

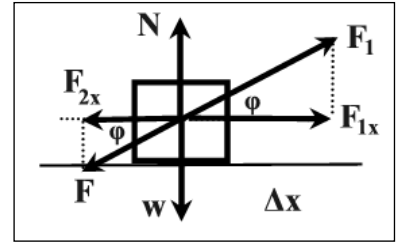
ΕΡΓΟ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Το σώμα μάζας m έχει τη χρονική στιγμή $t=0$, $v_0=0$ και επιταχύνεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο υπό την επίδραση δύο δυνάμεων $F_1=2F$ υπό γωνία $\varphi=60^\circ$ και της αντίθετης προς αυτήν $F_2=F$ κατά x . Η κινητική του ενέργεια στο τέλος της μετατόπισης x είναι:

α. $K=F \cdot x$

β. $K=\frac{Fx}{2}$

γ. $K=2F \cdot x$



Απάντηση

Αναλύω τις δυνάμεις F_1 και F_2 στους άξονες, (x) που είναι αυτός της κίνησης και (y) τον κάθετο προς αυτόν. Το σώμα δέχεται και τη δύναμη βάρους w και την κάθετη δύναμη στήριξης N . Όλες αυτές οι δυνάμεις w και N και οι συνιστώσες F_{1y} και F_{2y} που είναι πάνω στον άξονα y δεν κάνουν έργο ως κάθετες στη μετατόπιση. Συνεπώς έργο κάνουν μόνο οι επιτροχιές συνιστώσες, που βρίσκονται στον άξονα, x .

$$W_{F_1}=W_{F_{1x}}=F_{1x} \cdot x = F_1 \cdot \sin \varphi \cdot x \rightarrow W_{F_{1x}}=2F \cdot \frac{1}{2} x \rightarrow W_{F_1}=F \cdot x$$

$$W_{F_2}=W_{F_{2x}}= - F_{2x} \cdot x = -F_2 \cdot \sin \varphi \cdot x \rightarrow W_{F_{2x}}=-F \cdot \frac{1}{2} x \rightarrow W_{F_2}= - \frac{Fx}{2}$$

$$\text{Το συνολικό έργο είναι: } \Sigma W = W_{F_1} + W_{F_2} = F \cdot x + \left(-\frac{Fx}{2}\right) \rightarrow \Sigma W = \frac{Fx}{2}$$

$$\text{Από το ΘΜΚΕ: } \Sigma W = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \rightarrow \frac{Fx}{2} = K - 0 \rightarrow K = \frac{Fx}{2}$$

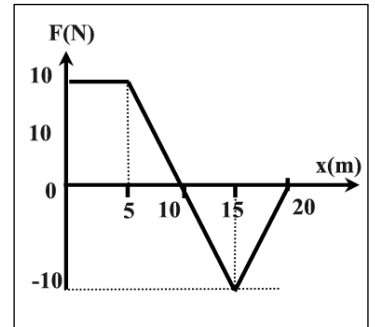
Σωστό το (β)

2. Σώμα έχει στη θέση $x_1=0$ κινητική ενέργεια $K_1=50\text{J}$ και τότε δέχεται μια συνισταμένη δύναμη F στην ίδια διεύθυνση με την ταχύτητά του της οποίας η αλγεβρική τιμή μεταβάλλεται σε σχέση με τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η κινητική του ενέργεια K_2 στη θέση $x_2=20\text{m}$ θα είναι:

α. $K_2=50\text{J}$

β. $K_2=0$

γ. $K_2=75\text{J}$



Απάντηση

Το έργο της δύναμης ισούται αλγεβρικά με το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της δύναμης και του άξονα των x . Υπολογίζω τα τέσσερα εμβαδά του σχήματος.

Από (0–5)m: $W_1=10\text{N}\cdot 5\text{m}=50\text{J}$

Από (5–10)m: $W_2=\frac{10\text{N}\cdot 5\text{m}}{2}=25\text{J}$

Από (10–15)m: $W_3=\frac{-10\text{N}\cdot 5\text{m}}{2}=-25\text{J}$

Από (15–20)m: $W_4=\frac{-10\text{N}\cdot 5\text{m}}{2}=-25\text{J}$

$$\Sigma W=W_1+W_2+W_3+W_4\rightarrow \Sigma W=50\text{J}+25\text{J}-25\text{J}-25\text{J}\rightarrow \Sigma W=25\text{J}$$

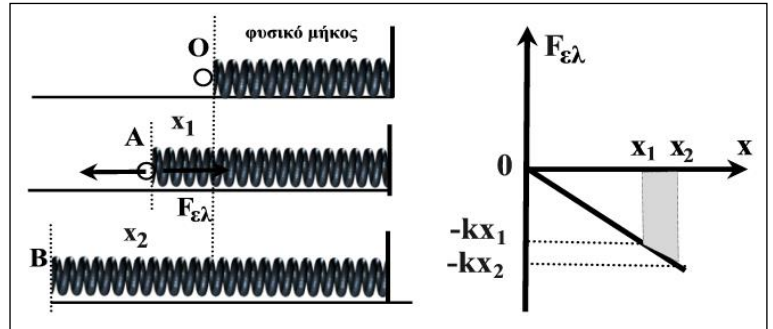
Από το ΘΜΚΕ: $\Sigma W=K_2-K_1\rightarrow K_2=\Sigma W+K_1=25\text{J}+50\text{J}\rightarrow \mathbf{K_2=75J}$ Σωστό το (γ)

3. Ελατήριο σταθεράς k είναι ήδη ανοιγμένο κατά x_1 σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Προκαλούμε στο ελατήριο πρόσθετη επιμήκυνση ώστε η συνολική του να γίνει x_2 , ($x_2 > x_1$). Το έργο της δύναμης του ελατηρίου $F_{ελ}$ ισούται με

α. $W_{ελ} = kx_1^2 - kx_2^2$

β. $W_{ελ} = \frac{1}{2} kx_2^2 - \frac{1}{2} kx_1^2$

γ. $W_{ελ} = \frac{1}{2} kx_1^2 - \frac{1}{2} kx_2^2$



Απάντηση

Η δύναμη του ελατηρίου στην προκειμένη περίπτωση εμποδίζει την επιμήκυνση αυτού συνεπώς είναι αντίθετη στην κίνηση του άκρου του ελατηρίου και θα είναι της μορφής $F_{ελ} = -kx$. Για να υπολογίσουμε το έργο της από το A ($x=x_1$) έως το B ($x=x_2$) κάνουμε τη σχετική γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα. Το έργο της $F_{ελ}$ από το A στο B θα ισούται με το εμβαδόν του τραπεζίου

$$W_{ελ} = \frac{-kx_2 - kx_1}{2} (x_2 - x_1) = -\frac{k}{2} (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) = -\frac{k}{2} (x_2^2 - x_1^2) \rightarrow W_{ελ} = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}$$

Σωστό είναι το (γ)

Σημ Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι $U = \frac{1}{2} kx^2$. Το έργο της συντηρητικής δύναμης $F_{ελ}$ ισούται με τη διαφορά των δυναμικών ενεργειών αυτού

$$W_{ελ} = U_{ελ, αρχ} - U_{ελ, τελ} = W_{ελ} = \frac{1}{2} kx_1^2 - \frac{1}{2} kx_2^2$$

4. Δύο αυτοκίνητα με μάζες m_1, m_2 ($m_1 > m_2$) κινούνται με την ίδια κινητική ενέργεια και φρενάρουν σε ίδιο οριζόντιο δρόμο με τον ίδιο συντελεστή τριβής. Οι συνολικές τριβές που δέχονται τα δύο αυτοκίνητα είναι T_1, T_2 με $T_1 > T_2$. Τα αυτοκίνητα σταματούν αφού διανύσουν φρενάροντας, διαστήματα s_1 και s_2 σε χρονικές διάρκειες t_1 και t_2 αντιστοίχως.

I. Για τα διαστήματα ισχύει η σχέση

$$\alpha. s_1 = s_2$$

$$\beta. s_1 > s_2$$

$$\gamma. s_1 < s_2$$

II. Για τις χρονικές διάρκειες ισχύει η σχέση

$$\alpha. t_1 = t_2$$

$$\beta. t_1 > t_2$$

$$\gamma. t_1 < t_2$$

Απάντηση

I. Τα αυτοκίνητα φρενάρουν σε οριζόντιο δρόμο και η μόνη δύναμη που κάνει έργο πάνω τους είναι η τριβή. Γράφουμε για το καθένα το ΘΜΚΕ, $W_T = \Delta K$

$$-T_1 s_1 = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \rightarrow -T_1 s_1 = 0 - K_1 \rightarrow T_1 s_1 = K_1 \quad (1)$$

$$-T_2 s_2 = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \rightarrow -T_2 s_2 = 0 - K_2 \rightarrow T_2 s_2 = K_2 \quad (2)$$

Με δεδομένο ότι $K_1 = K_2$ και $T_1 > T_2$ από τις (1)(2) φαίνεται ότι $s_1 < s_2$. Σωστό είναι το **(γ)**

II. Τα αυτοκίνητα επιβραδύνονται με την ίδια επιβράδυνση a , αφού: $T = ma \rightarrow -\mu mg = ma \rightarrow a = -\mu g$

Επειδή $m_1 > m_2$ και $K_1 = K_2 = \frac{1}{2} m v^2$ είναι φανερό ότι $v_1 < v_2$.

Η χρονική διάρκεια για να γίνει $v_{\text{τελ}} = 0$ είναι : $0 = v - |a|t \rightarrow t_{\text{stop}} = \frac{v}{|a|}$

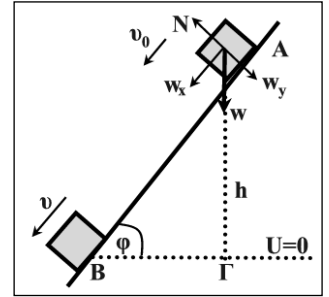
Άρα: $t_1 = \frac{v_1}{|a|}$ και $t_2 = \frac{v_2}{|a|}$ και με δεδομένο ότι $v_1 < v_2$ έχουμε και $t_1 < t_2$. Σωστό είναι το **(γ)**

5. Σώμα μάζας m βάλλεται από το σημείο A λείου κεκλιμένου επιπέδου προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα v_0 . Οι τριβές με τον αέρα θεωρούνται αμελητέες. Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος στο σημείο B που βρίσκεται κατά h χαμηλότερα από το A, είναι:

α. $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$

β. $v = v_0$

γ. $v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$



Απάντηση

Αναλύω το βάρος w σε ορθογώνιες συνιστώσες και έργο κάνει μόνο η επιτροχία συνιστώσα $w_x = mg \sin \phi$. Οι άλλες N και w_y είναι κάθετες στη μετατόπιση και δεν κάνουν έργο. Προσέξτε ότι από τη γεωμετρία του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε: $\sin \phi = \frac{(A\Gamma)}{(AB)} = \frac{h}{(AB)} \rightarrow (AB) \sin \phi = h$

$$\text{Άρα:} \quad W_w = W_{wx} = mg \cdot \sin \phi \cdot (AB) = mgh$$

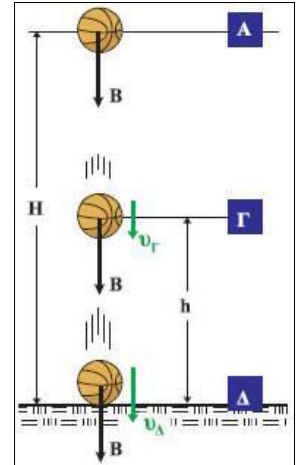
Γράφω το ΘΜΚΕ για το σώμα από το A στο B.

$$W_w = K_B - K_A \rightarrow mgh = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \rightarrow 2gh = v^2 - v_0^2 \rightarrow v^2 = v_0^2 + 2gh \rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

Σωστό είναι το (α)

6. Μια μπάλα πέφτει στο κενό από το σημείο Α, δεχόμενη μόνο τη δύναμη του βάρους της. Το Α βρίσκεται σε ύψος H πάνω από το έδαφος ενώ το σημείο Γ σε ύψος $h=H/2$. Αν θεωρήσουμε ως στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας το έδαφος (Δ) και τις τριβές με τον αέρα αμελητέες, τότε η κινητική ενέργεια K_Γ της μπάλας στο σημείο Γ είναι

- α. ίση με το $\frac{1}{4}$ της κινητικής ενέργειας στο Δ
- β. ίση με τη δυναμική ενέργεια στο Γ
- γ. ίση με το $\frac{1}{2}$ της κινητικής ενέργειας στο Γ



Απάντηση

Από την ΑΔΜΕ μεταξύ των σημείων Α και Δ έχουμε

$$E_A = E_\Delta \rightarrow K_A + U_A = K_\Delta + U_\Delta \rightarrow mgH = K_\Delta \quad (1)$$

Από την ΑΔΜΕ μεταξύ των σημείων Γ και Δ έχουμε

$$E_\Gamma = E_\Delta \rightarrow K_\Gamma + U_\Gamma = K_\Delta + U_\Delta \rightarrow K_\Gamma + mgh = K_\Delta + 0 \rightarrow K_\Gamma = mgH - mgh \rightarrow K_\Gamma = mgH - mg\frac{H}{2} \rightarrow K_\Gamma = mg\frac{H}{2} \rightarrow K_\Gamma = mgh = U_\Gamma$$

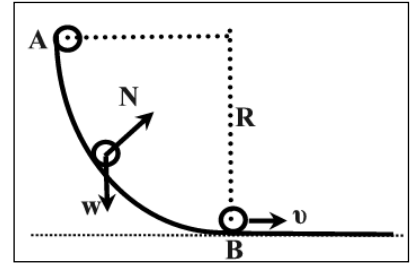
Σωστό είναι το (β)

7. Μια σφαίρα αφήνεται από το σημείο A στο χείλος ενός τεταρτοκυκλίου ακτίνας R να ολισθήσει χωρίς τριβές και αντιστάσεις από τον αέρα. Η ταχύτητα με την οποία φτάνει στο σημείο B του τεταρτοκυκλίου είναι

α. $v=\sqrt{gR}$

β. $v=2\sqrt{gR}$

γ. $v=\sqrt{2gR}$



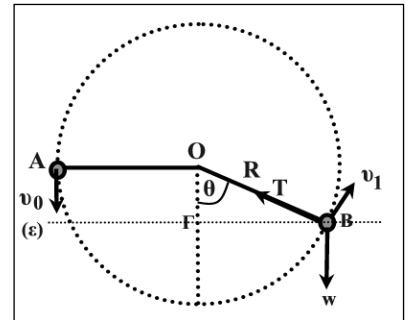
Απάντηση

Η σφαίρα κατά την ολίσθησή της χωρίς τριβές από το A έως το B δέχεται τη συντηρητική δύναμη του βάρους της $w=mg$ και τη μη συντηρητική κάθετη δύναμη στήριξης, N από το τεταρτοκύκλιο. Η N επειδή είναι συνεχώς κάθετη στη μετατόπιση δεν κάνει έργο. Συνεπώς ισχύει η ΑΔΜΕ. Με στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το B έχουμε

$$K_A+U_A= K_B+U_B \rightarrow 0+mgR = \frac{mv^2}{2} + 0 \rightarrow v=\sqrt{2gR} \quad \text{Σωστό είναι το (γ)}$$

Σημ. Λύση με ΘΜΚΕ: $W_{mg}=K_{τελ}-K_{αρχ} \rightarrow mgR=\frac{mv^2}{2} \rightarrow v^2=2gR \rightarrow v=\sqrt{2gR}$

8. Νήμα μήκους $R=0,5\text{m}$ στερεώνεται με το ένα άκρο του σε ακλόνητο σημείο O και στο άλλο φέρει συνδεδεμένη μικρή σφαίρα μάζας m . Κρατάμε το σύστημα σε οριζόντια θέση OA και εκτοξεύουμε τη σφαίρα με αρχική ταχύτητα $v_0=2\text{m/s}$ και σε διεύθυνση κάθετη στο νήμα OA . Η ταχύτητα της σφαίρας όταν αυτή θα περνάει από τη θέση B είναι v_1 . Στη θέση B το νήμα OB σχηματίζει γωνία $\theta=60^\circ$ με την κατακόρυφο που διέρχεται από το O . Δίνεται και το $g=10\text{m/s}^2$. Η ταχύτητα v_1 έχει μέτρο ίσο με



α. $v_1=2\text{m/s}$

β. $v_1=1\text{m/s}$

$v_1=3\text{m/s}$

Απάντηση

Η σφαίρα κατά την κίνησή της, που έχει κυκλική τροχιά, δέχεται δύο δυνάμεις, το κατακόρυφο βάρος $w=mg$ και την τάση του νήματος T . Η T είναι συνεχώς κάθετη στην εφαπτομένη του κάθε σημείου της τροχιάς και συνεπώς δεν κάνει έργο. Άρα ισχύει η ΑΔΜΕ. Τη γράφω θεωρώντας ότι το οριζόντιο επίπεδο (ϵ) που διέρχεται από την τελική θέση B είναι η στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας δηλαδή $U_B=0$

$$E_A=E_B \rightarrow K_A+U_A=K_B+U_B \rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mg(O\Gamma) = \frac{mv_1^2}{2} + 0 \quad (1)$$

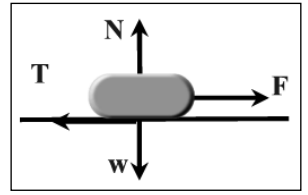
Η κατακόρυφη απόσταση $O\Gamma$ μπορεί να υπολογιστεί από τη γεωμετρία του ορθογωνίου τριγώνου

$$O\Gamma \text{ δηλαδή: } \sin\theta = \frac{(O\Gamma)}{(OB)} \rightarrow (O\Gamma) = R \cdot \sin\theta = R \cdot \frac{1}{2} \rightarrow (O\Gamma) = \frac{R}{2} \quad (2)$$

$$\text{Από (1)(2)} \rightarrow \frac{v_0^2}{2} + \frac{gR}{2} = \frac{v_1^2}{2} \rightarrow v_1^2 = v_0^2 + gR \rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 + gR} \rightarrow v_1 = \sqrt{4 + 10 \cdot 0,5} \text{m/s} \rightarrow v_1 = 3\text{m/s}$$

Σωστό είναι το (γ)

9. Το σώμα μάζας m που βλέπετε στο σχήμα επιταχύνεται οριζόντια υπό την επίδραση της δύναμης $F=10\text{N}$ και της τριβής $T=2\text{N}$. Κάποια στιγμή που έχει ταχύτητα μέτρου $v=2\text{m/s}$, να εκφράσετε τους παρακάτω ρυθμούς ενέργειας



Απάντηση

A. Ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας:
$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Sigma W}{\Delta t} = \frac{\Sigma F_x \cdot \Delta x}{\Delta t} = \Sigma F_x \cdot v = (F - T) \cdot v \rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} = 16\text{J/s}$$

B. Ρυθμός μεταβολής δυναμικής ενέργειας βαρύτητας:
$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{-\Delta W_{\text{συντ}}}{\Delta t} = \frac{-W_w}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta t} = 0$$

Γ. Ρυθμός μεταβολής της μηχανικής ενέργειας:
$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta K}{\Delta t} + \frac{\Delta U}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta E}{\Delta t} = 16\text{J/s}$$

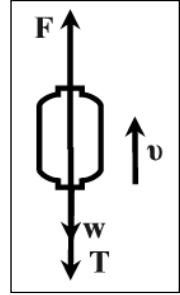
Δ. Ρυθμός έργου τριβής (ισχύς τριβής):
$$P_T = \frac{\Delta W_T}{\Delta t} = \frac{-T \cdot \Delta x}{\Delta t} = -T \cdot v \rightarrow \frac{\Delta W_T}{\Delta t} = -4\text{J/s}$$

Ε. Ρυθμός παραγωγής έργου της F (ισχύς):
$$P_F = \frac{\Delta W_F}{\Delta t} = \frac{F \cdot \Delta x}{\Delta t} = F \cdot v \rightarrow \frac{\Delta W_F}{\Delta t} = 20\text{J/s}$$

Σημ. Τη χρονική στιγμή t που η ταχύτητα είναι $v=2\text{m/s}$, η F προσφέρει στο σώμα 20J/s . Εξ' αυτών τα 4J/s γίνονται θερμότητα μέσω του έργου της τριβής και τα 16J/s γίνονται κινητική δηλαδή μηχανική ενέργεια. Εξάλλου: $P_F + P_T = \frac{\Delta E}{\Delta t}$

Σημ: Το έργο της συντηρητικής δύναμης ισούται με τη διαφορά των δυναμικών ενεργειών όχι τη μεταβολή. $W_{\text{συντ}} = U_{\text{αρχ}} - U_{\text{τελ}} = -\Delta U$

10. Το σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ που βλέπετε στο σχήμα επιταχύνεται κατακόρυφα προς τα πάνω υπό την επίδραση της δύναμης $F=60\text{N}$, του βάρους $w=mg=20\text{N}$ και της τριβής $T=10\text{N}$. Κάποια στιγμή που έχει ταχύτητα μέτρου $v=5\text{m/s}$, να υπολογίσετε τους παρακάτω ρυθμούς ενέργειας



Απάντηση

A. Ρυθμός μεταβολής της κιν. εν:
$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Sigma W}{\Delta t} = \frac{\Sigma F_x \cdot \Delta x}{\Delta t} = \Sigma F_x \cdot v = (F - w - T) \cdot v \rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} = 150\text{J/s}$$

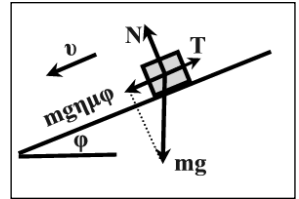
B. Ρυθμός μεταβολής δυναμ. εν.:
$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{-\Delta W_{\text{συντ}}}{\Delta t} = \frac{-W_w}{\Delta t} = -\frac{-mg \cdot \Delta x}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta t} = +mgv \rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta t} = 100\text{J/s}$$

Γ. Ρυθμός μεταβολής της μηχανικής ενέργειας:
$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta K}{\Delta t} + \frac{\Delta U}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta E}{\Delta t} = 250\text{J/s}$$

Δ. Ρυθμός παραγωγής έργου της F (ισχύς):
$$P_F = \frac{\Delta W_F}{\Delta t} = \frac{F \cdot \Delta x}{\Delta t} = F \cdot v \rightarrow \frac{\Delta W_F}{\Delta t} = 300\text{J/s}$$

Ε. Ρυθμός παραγωγής θερμότητας λόγω τριβών:
$$\frac{\Delta Q_T}{\Delta t} = \frac{\Delta |W_T|}{\Delta t} = \frac{T \cdot \Delta x}{\Delta t} = T \cdot v \rightarrow \frac{\Delta Q_T}{\Delta t} = 50\text{J/s}$$

11. Σώμα βάρους $w=mg=20\text{N}$ κατεβαίνει κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ με $\eta\mu\varphi=0,5$. Η δύναμη της τριβής είναι $T=5\text{N}$. Κάποια χρονική στιγμή που η ταχύτητα έχει μέτρο $v=2\text{m/s}$, να βρεθούν οι παρακάτω ρυθμοί μεταβολής ενέργειας.



Απάντηση

A. Ρυθμός μεταβολής της κιν. εν.: $\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Sigma W}{\Delta t} = \frac{\Sigma F_x \cdot \Delta x}{\Delta t} = \Sigma F_x \cdot v = (w_x - T)v = (mg\eta\mu\varphi - T)v \rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} = 10\text{J/s}$

B. Ρυθμός μεταβολής δυν. εν.: $\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{-\Delta W_{\text{συντ}}}{\Delta t} = \frac{-W_w}{\Delta t} = -\frac{+mg\eta\mu\varphi \cdot \Delta x}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta t} = -mg\eta\mu\varphi v \rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta t} = -20\text{J/s}$

Γ. Ρυθμός μεταβολής της μηχανικής ενέργειας: $\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta K}{\Delta t} + \frac{\Delta U}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta E}{\Delta t} = -10\text{J/s}$

Δ. Ρυθμός παραγωγής θερμότητας λόγω τριβών: $\frac{\Delta Q_T}{\Delta t} = \frac{\Delta |W_T|}{\Delta t} = \frac{T \cdot \Delta x}{\Delta t} = T \cdot v \rightarrow \frac{\Delta Q_T}{\Delta t} = 10\text{J/s}$

Σημ: Καθώς κατεβαίνει και τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα είναι 2m/s , η δυναμική ενέργεια μειώνεται με ρυθμό 20J/s και εξ αυτών τα 10J/s γίνονται κινητική και τα υπόλοιπα 10J/s θερμότητα λόγω της τριβής.