delta x_1 = v_1 \Delta t \quad \text{και} \quad \Delta x_2 = v_2 \Delta t$$

Από το σχήμα φαίνεται ότι: $\Delta x_1 - \Delta x_2 = (AB) \rightarrow v_1 \cdot \Delta t - v_2 \cdot \Delta t = (AB) \rightarrow \Delta t = \frac{(AB)}{v_1 - v_2} \rightarrow \Delta t = 1\text{s}$

$$\text{Άρα } x_\Sigma = \Delta x_1 = v_1 \cdot \Delta t \rightarrow x_\Sigma = 20\text{m}$$

B. Έστω ότι θα βρεθούν στις νέες θέσεις τους A' και B' τη χρονική στιγμή t . Τότε η σ_1 θα έχει διανύσει απόσταση $(AA') = v_1 \cdot t$ και η σ_2 $(BB') = v_2 \cdot t$. Από το σχήμα και πάλι φαίνεται ότι:

$$AA' = (AB) + (BB') + (B'A') \rightarrow v_1 t = 10\text{m} + v_2 t + 30\text{m} \rightarrow (v_1 - v_2)t = 40\text{m} \rightarrow t = 4\text{s}$$

Γ. Οι αποστάσεις που διένυσαν στα 4s είναι

$$AA' = v_1 \cdot t = 80\text{m} \quad \text{και} \quad BB' = v_2 t = 40\text{m}$$

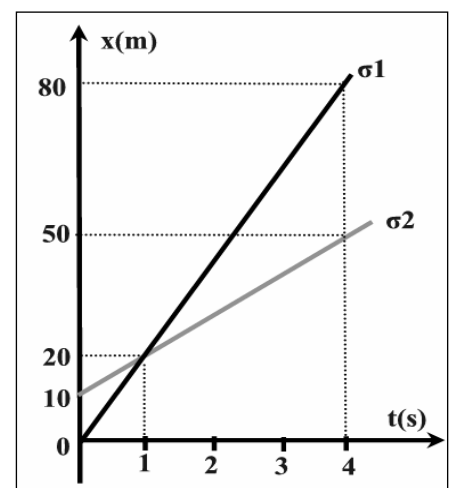
Άρα οι νέες θέσεις τους είναι

$$\text{Για τη } \sigma_1: \quad x_1 = (AA') = 80\text{m} \quad \text{και}$$

$$\text{Για τη } \sigma_2: \quad x_2 = (AB) + (BB') = 10\text{m} + 40\text{m} \rightarrow x_2 = 50\text{m}$$

Στη θέση $x_\Sigma = 20\text{m}$ είναι το σημείο συνάντησης που υπολογίσαμε στο Α ερώτημα

Σημ. Όπως βλέπουμε και στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση υπάρχουν δύσκολα προβλήματα για το μαθητή της Α λυκείου, Βασικό για να λυθούν τέτοια προβλήματα με 2 κινητά είναι η χρήση του σχήματος.

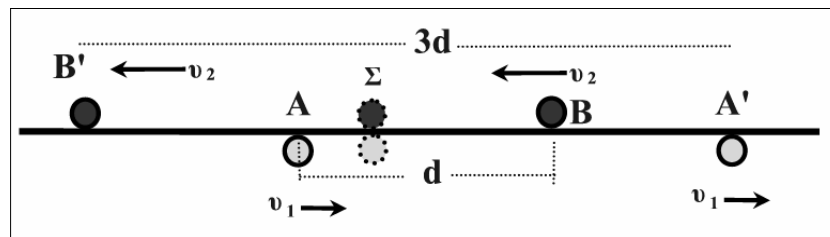


► **Γ.1.5** Δύο σφαίρες σ_1, σ_2 κινούνται σε παράλληλες τροχιές ευθύγραμμα και ομαλά με αντίθετες κατευθύνσεις και ταχύτητες που έχουν μέτρα $v_1=2\text{m/s}$ και $v_2=4\text{m/s}$ αντιστοίχως με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ η σ_1 βρίσκεται στο σημείο Α και η σ_2 στο σημείο Β και απέχουν απόσταση $AB=d$. Οι σφαίρες περνούν ταυτόχρονα από το σημείο Σ τη χρονική στιγμή $t_1=3\text{s}$.

A. Πόση είναι η απόσταση d;

Β. Ποια χρονική στιγμή t_2 οι σφαίρες θα απέχουν μεταξύ τους απόσταση $3d$;

Απάντηση



A. Μέχρι το σημείο συνάντησης Σ διανύουν αποστάσεις ΑΣ και ΒΣ αντιστοίχως

$$(A\Sigma)=v_1 t_1=2\text{m/s}\cdot 3\text{s}=6\text{m} \quad \text{και} \quad (B\Sigma)=v_2 t_1=4\text{m/s}\cdot 3\text{s}=12\text{m}$$

$$A_{\rho\alpha} d = (A\Sigma) + (B\Sigma) = 6m + 12m \rightarrow d = 18m$$

Β. Όταν θα βρεθούν στις θέσεις Α' και Β' τότε θα είναι η απόσταση (Α'Β')=3d=54m και θα έχουν διανύσει αποστάσεις:

$$(AA')=v_1\Delta t \quad \kappa\alpha\iota \quad (BB')=v_2\Delta t$$

Από το σχήμα βλέπουμε ότι: $(B'A)+(AA')=3d$ (1)

$$(A'B) + (BB') = 3d \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1)+(2). Προσοχή γιατί $(B'A)+(A'B)=3d-d=2d$

$$A\pi_0(1)+(2)\rightarrow(B'A)+v_1\Delta t+(A'B)+v_2\Delta t=6d\rightarrow(B'A)+(A'B)+(v_1+v_2)\Delta t=6d\rightarrow$$

$$2d + 6\Delta t = 6d \rightarrow 6\Delta t = 4d \rightarrow \Delta t = \frac{4d}{6} \rightarrow \Delta t = \frac{4 \cdot 18}{6} \text{ s} \rightarrow \Delta t = 12 \text{ s}$$

Αρα $t_2=12s$

Γ.1.6 Όχημα επιταχύνεται ευθύγραμμα και ομαλά από την ηρεμία.

Αν η επιτάχυνση είναι $a=4\text{m/s}^2$,

A. πόση ταχύτητα αποκτάει και πόσο διάστημα έχει διανύσει μετά από 2s;

B. σε πόσο χρόνο διανύει διάστημα $s=32\text{m}$ και πόση ταχύτητα αποκτά στο τέλος του διαστήματος αυτού;

Γ. Πόσο από το διάστημα των 32m διανύει στο τελευταίο δευτερόλεπτο της κίνησής του;

Αν μετά από διάστημα $s=4\text{m}$ έχει αποκτήσει ταχύτητα $v=2\text{m/s}$,

Δ. με πόση επιτάχυνση κινήθηκε και πόσο χρόνο χρειάστηκε για να διανύσει το διάστημα αυτό;

Απάντηση

Στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα ισχύουν οι εξισώσεις

$$v=at \quad \text{και} \quad s=\frac{1}{2}at^2$$

A. Αν γνωρίζουμε την επιτάχυνση $a=4\text{m/s}^2$ και χρονική διάρκεια $t=2\text{s}$ τότε:

$$v=at=4\text{m/s}^2 \cdot 2\text{s} \rightarrow \mathbf{v=8\text{m/s}}$$

$$s=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}4\text{m/s}^2 \cdot (2\text{s})^2 \rightarrow \mathbf{s=8\text{m}}$$

B. Από το διάστημα και την επιτάχυνση μπορούμε με τους ίδιους τύπους να υπολογίσουμε τη χρονική διάρκεια και την τελική ταχύτητα.

$$s=\frac{1}{2}at^2 \rightarrow 2s=at^2 \rightarrow t^2=\frac{2s}{a} \rightarrow t=\sqrt{\frac{2s}{a}} \rightarrow t=\sqrt{\frac{2 \cdot 32\text{m}}{4\text{m/s}^2}} \rightarrow t=\sqrt{16\text{s}^2} \rightarrow \mathbf{t=4\text{s}}$$

$$v=at \rightarrow v=4\text{m/s}^2 \cdot 4\text{s} \rightarrow \mathbf{v=16\text{m/s}}$$

Γ. Το τελευταίο δευτερόλεπτο της κίνησης των 4s διαρκεί από $t_1=3\text{s}$ έως $t_2=4\text{s}$. Υπολογίζω τις θέσεις x_1 και x_2 του κινητού και της αφαιρώ

$$x_1=\frac{at_1^2}{2}=18\text{m} \quad \text{και} \quad x_2=\frac{at_2^2}{2}=32\text{m}$$

Άρα η μετατόπιση από 3s έως 4s είναι:

$$\Delta x=x_2-x_1=32\text{m}-18\text{m} \rightarrow \mathbf{\Delta x=14\text{m}}$$

Δ. Με δεδομένα v και s πρέπει να κάνουμε απαλοιφή του χρόνου, t .

$$v=at \rightarrow t=\frac{v}{a}$$

$$s=\frac{1}{2}at^2 \rightarrow s=\frac{1}{2}a \cdot \frac{v^2}{a^2} \rightarrow s=\frac{v^2}{2a} \rightarrow a=\frac{v^2}{2s} \rightarrow a=\frac{2^2\text{m}^2/\text{s}^2}{2 \cdot 4\text{m}} \rightarrow \mathbf{a=0,5\text{m/s}^2}$$

$$t=\frac{v}{a} \rightarrow t=\frac{2\text{m/s}}{0,5\text{m/s}^2} \rightarrow \mathbf{t=4\text{s}}$$

Γ.1.7 Βαγονέτο βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t_0=0$ στη θέση $x_0=0$ με ταχύτητα $v_0=4\text{m/s}$ και κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, με $a=8\text{m/s}^2$. Τη χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται στη θέση $x=24\text{m}$. Να βρεθούν:

A. Η χρονική στιγμή t_1 .

B. Η ταχύτητα τη χρονική στιγμή t_1 .

Γ. Πόση είναι η μετατόπιση κατά τη διάρκεια του 3^{ου} δευτερόλεπτου της κίνησης;

Δ. Να γίνουν σε βαθμολογημένους άξονες οι γραφικές παραστάσεις, $(a-t)$, $(v-t)$ και $(x-t)$.

Απάντηση

A. Η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με αρχική ταχύτητα. Οι εξισώσεις που ισχύουν είναι

$$v=v_0+at \quad (1) \quad \text{και} \quad \Delta x=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \quad (2)$$

Από τη μετατόπιση: $\Delta x=x-x_0=24\text{m}$ έχουμε

$$\Delta x=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \rightarrow 24=4t+4t^2 \rightarrow t^2+t-6=0.$$

Λύνουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση που έχει διακρίνουσα: $\Delta=1^2-4\cdot 1\cdot (-6) \rightarrow \Delta=25$ και κρατάμε τη θετική τιμή για το χρόνο

$$t=\frac{-1\pm 5}{2} \rightarrow t_1=2\text{s}$$

B. Για την ταχύτητα: $v=v_0+at \rightarrow v_1=4\text{m/s}+8\text{m/s}^2\cdot 2\text{s} \rightarrow v_1=20\text{m/s}$

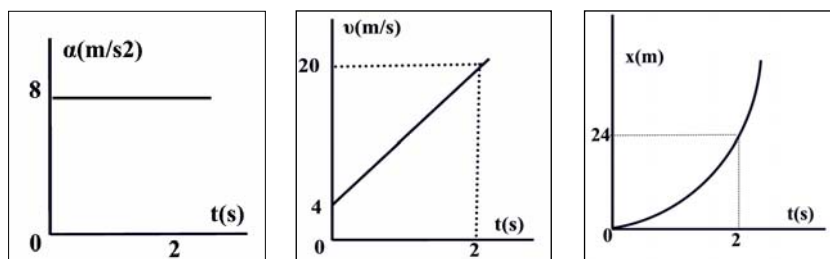
Γ. Η διάρκεια του 3^{ου} sec είναι από τη χρονική στιγμή $t_1=2\text{s}$ έως την χρονική στιγμή $t_2=3\text{s}$

Στα $t_1=2\text{s}$ γνωρίζουμε ότι βρίσκεται στη θέση $x_1=24\text{m}$

Στα $t=3\text{s}$ θα βρίσκεται στη θέση $x_2=v_0t_2+\frac{1}{2}at_2^2 \rightarrow x_2=4\text{m/s}\cdot 3\text{s}+\frac{1}{2}8\text{m/s}^2\cdot 3^2\text{s}^2 \rightarrow x_2=48\text{m}$

Άρα η μετατόπιση στη διάρκεια του 3^{ου} sec θα είναι $\Delta x=x_2-x_1=48\text{m}-24\text{m} \rightarrow \Delta x=24\text{m}$

Δ.



Γ.1.8 Ποδηλάτης ενώ κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα 10m/s, κάποια χρονική στιγμή ($t_0=0$) επιβραδύνεται ομαλά και σταματάει μετά από 12,5m από τη στιγμή t_0 .

A. Ποιο είναι το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας;

B. Ποια χρονική στιγμή μηδενίζεται η ταχύτητά του;

Γ. Σε ποια χρονική στιγμή θα έχει διανύσει 8m επιβραδυνόμενος και πόση ταχύτητα θα έχει τότε;

Απάντηση

A. Η κίνηση είναι ομαλά επιβραδυνόμενη με $v_0=10\text{m/s}$ και μέγιστο διάστημα $\Delta x_{\text{stop}}=25\text{m}$.

Η χρονική διάρκεια του φρεναρίσματος μέχρι το αυτοκίνητο να σταματήσει ($v=0$) είναι

$$v=v_0-|a|\Delta t_{\text{stop}} \rightarrow \Delta t_{\text{stop}}=\frac{v_0}{|a|} \quad (1)$$

Η μέγιστη μετατόπιση θα είναι:

$$\Delta x_{\text{stop}}=v_0(\Delta t_{\text{stop}})-\frac{1}{2}|a|(\Delta t_{\text{stop}})^2=\frac{v_0^2}{|a|}-\frac{v_0^2}{2|a|} \rightarrow \Delta x_{\text{stop}}=\frac{v_0^2}{2|a|} \rightarrow$$

$$|a|=\frac{v_0^2}{2\Delta x_{\text{stop}}} \rightarrow |a|=\frac{100\text{m}^2/\text{s}^2}{25\text{m}} \rightarrow |a|=4\text{m/s}^2$$

B. Η μέγιστη χρονική διάρκεια: $\Delta t_{\text{stop}}=\frac{v_0}{|a|} \rightarrow \Delta t_{\text{stop}}=t=2,5\text{s}$

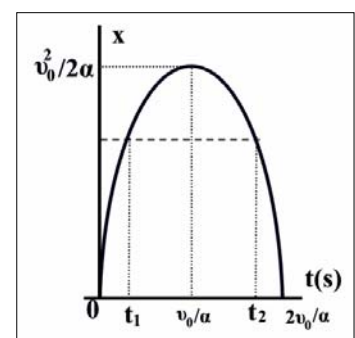
Γ. Στην ομαλά επιβραδυνόμενη ισχύουν: $v=v_0-at$ και $\Delta x=v_0t-\frac{1}{2}at^2$

$$\Delta x=v_0t-\frac{1}{2}at^2 \rightarrow 8=10t-2t^2 \rightarrow t^2-5t+4=0 \text{ με διακρίνουσα } \Delta=5^2-4\cdot 1\cdot 4=9$$

$$t_{1,2}=\frac{5\pm 3}{2} \rightarrow t_1=1\text{s} \text{ και } t_2=4\text{s}$$

Η χρονική στιγμή είναι η μικρότερη, $t_1=1\text{s}$ και η ταχύτητα θα είναι $v_1=v_0-at_1 \rightarrow v_1=6\text{m/s}$

Στην ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση το κινητό περνάει δύο φορές από κάποια θέση x . Την πρώτη, που αντιστοιχεί στην μικρότερη χρονική στιγμή (t_1) περνάει καθώς το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται. Τη δεύτερη που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη χρονική στιγμή, (t_2) περνάει όταν επιστρέφει κινούμενο αντίθετα με ταχύτητα της οποίας η αλγεβρική τιμή μειώνεται αφού είναι αρνητική ενώ το μέτρο αυξάνεται. Αυτό φαίνεται και στην πλήρη γραφική παράσταση ($x-t$) της παραβολής που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Γ.1.9 Υλικό σημείο κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα $v_0=4\text{m/s}$. Μετά από χρονικό διάστημα Δt η ταχύτητα έχει γίνει $v_1=6\text{m/s}$ ενώ στην ίδια χρονική διάρκεια έχει διανύσει απόσταση $s=10\text{m}$. Να υπολογιστούν:

A. η επιτάχυνση a .

B. το χρονικό διάστημα Δt

Γ. η μέση αριθμητική ταχύτητα στο χρονικό διάστημα Δt .

Δ. το διάστημα που θα έχει διανύσει και την ταχύτητα που θα έχει αποκτήσει σε τετραπλάσιο του Δt χρονικού διαστήματος, $\Delta t_1=4\Delta t$.

E. το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να διανύσει απόσταση $s=4,5\text{m}$.

Απάντηση

A. Από τις σχέσεις $v_1=v_0+a\cdot\Delta t \rightarrow \Delta t=\frac{v_0-v_1}{a}$ και

$$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \rightarrow s=v_0\cdot\frac{v_1-v_0}{a}+\frac{a}{2}\left(\frac{v_1-v_0}{a}\right)^2 \rightarrow s=\frac{v_0\cdot v_1-v_0^2}{a}+\frac{a}{2}\cdot\frac{v_1^2-2v_1\cdot v_0+v_0^2}{a^2} \rightarrow$$

$$s=\frac{2v_0\cdot v_1-2v_0^2+v_1^2-2v_0v_1+v_0^2}{2a} \rightarrow s=\frac{v_1^2-v_0^2}{2a} \rightarrow v_1^2=v_0^2+2s\cdot a \rightarrow a=\frac{v_1^2-v_0^2}{2s} \rightarrow \mathbf{a=1\text{m/s}^2}$$

B. Από τη σχέση που δίνει τη χρονική διάρκεια: $\Delta t=\frac{v_0-v_1}{a} \rightarrow \mathbf{\Delta t=2\text{s}}$

Γ. Η μέση αριθμητική ταχύτητα είναι το πηλίκο του διαστήματος $s=10\text{m}$ που διανύει σε χρονικό διάστημα $\Delta t=2\text{s}$ προς το Δt .

$$v_{\mu}=\frac{s}{\Delta t}=\frac{10\text{m}}{2\text{s}} \rightarrow \mathbf{v_{\mu}=5\text{m/s}}$$

Δ. Για χρονικό διάστημα: $\Delta t_1=4\Delta t=8\text{s}$ το διάστημα είναι $s_1=v_0\cdot\Delta t_1+\frac{1}{2}a\cdot\Delta t_1^2 \rightarrow \mathbf{s_1=64\text{m}}$

Η ταχύτητα: $v_1=v_0+a\Delta t_1 \rightarrow \mathbf{v_1=12\text{m/s}}$

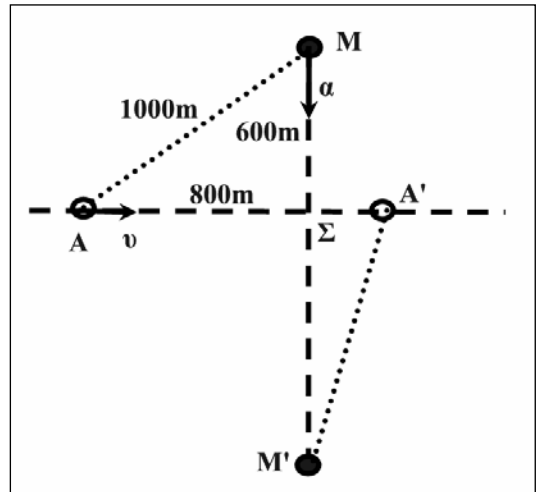
► **E.** Αν γνωρίζω εκτός των $v_0=4\text{m/s}$ και της $a=1\text{m/s}^2$ το διάστημα $s=4,5\text{m}$ και ζητώ το χρόνο $\Delta t=t$ ο δρόμος της επίλυσης περνάει από την επίλυση της δευτεροβαθμίου εξίσωσης.

$$s=v_0\cdot t+\frac{1}{2}a\cdot t^2 \rightarrow 4,5=4t+0,5t^2 \rightarrow \mathbf{t^2+8t-9=0}$$

Η διακρίνουσα είναι: $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma \rightarrow \Delta=8^2-4\cdot 1\cdot (-9) \rightarrow \Delta=100$ και $\sqrt{\Delta}=10$

$$t_{12}=\frac{-8\pm 10}{2} \rightarrow \mathbf{t_1=1\text{s}}$$

► **Γ.1.10** Αυτοκίνητο, Α, κινείται με σταθερή ταχύτητα $v_1=20\text{m/s}$ και κατευθύνεται προς τη διασταύρωση δύο δρόμων ενώ μηχανή είναι ακίνητη σε δρόμο κάθετο προς αυτόν που κινείται το αυτοκίνητο και σε απόσταση 600m από τη διασταύρωση. Τη στιγμή $t_0=0$ που τα δύο οχήματα απέχουν μεταξύ τους 1000m η μηχανή ξεκινάει με επιτάχυνση $a=3\text{m/s}^2$ κινούμενη προς τη διασταύρωση.
Α. Με ποια χρονική διαφορά φτάνουν τα δύο οχήματα στη διασταύρωση Σ;
Β. Ποια είναι τα μέτρα των ταχυτήτων με τα οποία φτάνουν στη διασταύρωση;
Γ. Πόση θα είναι η μεταξύ τους απόσταση τη χρονική στιγμή $t=50\text{s}$;



Απάντηση

Α. Χρειαζόμαστε πριν από όλα την απόσταση ΑΣ που διανύει το αυτοκίνητο. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΣΑΜ έχουμε

$$(AM)^2 = (AS)^2 + (SM)^2 \rightarrow 1000^2 \text{m}^2 = (AS)^2 + 600^2 \text{m}^2 \rightarrow (AS) = \sqrt{1000000 - 360000} = \sqrt{640000} \rightarrow$$

$$(AS) = 800\text{m}$$

Το αυτοκίνητο διανύει την απόσταση ΑΣ με σταθερή ταχύτητα $v_1=20\text{m/s}$ και φτάνει στο Σ σε χρόνο t_1

$$AS = v_1 t_1 \rightarrow t_1 = \frac{AS}{v_1} = \frac{800\text{m}}{20\text{m/s}} \rightarrow t_1 = 40\text{s}$$

Η μηχανή κινείται επιταχυνόμενα χωρίς αρχική ταχύτητα και διανύει την απόσταση ΜΣ σε χρόνο t_2 :

$$(M\Sigma) = \frac{1}{2} a t_2^2 \rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2(M\Sigma)}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 600\text{m}}{3\text{m/s}^2}} = \sqrt{400\text{s}^2} \rightarrow t_2 = 20\text{s}$$

Άρα η χρονική διαφορά άφιξης στο Σ είναι $\Delta t = t_1 - t_2 = 40\text{s} - 20\text{s} \rightarrow \Delta t = 20\text{s}$

Β. Οι ταχύτητες των δύο οχημάτων. Το αυτοκίνητο κινείται ομαλά συνεπώς φτάνει με την ταχύτητα $v_1 = 20\text{m/s}$. Η μηχανή κινείται επιταχυνόμενα και φτάνει στο Σ με ταχύτητα

$$v_2 = a t_2 = 3\text{m/s}^2 \cdot 20\text{s} \rightarrow v_2 = 60\text{m/s}$$

Γ. Στα 50s τα αυτοκίνητο έχει διανύσει την απόσταση $AA' = v_1 t = 20\text{m/s} \cdot 50\text{s} = 1000\text{m}$

Η μηχανή την απόσταση $MM' = \frac{a t^2}{2} = \frac{3\text{m/s}^2 \cdot 50^2 \text{s}^2}{2} \rightarrow MM' = 3750\text{m}$. Άρα θα απέχουν από το σταυροδρόμι Σ αποστάσεις

$$\Sigma A' = AA' - AS = 1000\text{m} - 600\text{m} = 400\text{m}$$

$$\Sigma M' = MM' - M\Sigma = 3750\text{m} - 800\text{m} = 2950\text{m}$$

$$\text{Η μεταξύ τους απόσταση είναι: } A'M' = \sqrt{\Sigma A'^2 + \Sigma M'^2} = \sqrt{400^2 + 2950^2} \rightarrow A'M' \approx 2977\text{m}$$

Δ' ΘΕΜΑΤΑ ΜΕ ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥΣ

Δ.1.1 Ένα cheetah ενώ κινείται στην αφρικανική σαβάνα κάποια χρονική στιγμή που θεωρείται ως $t_0=0$ αρχίζει να καλπάζει με σταθερή ταχύτητα $v_0=30\text{m/s}$ Μετά από 5s αρχίζει να επιβραδύνεται με σταθερή επιβράδυνση μέτρου $a_2=2\text{m/s}^2$ και κάποια στιγμή σταματάει.

A. Πόση είναι η συνολική διάρκεια κίνησης μετά τη χρονική στιγμή t_0 ;

B. Πόση είναι η συνολική απόσταση που διένυσε μέχρι να σταματήσει;

Γ. Με πόση σταθερή ταχύτητα έπρεπε να τρέχει για να διανύσει την ίδια απόσταση μέσα στον ίδιο χρόνο;

Δ. Να γίνουν σε βαθμολογημένους άξονες οι γραφικές παραστάσεις, ταχύτητας – χρόνου ($v-t$) και θέσης – χρόνου ($x-t$). Να θεωρηθεί ότι τη $t_0=0$ είναι και $x_0=0$.

Απάντηση

Στα 5s ($\Delta t_1=5\text{s}$) της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης διανύει απόσταση:

$$\Delta x_1 = v_0 \cdot \Delta t_1 = 30\text{m/s} \cdot 5\text{s} \rightarrow \Delta x_1 = 150\text{m}$$

Στη συνέχεια επιβραδύνεται με $a_2=2\text{m/s}^2$ και αρχική ταχύτητα την τελική της προηγούμενης φάσης, δηλαδή τη $v_0=30\text{m/s}$ και σταματά μετά από χρόνο Δt_2 αφού διανύσει απόσταση Δx_2 .

$$\Delta t_2 = \Delta t_{\text{stop}} = \frac{v_0}{a_2} = \frac{30\text{m/s}}{2\text{m/s}^2} \rightarrow \Delta t_2 = 15\text{s}$$

$$\Delta x_2 = \Delta x_{\text{stop}} = \frac{v_0^2}{2a_2} = \frac{30^2\text{m}^2/\text{s}^2}{4\text{m/s}^2} \rightarrow \Delta x_2 = 225\text{m}$$

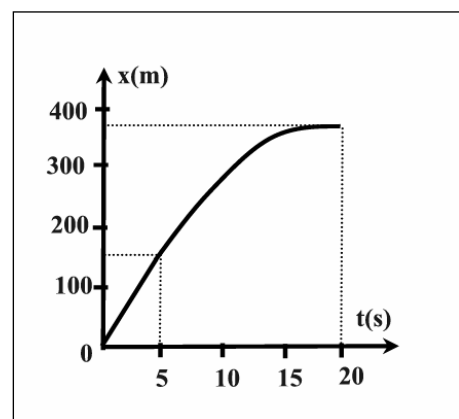
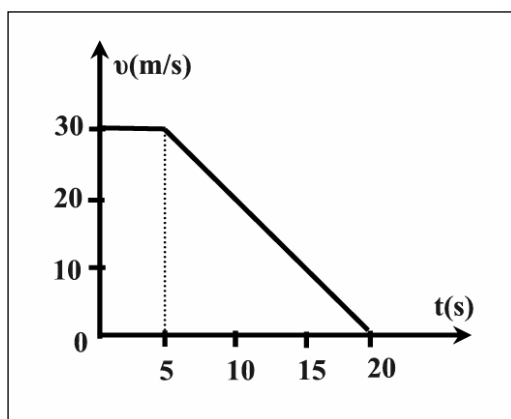
A. Άρα ο συνολικός χρόνος κίνησης είναι: $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 5\text{s} + 15\text{s} \rightarrow \Delta t = 20\text{s}$

B. Η συνολική απόσταση που διένυσε είναι: $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 150\text{m} + 225\text{m} \rightarrow \Delta x = 375\text{m}$

Γ. Η μέση αριθμητική ταχύτητα της συνολικής κίνησης είναι:

$$v_{\mu} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{375\text{m}}{20\text{s}} \rightarrow v_{\mu} = 18,75\text{m/s}$$

Δ.



► **Δ.1.2** Όχημα ξεκινάει από τη ηρεμία από τη θέση $x_0=0$ τη χρονική στιγμή $t_0=0$ και μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 επιταχύνεται με $a_1=2\text{m/s}^2$. Στη συνέχεια επιβραδύνεται με σταθερή επιβράδυνση μέτρου $a_2=8\text{m/s}^2$ και σταματάει. Ο συνολικός χρόνος κίνησης είναι $\Delta t=50\text{s}$.

A. Να βρεθεί η ταχύτητα του οχήματος τη χρονική στιγμή t_1 ;

B. Να βρεθεί η συνολική μετατόπιση του οχήματος;

Γ. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις ($v-t$) και ($x-t$).

Δ. Να βρεθεί η θέση του οχήματος τη χρονική στιγμή $t=45\text{s}$

Απάντηση

A. Το όχημα επιταχύνεται με a_1 από 0 έως t_1 δηλαδή για χρονικό διάστημα Δt_1 και αποκτάει μέγιστη ταχύτητα v_m . Στη συνέχεια επιβραδύνεται με a_2 και αρχική ταχύτητα v_m από t_1 έως t_2 , δηλαδή για χρονικό διάστημα Δt_2 και σταματάει $v_t=0$, τη χρονική στιγμή t_2 .

Στην ομαλά επιταχυνόμενη: $v_m=a_1\Delta t_1$ (1) και $\Delta x_1=\frac{1}{2}a_1\Delta t_1^2$ (2)

Στην ομαλά επιβραδυνόμενη $v_t=v_m-a_2\Delta t_2$ (3) και $\Delta x_2=\frac{v_m^2}{2a_2}$ (4)

Από (1) και (3) με $v_t=0$ έχουμε: $0=a_1\Delta t_1-a_2\Delta t_2 \rightarrow 2\cdot\Delta t_1=8\cdot\Delta t_2 \rightarrow \Delta t_1=4\Delta t_2$

$\Delta t=\Delta t_1+\Delta t_2 \rightarrow 50\text{s}=5\Delta t_2 \rightarrow \Delta t_2=10\text{s}$ και άρα $\Delta t_1=40\text{s}$.

Άρα $v_m=a_1\Delta t_1 \rightarrow v_m=80\text{m/s}$

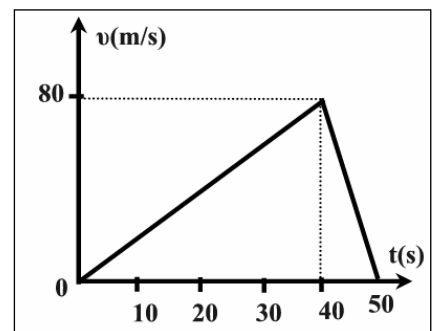
B. Από (2): $\Delta x_1=\frac{1}{2}a_1\Delta t_1^2 \rightarrow \Delta x_1=1600\text{m}$

Από (4): $\Delta x_2=\frac{v_m^2}{2a_2} \rightarrow \Delta x_2=400\text{m}$

Άρα $\Delta x=\Delta x_1+\Delta x_2 \rightarrow \Delta x=2000\text{m}$.

Γ. Τα διαγράμματα ($v-t$) και ($x-t$) φαίνονται στο σχήμα.

Τη χρονική στιγμή $t_1=10\text{s}$ η θέση του οχήματος είναι $x_1=\Delta x_1=1600\text{m}$ και τη χρονική στιγμή $t_2=50\text{s}$ είναι $x_2=x_1+\Delta x_2=2000\text{m}$

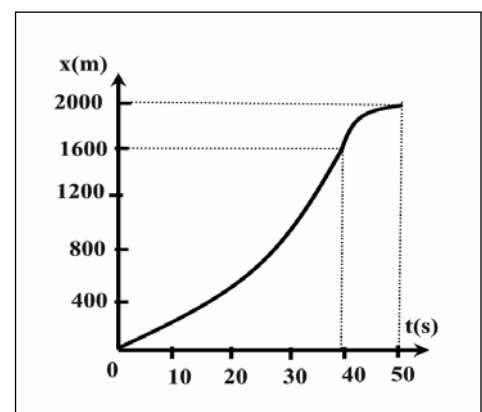


Δ. Στα 45s το όχημα επιβραδύνεται για $\Delta t_3=5\text{s}$ με αρχική ταχύτητα τη μέγιστη $v_m=80\text{m/s}$. Συνεπώς η μετατόπιση θα είναι

$\Delta x_3=v_m\Delta t_3-\frac{1}{2}a_2\Delta t_3^2 \rightarrow \Delta x_3=300\text{m}$.

Οπότε η θέση του οχήματος είναι

$x_3=x_1+\Delta x_3=1600\text{m}+300\text{m} \rightarrow x_3=1900\text{m}$



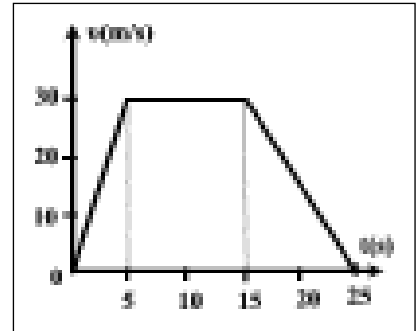
Δ.1.3 Ταξί βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t_0=0$ στη θέση $x_0=0$ και η ταχύτητά του μεταβάλλεται με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα. Να βρείτε:

A. Τις επιταχύνσεις σε κάθε φάση της κίνησης.

B. Τις θέσεις του ταξί τις χρονικές στιγμές, 5s, 15s και 25s.

Γ. Τη μέση ταχύτητα στο χρονικό διάστημα 0 έως 20s.

Δ. Να γίνουν τα διαγράμματα, $(a-t)$ και $(x-t)$ στο χρονικό διάστημα από 0 έως 25s.

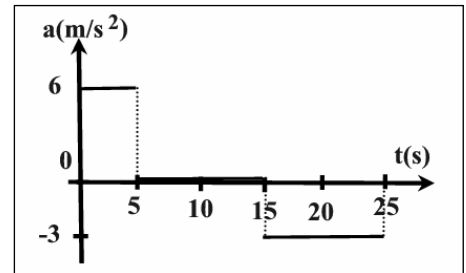


Απάντηση

A. Από 0–5s: $a_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} = \frac{30\text{m/s}}{5\text{s}} \rightarrow a_1 = 6\text{m/s}^2$

Από 5s–15s: $a_2 = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} = \frac{0\text{m/s}}{10\text{s}} \rightarrow a_2 = 0$

Από 15s–25s $a_3 = \frac{\Delta v_3}{\Delta t_3} = \frac{-30\text{m/s}}{10\text{s}} \rightarrow a_3 = -3\text{m/s}^2$



B. Οι μετατοπίσεις του κινητού στα αντίστοιχα χρονικά διαστήματα υπολογίζονται ως εμβαδά από τη γραφική παράσταση $(v-t)$

$$\Delta x_1 = \frac{30\text{m/s} \cdot 5\text{s}}{2} = 75\text{m}$$

$$\Delta x_2 = 30\text{m/s} \cdot 10\text{s} = 300\text{m}$$

$$\Delta x_3 = \frac{30\text{m/s} \cdot 10\text{s}}{2} = 150\text{m}$$

Άρα οι θέσεις είναι: Τη χρονική στιγμή $t_1=5\text{s}$: $x_1 = \Delta x_1 = 75\text{m}$

Τη χρονική στιγμή $t_2=15\text{s}$: $x_2 = x_1 + \Delta x_2 = 375\text{m}$

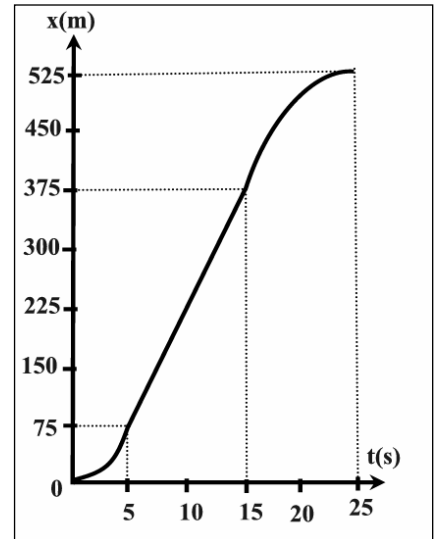
Τη χρονική στιγμή $t_3=25\text{s}$: $x_3 = x_2 + \Delta x_3 = 525\text{m}$

Γ. Το συνολικό διάστημα που διανύει είναι

$S_{\text{ολ}} = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| = 525\text{m}$ σε χρονικό διάστημα $\Delta t_{\text{ολ}} = 25\text{s}$.

Η μέση αριθμητική ταχύτητα θα είναι:

$$v_{\mu} = \frac{S_{\text{ολ}}}{t_{\text{ολ}}} = \frac{525\text{m}}{25\text{s}} \rightarrow v_{\mu} = 21\text{m/s}$$



Δ. Οι γραφικές παραστάσεις $(a-t)$ και $(x-t)$ φαίνονται στα σχήματα. Να σημειώσω ότι: Στο $(a-t)$ οι επιταχύνσεις σε κάθε μια από τις τρεις φάσεις είναι σταθερές, συνεπώς οι γραμμές είναι ευθείες παράλληλες στον άξονα των t . Στο $(x-t)$ όμως από 0–5s η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη και η γραμμή είναι παραβολή με τα κοίλα προς τα πάνω δηλαδή αυξανόμενη κλίση. Από 5s–15s η κίνηση είναι ομαλή, συνεπώς η γραμμή είναι ευθεία μέχρι τα 375m που αρχίζει η επιβραδυνόμενη. Μετά από 15s–25s η κίνηση είναι ομαλά επιβραδυνόμενη οπότε η γραμμή είναι παραβολή με τα κοίλα προς τα κάτω δηλαδή με κλίση που μειώνεται μέχρι που μηδενίζεται αφού η τελική ταχύτητα είναι μηδέν.

► **Δ.1.4** Δρομέας προπονείται σε ευθύγραμμο δρόμο ακολουθώντας το εξής πρόγραμμα. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ ξεκινά από τη ηρεμία από σημείο Ο ($x_0=0$) και επιταχύνει σταθερά με $a_1=0,2\text{m/s}^2$ έως ότου να φτάσει στο σημείο Α στο οποίο έχει αποκτήσει ταχύτητα 10m/s . Στη συνέχεια κινείται με σταθερή ταχύτητα μέχρι το σημείο Β και μετά επιβραδύνεται με σταθερή επιβράδυνση μέτρου $a_2=1\text{m/s}^2$ και σταματάει στο σημείο Γ. Η συνολική διαδρομή που κάνει είναι $ΟΓ=1000\text{m}$.

Α. Να βρεθούν οι μετατοπίσεις από το σημείο Ο στο Α, από το Α στο Β και από το Β στο Γ.

Β. Να βρεθεί ο συνολικός χρόνος κίνησης.

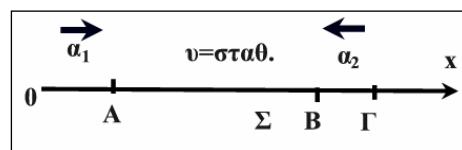
Γ. Να βρεθεί η μέση αριθμητική ταχύτητα

Δ. Να βρεθεί η θέση του δρομέα τη χρονική στιγμή $t=100\text{s}$

Απάντηση

Α. Στο Α έχει ταχύτητα $v_1=10\text{m/s}$ και έχει τρέξει με $a_1=0,2\text{m/s}^2$. Άρα $v_1=a_1\Delta t_1 \rightarrow \Delta t_1=50\text{s}$

Η μετατόπιση ΟΑ είναι: $(ΟΑ)=\Delta x_1 = \frac{1}{2}a_1\Delta t_1^2 \rightarrow \Delta x_1=250\text{m}$



Στη διαδρομή ΒΓ ξεκινάει με ταχύτητα v_1 , επιβραδύνεται με $a_2=1\text{m/s}^2$ και σταματάει ($v_f=0$) μετά από χρόνο Δt_3 . Άρα

$$v_f=v_1-a_2\Delta t_3 \rightarrow 0=v_1-a_2\Delta t_3 \rightarrow \Delta t_3=\frac{v_1}{a_2} \rightarrow \Delta t_3=10\text{s}$$

Η μετατόπιση ΒΓ είναι: $(ΒΓ)=\Delta x_3=v_1\Delta t_3 - \frac{1}{2}a_2\Delta t_3^2 \rightarrow \Delta x_3=50\text{m}$

Υπολογίζω τη μετατόπιση $AB=\Delta x_2$ από τη συνολική που μου δίνεται:

Συνεπώς: $(ΟΓ)=(ΟΑ)+(ΑΒ)+(ΒΓ) \rightarrow (ΑΒ)=1000-250\text{m}-50\text{m} \rightarrow (ΑΒ)=\Delta x_2=700\text{m}$

$$\Delta x_2=v_1\Delta t_2 \rightarrow \Delta t_2=\frac{700\text{m}}{10\text{m/s}} \rightarrow \Delta t_2=70\text{s}$$

Β. Άρα: $\Delta t_{ολ}=\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3=50\text{s}+70\text{s}+10\text{s} \rightarrow \Delta t_{ολ}=130\text{s}$

Γ. Η μέση αριθμητική ταχύτητα είναι: $v_{\mu}=\frac{ΟΓ}{\Delta t_{ολ}}=\frac{1000\text{m}}{130\text{s}} \rightarrow v_{\mu}=7,692\text{m/s}$

Δ. Στα 100s βρίσκεται στη φάση της ομαλής κίνησης επί 50s διότι τα πρώτα 50s έκανε επιταχυνόμενη και έχει ήδη διανύσει τα $\Delta x_1=250\text{m}$. Στα επιπλέον 50s της ομαλής διανύει με σταθερή ταχύτητα $v_1=10\text{m/s}$ απόσταση $(ΑΣ)=v_1\Delta t=10\text{m/s}\cdot 50\text{s}=500\text{m}$

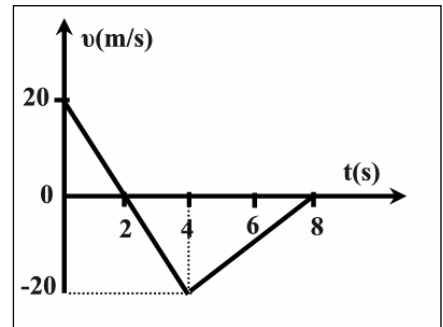
Άρα θα βρίσκεται στη θέση $x_2=\Delta x_1+(ΑΣ)=250\text{m}+500\text{m}=750\text{m} \rightarrow x_2=750\text{m}$.

Δ.1.5 Σωματίδιο κινείται ευθύγραμμα σε άξονα $x'Ox$. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ βρίσκεται στη θέση $x_0=40m$ και η ταχύτητά του μεταβάλλεται με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα.

A. Να υπολογιστούν οι θέσεις του σωματιδίου τις χρονικές στιγμές $t_1=2s$, $t_2=4s$ και $t_3=8s$

B. Να υπολογιστεί το συνολικό διάστημα που διένυσε στο χρονικό διάστημα $(0,8s)$

Γ. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις $a=f(t)$ και $x=f(t)$ στο χρονικό διάστημα $[0,8s]$



Απάντηση

A. Από 0 έως 2s το υλικό σημείο μετατοπίζεται κατά $\Delta x_{(0-2)} = \frac{20m/s \cdot 2s}{2} \rightarrow \Delta x_{(0-2)} = 20m$

Συνεπώς θα βρίσκεται στη θέση: $x_2 = x_0 + \Delta x_{(0-2)} \rightarrow x_2 = 40m + 20m = 60m \rightarrow x_2 = 60m$

Από 0 έως 4s το υλικό σημείο μετατοπίζεται κατά

$$\Delta x_{(0-4)} = \Delta x_{(0-2)} + \Delta x_{(2-4)} = \frac{20m/s \cdot 2s}{2} + \frac{-20m/s \cdot 2s}{2} = 20m + (-20m) \rightarrow \Delta x_{(0-4)} = 0.$$

Συνεπώς θα βρίσκεται στη θέση: $x_4 = x_0 + \Delta x_{(0-4)} \rightarrow x_4 = 40m + 0 \rightarrow x_4 = 40m$

Από 0 έως 8s μετατοπίζεται κατά

$$\Delta x_{(0-8)} = \Delta x_{(0-4)} + \Delta x_{(4-8)} = 0 + \frac{-20m/s \cdot 4s}{2} \rightarrow \Delta x_{(0-8)} = -40m$$

Συνεπώς θα βρίσκεται στη θέση: $x_8 = x_0 + \Delta x_{(0-8)} \rightarrow x_8 = 40m + (-40m) \rightarrow x_8 = 0.$

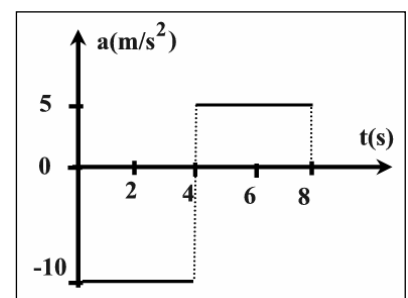
B. Το συνολικό διάστημα θα είναι:

$$S = |\Delta x_{(0-2)}| + |\Delta x_{(2-4)}| + |\Delta x_{(4-8)}| = 20m + 20m + 40m \rightarrow S = 80m$$

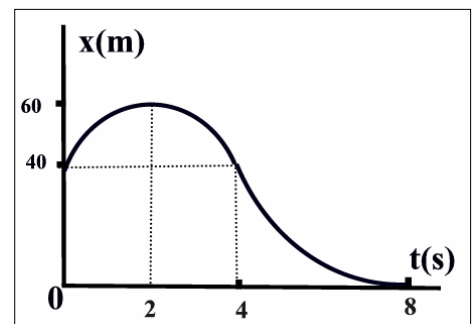
Γ. Από 0 έως 4s ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι σταθερός:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-20m/s - 20m/s}{4s} \rightarrow \alpha_1 = -10m/s^2$$

Από 4s έως 8s είναι $\alpha_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0m/s - (-20m/s)}{4s} \rightarrow \alpha_2 = 5m/s^2$



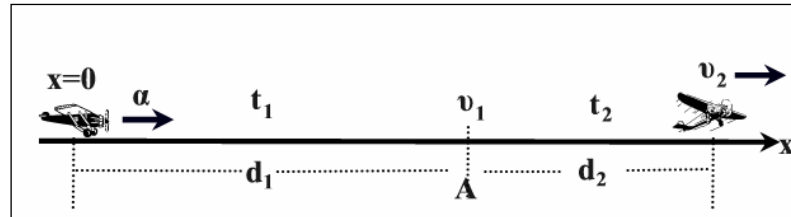
Από 0 έως 4s η κίνηση γίνεται με αρνητική επιτάχυνση και η παραβολή έχει το κοίλο μέρος προς τα κάτω και στα 2s έχει τη μέγιστη απομάκρυνση από τη θέση $x=0$. Από 4s έως 8s η κίνηση γίνεται με θετική επιτάχυνση και η παραβολή ($x-t$) έχει το κοίλο μέρος προς τα πάνω. Τη χρονική στιγμή $t=8s$ είναι και στη θέση $x=0$.



Δ.1.6 Αεροπλάνο ξεκινάει από την ηρεμία και κινείται στο διάδρομο απογείωσης ευθύγραμμα με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $a=8\text{m/s}^2$. Τα δύο τελευταία δευτερόλεπτα της απογείωσης διανύει διάστημα 64m. Να βρείτε

- A.** πόσο χρόνο χρειάστηκε για να απογειωθεί
- B.** πόσο διάστημα διένυσε μέχρι να απογειωθεί;
- Γ.** την τελική ταχύτητα απογείωσης;
- Δ.** τη μέση αριθμητική ταχύτητα σε όλη τη διάρκεια της απογείωσης

Απάντηση



A. Το αεροπλάνο επιταχύνεται για χρονικό διάστημα t_1 διανύοντας απόσταση d_1 και αποκτάει ταχύτητα v_1 (σημείο A). Στη συνέχεια επιταχύνεται ακόμα για τα τελευταία $d_2=64\text{m}$ που διαρκούν χρόνο $t_2=2\text{s}$ και απογειώνεται με ταχύτητα v_2 .

Για το διάστημα d_2 ισχύει: $d_2=v_1t_2+\frac{1}{2}at_2^2\rightarrow 64=2v_1+\frac{1}{2}(8)\cdot 2^2\rightarrow v_1=24\text{m/s}$

Για την ταχύτητα v_1 που είναι τελική του διαστήματος d_1 ισχύει:

$$v_1=at_1\rightarrow t_1=\frac{v_1}{a}\rightarrow t_1=\frac{24\text{m/s}}{8\text{m/s}^2}\rightarrow t_1=3\text{s}$$

Άρα ο συνολικός χρόνος απογείωσης είναι $t=t_1+t_2=3\text{s}+2\text{s}\rightarrow \mathbf{t=5\text{s}}$

B. Για το διάστημα d_1 ισχύει: $d_1=\frac{1}{2}at_1^2\rightarrow d_1=(4\text{m/s}^2)\cdot 3^2\text{s}^2\rightarrow d_1=36\text{m}$

Άρα το συνολικό διάστημα θα είναι:

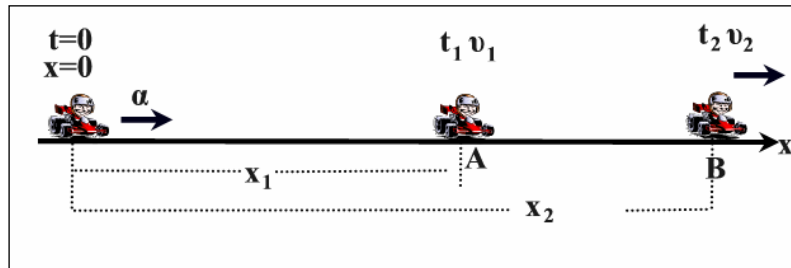
$$d=d_1+d_2=36\text{m}+64\text{m}\rightarrow \mathbf{d=100\text{m}}$$

Γ. Για την τελική ταχύτητα; $v_2=at=8\text{m/s}^2\cdot 5\text{s}\rightarrow \mathbf{v_2=40\text{m/s}}$

Δ. Το συνολικό διάστημα είναι $d=100\text{m}$ και η αντίστοιχη χρονική διάρκεια $\Delta t=5\text{s}$. Άρα

$$v_\mu=\frac{d}{\Delta t}\rightarrow \mathbf{v_\mu=20\text{m/s}}$$

► **Δ.1.7** Πειραματικό μονοθέσιο αυτοκίνητο που κινείται ευθύγραμμα με επιτάχυνση $a=20\text{m/s}^2$ έχει τη χρονική στιγμή $t_0=0$ ταχύτητα $v_0=50\text{m/s}$ στη θέση $x_0=0$.
A. Βρείτε στη διάρκεια ποιου δευτερολέπτου το μονοθέσιο μετατοπίζεται κατά 100m.
B. Βρείτε τη συνολική μετατόπιση στο τέλος του ζητούμενου δευτερολέπτου.
Γ. Αν μετά τα 100m κατεβάσει ακαριαία την επιτάχυνση στα 10m/s , ποια θα είναι η θέση του τη χρονική στιγμή $t_3=20\text{s}$



Απάντηση

Τη χρονική στιγμή t_1 έχει ταχύτητα v_1 και βρίσκεται στη θέση x_1 , ενώ τη χρονική στιγμή t_2 έχει ταχύτητα v_2 και βρίσκεται στη θέση x_2 . Σύμφωνα με τα δεδομένα οι δύο αυτές χρονικές στιγμές διαφέρουν κατά $\Delta t=1\text{s}$ και οι αντίστοιχες θέσεις κατά $\Delta x=100\text{m}$.

$$x_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 \quad (1) \quad x_2 = v_0 t_2 + \frac{1}{2} a t_2^2 \quad (2) \quad \text{και}$$

$$t_2 - t_1 = 1\text{s} \quad (3) \quad \text{και} \quad \Delta x = x_2 - x_1 = 100\text{m} \quad (4)$$

$$\text{Από (4)(2)(1)} \rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 \rightarrow \Delta x = v_0 t_2 + \frac{1}{2} a t_2^2 - v_0 t_1 - \frac{1}{2} a t_1^2 \rightarrow \Delta x = v_0 (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a (t_2^2 - t_1^2) \rightarrow$$

$$\Delta x = v_0 (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a (t_2 - t_1)(t_2 + t_1) \rightarrow 100\text{m} = 50\text{m/s} \cdot 1\text{s} + 10\text{m/s}^2 \cdot 1\text{s}(t_2 + t_1) \rightarrow t_2 + t_1 = 5\text{s}$$

$$\text{Από} \quad t_2 - t_1 = 1\text{s}$$

$$t_2 + t_1 = 5\text{s} \quad \text{έχουμε} \quad 2t_2 = 6\text{s} \rightarrow t_2 = 3\text{s} \quad \text{και} \quad t_1 = 2\text{s}$$

Αφού λοιπόν τα 100m διανύονται από $t_1=2\text{s}$ έως $t_2=3\text{s}$ πρόκειται για το **3^ο sec**

B. Ζητάμε τη θέση του οχήματος τη χρονική στιγμή $t_2=3\text{s}$

$$\text{Άρα} \quad x_2 = v_0 t_2 + \frac{1}{2} a t_2^2 \rightarrow x_2 = 240\text{m}$$

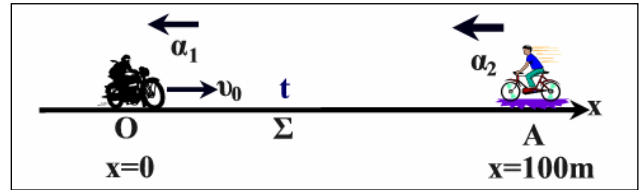
Γ. Τη χρονική στιγμή $t_2=3\text{s}$ έχει ταχύτητα $v=v_0 + a t_2 \rightarrow v_2 = 110\text{m/s}$

Αμέσως μετά κινείται με επιτάχυνση $a_2=10\text{m/s}^2$ για $\Delta t=t_3-t_2=17\text{s}$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_3=20\text{s}$. Στο χρονικό αυτό διάστημα διανύει απόσταση d

$$d = v_2 \cdot \Delta t + \frac{a_2 \Delta t^2}{2} \rightarrow d = 3.315\text{m}$$

Άρα η τελική του θέση θα είναι $x_{\text{τελ}} = x_2 + d = 240\text{m} + 3.315\text{m} \rightarrow x_{\text{τελ}} = 3555\text{m}$

► **Δ.1.8** Μηχανή και ποδήλατο κινούνται ευθύγραμμα πάνω σε άξονα $x'Ox$ ως εξής. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$, η μηχανή περνά από το O ($x_0=0$) με ταχύτητα $v_0=10\text{m/s}$ και επιβραδύνεται με σταθερή επιβράδυνση μέτρου $a_1=1\text{m/s}^2$. Την ίδια στιγμή ($t_0=0$) από σημείο A με $x_A=100\text{m}$



ξεκινάει χωρίς αρχική ταχύτητα το ποδήλατο με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $a_2=5\text{m/s}^2$ και με κατεύθυνση προς το O .

A. Να βρεθεί η χρονική στιγμή που τα δύο οχήματα θα συναντηθούν;

B. Να βρεθεί η θέση $x=(O\Sigma)$ του σημείου συνάντησης των δύο οχημάτων.

Γ. Να γίνει κοινό διάγραμμα ($x-t$) για τα δύο κινητά μέχρι τη χρονική στιγμή της συνάντησης.

Δ. Να βρεθεί η μεταξύ τους απόσταση τη χρονική στιγμή που η μηχανή θα σταματήσει.

Απάντηση

A. Έστω ότι συνάντηση γίνεται στο σημείο Σ τη χρονική στιγμή, t , αφού η μηχανή έχει διανύσει απόσταση $(O\Sigma)=x$ και το ποδήλατο $(A\Sigma)=x_A-x$. Προφανώς

$$\text{Η μηχανή κάνει ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση και } (O\Sigma)=x=v_0t - \frac{1}{2}a_1t^2 \quad (1)$$

$$\text{Το ποδήλατο κάνει ομαλά επιταχυνόμενη } (A\Sigma)=x_A-x = \frac{1}{2}a_2t^2 \rightarrow x=x_A - \frac{1}{2}a_2t^2 \quad (2)$$

Από (1) και (2)→

$$v_0t - \frac{1}{2}a_1t^2 = x_A - \frac{1}{2}a_2t^2 \rightarrow 10t - 0,5t^2 = 100 - 2,5t^2 \rightarrow 2t^2 + 10t - 100 = 0 \rightarrow t^2 + 5t - 50 = 0$$

Λύνουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση που έχει διακρίνουσα $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-50) = 225$

$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{-5 \pm 15}{2} \rightarrow t = 5\text{s}.$$

B. Η θέση του σημείου συνάντησης Σ σε σχέση με την αρχή του άξονα $x=0$ θα υπολογιστεί από την εξίσωση κίνησης της μηχανής:

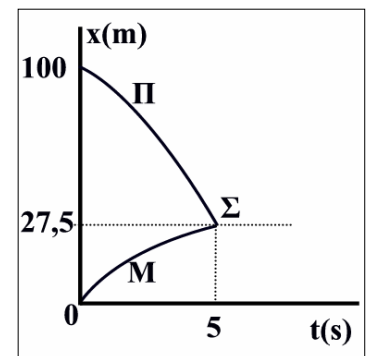
$$x_\Sigma = x = v_0t - \frac{1}{2}a_1t^2 \rightarrow x_\Sigma = 50\text{m} - 12,5\text{m} \rightarrow x_\Sigma = 27,5\text{m}$$

Γ. Οι εξισώσεις κίνησης των κινητών είναι:

$$\text{Της μηχανής: } x = 10t - 0,5t^2$$

$$\text{Του ποδηλάτου: } x = 100 - 2,5t^2$$

Οι γραφικές παραστάσεις μέχρι τη στιγμή $t=5\text{s}$ φαίνονται στο σχήμα.



Δ. Η μηχανή σταμάταει τη χρονική στιγμή $t_{\text{stop}} = \frac{v_0}{a_1} = 10\text{s}$ και η θέση της θα είναι $x_{\text{stop}} = \frac{v_0^2}{2a_1} = 50\text{m}$.

δηλαδή 50m δεξιά από το O .

Στα 10s το ποδήλατο θα βρίσκεται στη θέση $x_2 = 100 - 2,5t^2\text{m} = -150\text{m}$ δηλαδή 150m αριστερά από το O . Άρα θα απέχουν μεταξύ τους 200m.

► **Δ.1.9** Δύο μηχανές κινούνται κατά μήκος του άξονα $x'Ox$. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ η μηχανή M_1 περνά από το O ($x_0=0$) με ταχύτητα $v_0=17\text{m/s}$ και επιβραδύνεται με σταθερό ρυθμό μέτρου a_1 . Τη χρονική στιγμή $t_1=2\text{s}$, άλλη μηχανή M_2 , ξεκινάει από το O χωρίς αρχική ταχύτητα και επιταχύνει με επιτάχυνση μέτρου $a_2=4\text{m/s}^2$. Και τα δυο οχήματα κινούνται προς τη θετική κατεύθυνση και παρατηρούμε ότι περνούν ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο A το οποίο βρίσκεται στη θέση $x_A=72\text{m}$.

A. Ποια χρονική στιγμή περνούν και οι δυο από το A ;
B. Πόση πρέπει να είναι η επιβράδυνση a_2 ώστε οι δύο μηχανές να συναντηθούν στη θέση A ;
Γ. Ποιες θα είναι οι ταχύτητες των δύο μηχανών στο σημείο συνάντησης;
Δ. Να γίνει κοινό διάγραμμα ($x-t$) για τα δύο κινητά μέχρι τη χρονική στιγμή της συνάντησης.

Απάντηση

A. Για τη μηχανή M_1 ισχύουν:

$$v_1 = v_0 - a_1 t \quad (1) \quad x_1 = v_0 t - \frac{1}{2} a_1 t^2 \quad (2)$$

Η μηχανή M_2 ξεκινάει 2s μετά τη διέλευση της M_1 από το O . Άρα κινείται κάθε χρονική στιγμή t έχει κινηθεί κατά $(t-2)$ Άρα ισχύουν:

$$v_2 = a_2(t-2) \quad (3) \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{1}{2} a_2(t-2)^2 \quad (4)$$

$$\text{Αλλά } x_1 = x_2 = x_A = 72\text{m} \quad (5)$$

$$\text{Από (4)(5)} \rightarrow 72 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (t-2)^2 \rightarrow (t-2)^2 = 36 \rightarrow t-2=6 \rightarrow \mathbf{t=8\text{s}}$$

Η συνάντηση γίνεται τη χρονική στιγμή $\mathbf{t=8\text{s}}$

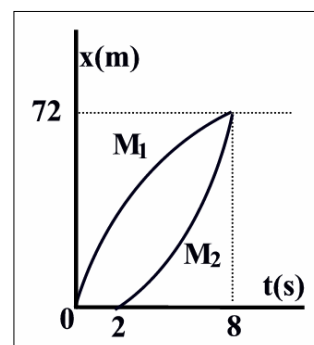
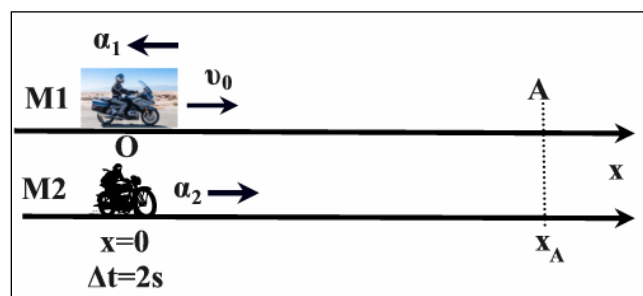
$$\mathbf{B.} \quad \text{Από (2)(5)} \rightarrow 72 = 17 \cdot 8 - \frac{1}{2} a_1 \cdot 8^2 \rightarrow \mathbf{a_1 = 2\text{m/s}^2}.$$

$$\mathbf{Γ.} \quad \text{Από (1)} \rightarrow v_1 = 17\text{m/s} - 2\text{m/s}^2 \cdot 8\text{s} \rightarrow \mathbf{v_1 = 1\text{m/s}}$$

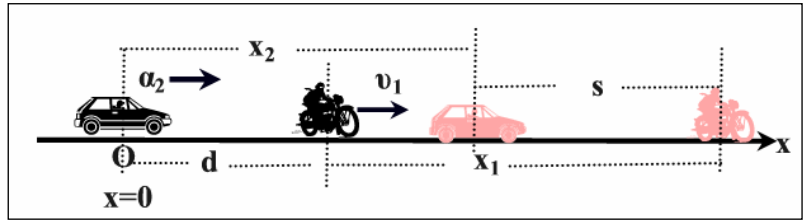
$$\text{Από (3)} \rightarrow v_2 = 4\text{m/s} \cdot (8-2)\text{s} \rightarrow \mathbf{v_2 = 24\text{m/s}^2}$$

Δ. Η μηχανή M_1 κάνει ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση όπου για $t=0$ είναι και $x_1=0$, ενώ η M_2 κάνει ομαλά επιταχυνόμενη όπου για $t=2\text{s}$ είναι $x_2=0$. Οι καμπύλες τέμνονται στη θέση $x=72\text{m}$ τη χρονική στιγμή $t=8\text{s}$.

Σημ. Όταν κάποιο κινητό K_2 ξεκινάει αργότερα από άλλο κινητό K_1 κατά μια χρονική καθυστέρηση Δt , αυτό σημαίνει ότι αν το K_1 κινείται για χρονική διάρκεια t το K_2 κινείται για χρονική διάρκεια $(t-\Delta t)$, γιατί είναι λιγότερο χρόνο στο δρόμο αφού έφυγε αργότερα.



► **Δ.1.10** Μηχανή κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο με σταθερή ταχύτητα $v_1=10\text{m/s}$. Κάποια στιγμή ένα αυτοκίνητο ξεκινάει από την ηρεμία από σημείο που βρίσκεται πίσω της (Ο) σε απόσταση $d=39\text{m}$ και κινείται με σταθερή επιτάχυνση $a_2=2\text{m/s}^2$, προς την ίδια κατεύθυνση.



A. Επί πόσο χρόνο πρέπει να κινούνται και τα δύο οχήματα ώστε η μηχανή να απομακρύνεται από το αυτοκίνητο;

B. Πόση είναι η μέγιστη απόσταση που θα έχουν τα δύο οχήματα.

Γ. Πόσος χρόνος χρειάζεται από τη στιγμή που ξεκινάει το αυτοκίνητο για να συναντηθούν τα δυο οχήματα;

Απάντηση

A. Θεωρούμε ως αρχή του άξονα κίνησης το σημείο Ο ($x=0$) και ως αρχή των χρόνων ($t_0=0$), τη θέση και τη χρονική στιγμή που ξεκινάει το αυτοκίνητο. Για να απομακρύνεται η μηχανή πρέπει να έχει ταχύτητα μεγαλύτερη από αυτή του αυτοκινήτου. Άρα

$$v_1 > v_2 \rightarrow v_1 > a_2 t \rightarrow t < \frac{v_1}{a_2} \rightarrow t < 5\text{s}$$

B. Η απόσταση των δύο οχημάτων θα γίνει μέγιστη τη χρονική στιγμή $t=5\text{s}$ στην οποία θα εξισωθούν οι ταχύτητές τους. Γιατί αμέσως η ταχύτητα του επιταχυνόμενου αυτοκινήτου v_2 θα γίνει μεγαλύτερη από τη σταθερή ταχύτητα της μηχανής v_1 και το αυτοκίνητο θα πλησιάζει τη μηχανή. Από τη διάταξη των δύο οχημάτων έστω ότι τη χρονική στιγμή $t=5\text{s}$ τα οχήματα απέχουν απόσταση s που είναι και η ζητούμενη μέγιστη. Τη χρονική αυτή στιγμή το αυτοκίνητο έχει διανύσει απόσταση x_1 και η μηχανή x_2 .

Από το σχήμα φαίνεται ότι: $d+x_1=x_2+s$ (1) με

$$x_1 = v_1 t = 10t \quad (2) \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{1}{2} a_2 t^2 = t^2 \quad (3)$$

Από (1)(2)(3) και για $t=5\text{s}$ έχουμε:

$$d+x_1=x_2+s \rightarrow s=d+x_1-x_2 \rightarrow s=39+10t-t^2 \rightarrow s=(39+50-25)\text{m} \rightarrow s=64\text{m}.$$

Γ. Για να συναντηθούν πρέπει η απόσταση s να μηδενιστεί δηλαδή $s=0$.

$$\text{Από (1)} \rightarrow d+x_1=x_2 \rightarrow d+v_1 t = \frac{1}{2} a_2 t^2 \rightarrow t^2 - 10t - 39 = 0.$$

Από την επίλυση της δευτοβάθμιας με διακρίνουσα $\Delta=256$ και $\sqrt{256}=16$ προκύπτει

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{10 \pm 16}{2} \rightarrow t=13\text{s}$$

Άρα η συνάντηση γίνεται μετά από **13s**.

► **Δ.1.11** Δύο οχήματα κινούνται στην ίδια ευθεία και προς την ίδια κατεύθυνση, με το C_1 να προπορεύεται με σταθερή ταχύτητα $v_1=36\text{km/h}$ και το C_2 να έπεται με σταθερή ταχύτητα $v_2=108\text{km/h}$. Τη στιγμή που η μεταξύ τους απόσταση είναι $d=100\text{m}$ ο οδηγός του οχήματος C_2 που καταλαβαίνει ότι θα πέσει πάνω στο προπορευόμενο φρενάρει για να αποφύγει τη σύγκρουση.

A. Να σχεδιαστούν τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιβράδυνσης του οχήματος C_2 τη στιγμή που αρχίζει η επιβράδυνση αυτού.

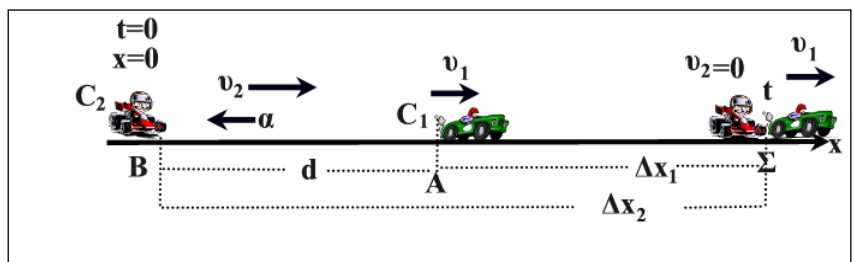
B. Πόση πρέπει να είναι η ελάχιστη επιβράδυνση του οχήματος C_2 ώστε να αποφύγει τη σύγκρουση;

Γ. Πόσα μέτρα θα διανύσει το όχημα C_2 επιβραδυνόμενο με την ελάχιστη δυνατή επιβράδυνση και για πόσο χρόνο;

Δ. Να γίνουν σε κοινό διάγραμμα οι γραφικές παραστάσεις θέσης – χρόνου των δύο κινητών.

Απάντηση

A. Το όχημα C_2 επιβραδύνεται και συνεπώς τα διανύσματα της ταχύτητας v_2 και της επιβράδυνσης a έχουν αντίθετες κατευθύνσεις όπως φαίνεται και στο σχήμα.



B. Οι αρχικές ταχύτητες των δύο οχημάτων σε m/s είναι:

$$v_1=36\text{km/h}=36000\text{m}/3600\text{s}\rightarrow v_1=10\text{m/s}$$

$$v_2=108\text{km/h}=108000\text{m}/3600\text{s}\rightarrow v_2=30\text{m/s}$$

Τη χρονική στιγμή $t=0$ τα οχήματα απέχουν απόσταση $d=100\text{m}$. Το C_1 συνεχίζει να κινείται με σταθερή ταχύτητα ενώ το C_2 επιβραδύνεται με a μέχρι εκείνη τη στιγμή που θα βρεθούν στο ίδιο σημείο, Σ . Για να μη συγκρουστούν θα πρέπει εκείνη τη στιγμή να έχουν και ίδιες ταχύτητες. Μέχρι το Σ τα οχήματα έχουν διανύσει διαστήματα Δx_1 και Δx_2 και θα έχουν ταχύτητες V_1 και V_2 στον ίδιο χρόνο t .

Για το C_1 ισχύει: $V_1=v_1=10\text{m/s}$ και $\Delta x_1=v_1 t$ (1)

Για το C_2 ισχύουν: $V_2=v_2-at$ και $\Delta x_2=v_2 t-\frac{1}{2}at^2$ (2)

Για να αποφύγουν τη σύγκρουση στην χειρότερη περίπτωση πρέπει να φτάσουν στο Σ με τις ίδιες ταχύτητες, άρα

$$V_1=V_2\rightarrow v_1=v_2-at\rightarrow at=v_2-v_1\rightarrow at=20\text{m/s} \quad (3)$$

Η θέση του C_1 είναι $x_1=d+\Delta x_1$ και η θέση του C_2 , $x_2=\Delta x_2$. Για να βρεθούν στην ίδια θέση πρέπει

$$x_1=x_2\rightarrow d+v_1 t=v_2 t-\frac{1}{2}at^2\rightarrow 100+10t=30t-\frac{1}{2}at^2\rightarrow \frac{1}{2}at^2-20t+100=0\rightarrow \frac{1}{2}at\cdot t-20t+100=0\rightarrow (3)\rightarrow$$

$$\frac{1}{2}20\cdot t-20t+100=0\rightarrow 10t=100\rightarrow t=10\text{s}$$

από (3) $\rightarrow at=20\text{m/s}\rightarrow a=2\text{m/s}^2$

Στα 10s οι ταχύτητες είναι $V_1=10\text{m/s}$ και $V_2=30\text{m/s}-2\cdot 10\text{m/s}\rightarrow V_2=10\text{m/s}$ και η θέση συνάντησης

$$x_\Sigma=d+v_1 t=100\text{m}+100\text{m}=200\text{m}\rightarrow x_\Sigma=200\text{m}$$

Γ. Το όχημα C_2 θα σταματήσει όταν $v_{τελ}=0$.

$$\text{Άρα } v_{\tau}=v_2-at_{\text{stop}} \rightarrow t_{\text{stop}}= \frac{v_2}{a} \rightarrow \mathbf{t_{\text{stop}}=15s}$$

$$\text{Στη θέση: } \Delta x_{\text{stop}}=x_{\text{stop}}= \frac{v_2^2}{2a} \rightarrow \mathbf{x_{\text{stop}}=225m}$$

Δ. Στο διάγραμμα το σημείο επαφής ευθείας με την παραβολή είναι η θέση $x_{\Sigma}=200m$ τη χρονική στιγμή $t=10s$

