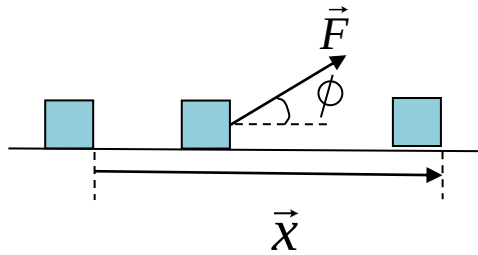


Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας



ΕΡΓΟ ΔΥΝΑΜΗΣ W_F



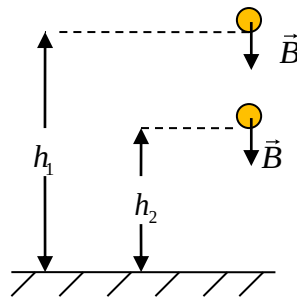
⇒ Έργο μίας δύναμης $\vec{F}$ που μετατοπίζει ένα σώμα κατά $\vec{x}$ ονομάζουμε το μέγεθος που δίνεται από τη σχέση

$$W_F = \vec{F} \cdot \vec{x} = F \cdot x \cdot \cos\phi, \text{ όπου } \phi \text{ η γωνία ανάμεσα στα } \vec{F} \text{ και } \vec{x}.$$

Αν η γωνία ϕ είναι μηδενική, τότε η παραπάνω σχέση γίνεται (επειδή $\cos 0^\circ = 1$):

$$W_F = F \cdot x$$

Το έργο μιας δύναμης εκφράζει, γενικά, μια **ποσότητα μεταβιβαζόμενης ενέργειας**.



⇒ Όταν η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι το **βάρος**, το έργο του βάρους ισούται με

$$W_B = B \cdot \Delta h = mg(h_1 - h_2), \text{ όπου } \Delta h = h_1 - h_2 \text{ η υψομετρική διαφορά μεταξύ της αρχικής και της τελικής θέσης του σώματος.}$$

Θετικό , Αρνητικό  και Μηδενικό  Έργο Δύναμης

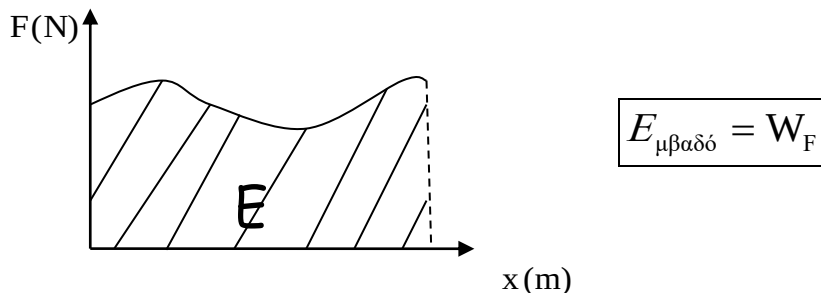
Το πρόσημο του έργου εξαρτάται από το πρόσημο του $\cos\phi$, άρα από τη γωνία ϕ ανάμεσα στη δύναμη $\vec{F}$ και τη μετατόπιση $\vec{x}$. Ισχύει (επειδή $\cos 90^\circ = 0$):

$$W = \begin{cases} > 0, \text{ όταν } \phi < 90^\circ & \text{(μεταβιβάζεται ενέργεια στο σώμα, το σώμα κερδίζει κινητική ενέργεια)} \\ = 0, \text{ όταν } \phi = 90^\circ & \text{(δεν μεταβιβάζεται ενέργεια από ή προς το σώμα. Ενέργεια=σταθερή)} \\ < 0, \text{ όταν } \phi > 90^\circ & \text{(μεταβιβάζεται ενέργεια από το σώμα, το σώμα χάνει κινητική ενέργεια)} \end{cases}$$

π.χ. στην παραπάνω σχέση $W_B = mg(h_1 - h_2)$, αν το σώμα κατεβαίνει κατακόρυφα ($h_1 > h_2$) τότε το έργο του βάρους είναι **θετικό** (αυξάνει την κινητική ενέργεια του σώματος). Αν το σώμα ανεβαίνει ($h_1 < h_2$), τότε το έργο του βάρους είναι **αρνητικό** (μειώνει την κινητική ενέργεια του σώματος). Τέλος, αν το σώμα κινείται οριζόντια (λ.χ. πάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο) ($h_1 = h_2$) τότε το έργο του βάρους είναι μηδενικό (το βάρος είναι κάθετο στη μετατόπιση).

Γραφικός τρόπος εύρεσης τού Έργου Δύναμης

Αν η δύναμη που ασκείται στο σώμα δεν είναι σταθερή, τότε δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $W_F = F \cdot x \cdot \cos\phi$, αφού κάθε στιγμή η F αλλάζει. Σε αυτή την περίπτωση, χρησιμοποιούμε το διάγραμμα της δύναμης F συναρτήσει της μετατόπισης x (διάγραμμα $F-x$). Το **εμβαδόν** που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα x **ισούται πάντα** με το **έργο** της δύναμης F .



Προσοχή!!: Στα διαγράμματα αυτά, στη θέση της F βάζουμε πάντα τη **συνιστώσα τής F η οποία παράγει το έργο**, π.χ. για κίνηση στο επίπεδο βάζουμε την $F_x = F \cos\phi$. Βεβαίως, αν $\phi = 0$, τότε $F_x = F$.

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ K



Κάθε σώμα μάζας m που κινείται με ταχύτητα u έχει **κινητική ενέργεια K** :

$$K = \frac{1}{2} m u^2$$

Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας

Όταν σ' ένα σώμα ασκούνται δυνάμεις με συνισταμένη $\Sigma \vec{F}$, τότε **η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του σώματος είναι ίση με το έργο της συνισταμένης δύναμης**, δηλαδή

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{\Sigma F} \Leftrightarrow \Delta K = W_{\Sigma F}$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να πούμε ότι η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του σώματος είναι ίση με το άθροισμα των έργων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα, δηλαδή

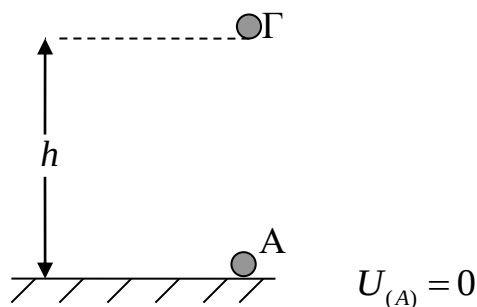
$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{F_1} + W_{F_2} + W_{F_3} + \dots = \Sigma W_F$$

π.χ. αν σε ένα σώμα ασκούνται δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, τότε η κινητική ενέργεια του σώματος θα έχει μεταβολή ίση με το έργο της συνισταμένης δύναμης ($\Sigma \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$). Ισοδύναμα, η μεταβολή στην κινητική ενέργεια θα είναι ίση με το έργο της $\vec{F}_1$ συν το έργο της $\vec{F}_2$.

Προσοχή: Τα έργα αυτά μπορεί να είναι είτε θετικά είτε **αρνητικά**.



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ U



⇒ **Δυναμική ενέργεια** U ενός σώματος το οποίο βρίσκεται σε ύψος h πάνω από την επιφάνεια της Γ ς ονομάζουμε την ενέργεια που έχει το σώμα λόγω της θέσης του.

Η ενέργεια που ξοδεύουμε για να φέρουμε ένα σώμα σε κάποιο ύψος είναι ίση με την αύξηση της δυναμικής του ενέργειας. Πράγματι, αν **δεχθούμε** ότι στο A το σώμα έχει δυναμική ενέργεια **μηδέν** τότε στο Γ θα έχει

$$U_{(\Gamma)} = mgh$$

Η τιμή της U εξαρτάται από το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας που αυθαίρετα παίρνουμε και είναι ανεξάρτητη από το αν το σώμα είναι ακίνητο ή κινείται στο συγκεκριμένο ύψος.

Το έργο του βάρους ισούται με τη διαφορά της αρχικής δυναμικής ενέργειας με την τελική δυναμική ενέργεια, δηλαδή

$$W_B = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\epsilon\lambda} \Leftrightarrow W_B = -\Delta U, \text{ όπου}$$

$\Delta U = \text{μεταβολή της } U = \text{τελική τιμή} - \text{αρχική τιμή της } U$

ΔΙΑΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

⇒ **Διατηρητική** (ή συντηρητική) ονομάζουμε μία δύναμη όταν το **έργο** της σε μια **κλειστή διαδρομή** είναι **μηδενικό**.

⇒ Επίσης, ισχύει ότι το έργο μιας διατηρητικής δύναμης είναι **ανεξάρτητο της διαδρομής** που ακολουθεί ένα σώμα όταν μια διατηρητική δύναμη το μετακινεί από ένα σημείο A σε κάποιο σημείο Γ . **Εξαρτάται μόνο από τα σημεία A και Γ** . Το βάρος και οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις αποτελούν παραδείγματα διατηρητικών δυνάμεων. Οι **διατηρητικές** δυνάμεις **διατηρούν τη μηχανική ενέργεια** του συστήματος στο οποίο ασκούνται.

⇒ **Μη διατηρητική** ονομάζουμε μια δύναμη όταν το έργο της σε μία κλειστή διαδρομή δεν είναι μηδενικό ή, διαφορετικά, όταν το έργο της εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθεί το σώμα.

Η **τριβή** είναι η κατ' εξοχήν μη διατηρητική δύναμη. Το έργο της τριβής είναι πάντα αρνητικό.

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

⇒ **Μηχανική ενέργεια** E ενός σώματος καλούμε το άθροισμα της κινητικής ενέργειας K και της δυναμικής ενέργειας U αυτού, δηλαδή

$$E = K + U$$

Θεώρημα Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας

Όταν σε ένα σώμα (ή σύστημα σωμάτων) ασκούνται **μόνο διατηρητικές** δυνάμεις, η **μηχανική ενέργεια** του σώματος **διατηρείται** ($E = \text{σταθερή}$ ή $K + U = \text{σταθερή}$).

⇒ Όταν στο σώμα ασκούνται και **μη διατηρητικές** δυνάμεις (π.χ. **τριβή**), τότε έχουμε **μεταβολή** της μηχανικής του ενέργειας. Η μεταβολή της E ισούται με το έργο της τριβής, που είναι αρνητικό, δηλαδή

$$\Delta E = E_{\text{τελ}} - E_{\text{αρχ}} = W_T < 0$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να γράψουμε ότι η αρχική μηχανική ενέργεια είναι ίση με την τελική μηχανική ενέργεια συν το ποσό ενέργειας Q που μετατρέπεται σε θερμότητα (λόγω τριβών, αντιστάσεων, παραμορφώσεων και λοιπών μη διατηρητικών δυνάμεων). Άρα:

$$E_{\text{αρχ}} = E_{\text{τελ}} + Q$$

ΙΣΧΥΣ



⇒ **Ισχύ** P ονομάζουμε το **ρυθμό μεταβολής τού έργου** που παράγεται (από μία δύναμη που ασκείται σε κάποιο σώμα). Αφού η ενέργεια ούτε χάνεται ούτε δημιουργείται, αλλά απλά αλλάζει μορφή, η ισχύς ισούται με το ρυθμό μεταβολής της ενέργειας από μία μορφή σε μια άλλη. Πιο απλά, η ισχύς είναι ίση με το πηλίκο τού έργου W προς τον αντίστοιχο χρόνο t . Δηλαδή

$$P = \frac{W}{t}$$

Αν η δύναμη F που ασκείται στο σώμα σχηματίζει μηδενική γωνία με τη μετατόπιση x , τότε, ως γνωστόν, ισχύει $W = F \cdot x$ και αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση έπεται ότι:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot x}{t}$$

Αν η ταχύτητα u του σώματος είναι σταθερή (ή αν λάβουμε **πολύ** μικρό χρονικό διάστημα υπόψη μας, ώστε σε αυτό να θεωρούμε τη u σχεδόν σταθερή), τότε ισχύει

$u = \frac{x}{t}$. Συνεπώς, αντικαθιστώντας στον τύπο της ισχύος, προκύπτει:

$$P = \frac{W}{t} = F \frac{x}{t} = F \cdot u \Rightarrow \boxed{P = F \cdot u}$$

Μονάδα ισχύος είναι στο Διεθνές Σύστημα μονάδων (S.I.) είναι το Watt. Ισχύει

$$1W = 1 \frac{\text{Joule}}{\text{s}}$$



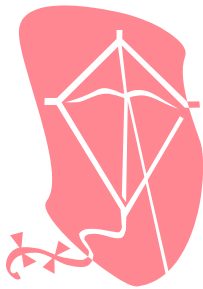
Πείραμα (Βοηθήστε το Σπιρτούλη)

Ο Σπιρτούλης είναι στην αίθουσα και κρατά κάποιο αντικείμενο σε κάποιο ύψος. Ο Σπιρτούλης διαθέτει μετροταινία και χρονόμετρο και θέλει:

- α) να μετρήσει την ταχύτητα $v_{\text{τελ}}$ με την οποία το σώμα φθάνει στο πάτωμα όταν το αφήνει από ύψος h .
- β) να επαληθεύσει το αποτέλεσμα που βρήκε.
- γ) να αποφασίσει ποια από τις δύο μεθόδους (έμμεσης) μέτρησης της ταχύτητας είναι πιο αξιόπιστη.
- δ) Όταν μετά τη μέτρηση διαπιστώνει ότι έχει και ζυγαριά, αποφασίζει να μετρήσει και το έργο του βάρους. $\left(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$

Βοηθήστε τον! Κάντε εσείς το πείραμα και στείλτε του με SMS τα αποτελέσματα για να μπειτε στην κλήρωση για το μεγάλο δώρο (ένα σπέσιαλ βαθμό στις τελικές εξετάσεις).

Πρόβλημα: Θα σπάσει ο χαρταετός;

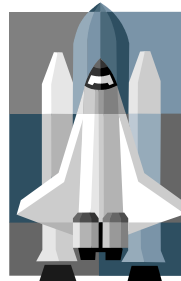


Ένας μαθητής του Λυκείου μας πετάει σε μια πεδιάδα το χαρταετό του. Κάποια στιγμή, ένα ρεύμα αέρα περνά και τεντώνει τελείως το σχοινί του χαρταετού. Ο μαθητής πλέον έχει αφήσει όλο το σχοινί μήκους 400m να ξετυλιχθεί, το οποίο σχηματίζει γωνία 30 μοιρών με την επιφάνεια της γης. Ξαφνικά, ο άνεμος σταματά τελείως και ο χαρταετός, μάζας $m = 2\text{Kg}$, αρχίζει να πέφτει κατακόρυφα. Αν λόγω τριβής με τον αέρα ο χαρταετός έχει απώλεια ενέργειας (δηλαδή έργο τριβής) ίση με 2400J, τότε:

- α) να υπολογίσετε την ταχύτητα $v_{\text{τελ}}$ με την οποία θα χτυπήσει στο έδαφος.
- β) αν ο χρόνος που διαρκεί η πρόσκρουση στο χώμα είναι 0,1s, να βρείτε τη δύναμη που ασκεί το έδαφος στο χαρταετό. Θεωρείτε πιθανό να γλιτώσει ο χαρταετός;

Άλλο (πολύ μεγαλύτερο) ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Πρέπει να βιαστούμε! Να βάλουμε τις τουρμπίνες



να δουλεύουν

στο φουλ, γιατί ο χρόνος



τελειώνει και αν δεν κοιπάσουμε

λιγάκι, καήκαμε

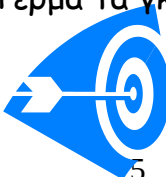


. Τέρμα τα γκάτζια



λοιπόν,

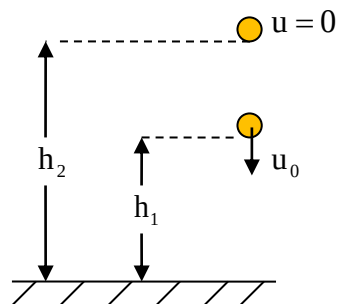
για να πετύχουμε το στόχο μας



Πρόβλημα γκρίνιας



Σήμερα είναι τα γενέθλια του Γκρινιάρη και περιμένει ανυπόμονα να δει το δώρο που του αγόρασαν οι φίλοι του. Γεμάτος χαρά ανοίγει το περιτύλιγμα, για να δει τελικά ότι το δώρο του είναι μια μπαλίτσα του μπίτζμπολ. Νευριασμένος, πετά με δύναμη την μπάλα, μάζας $m=200\text{g}$, προς τα κάτω, η οποία την ώρα που φεύγει από το χέρι του έχει ταχύτητα u_0 και απέχει απ' το έδαφος $h_1=1\text{ m}$. Η μπάλα αναπηδά στο έδαφος και φθάνει τελικά σε ύψος $h_2=3\text{ m}$ (πολλά νεύρα αυτός ο Γκρινιάρης!).



α) 1° σενάριο: Αν η ταχύτητα με την οποία η μπάλα ξεκινά την άνοδό της είναι ίση με την ταχύτητα πρόσκρουσης (οπότε η μηχανική ενέργεια διατηρείται), ποια είναι η αρχική ταχύτητα u_0 ; 😞

β) 2° σενάριο: Αν κατά την κρούση υπάρχει απώλεια 40% της κινητικής (άρα, στη συγκεκριμένη περίπτωση, και της μηχανικής) ενέργειας και η μπάλα φθάνει πάλι σε ύψος $h_2=3\text{ m}$, να βρείτε πόση ήταν η αρχική ταχύτητα u'_0 σε αυτή την περίπτωση.

Σημείωση: Όταν ψωνίζουμε ρούχα, έκπτωση 40% σημαίνει ότι η αρχική τιμή ήταν 40% μεγαλύτερη από την τελική, δηλαδή:

$\frac{\text{Αρχική Τιμή} - \text{Τελική Τιμή}}{\text{Αρχική Τιμή}} = 40\% = \frac{40}{100} = 0,4$
--

γ) Μήπως έχετε γενέθλια σήμερα;

