

Γ ΘΕΜΑΤΑ

Δυναμική σε μία
διάσταση

Γ.2.1 Σώμα μάζας m έχει τη χρονική στιγμή $t_0=0$, ταχύτητα $v_0=10\text{m/s}$ και δέχεται μια δύναμη ίδιας κατεύθυνσης με την ταχύτητά του μέτρου $F_1=60\text{N}$ και μια αντίθετη μέτρου $F_1'=20\text{N}$. Τη χρονική στιγμή $t_1=5\text{s}$ το σώμα έχει αποκτήσει ταχύτητα $v_1=20\text{m/s}$ η δύναμη F_1 καταργείται, ενώ η F_1' παραμένει και αμέσως εφαρμόζεται και μια ακόμα δύναμη F_2 της ίδια κατεύθυνσης με τη F_1' . Αυτές οι δυνάμεις του δίνουν αμέσως επιβράδυνση $a_2=5\text{m/s}^2$. Να βρεθούν

A. Η επιτάχυνση a_1
B. Η μάζα m
Γ. Η δύναμη F_2
Δ. Η χρονική στιγμή που σταματάει.
Ε. Το συνολικό διάστημα που διανύει.

Απάντηση

A. Από $0-5\text{s}$ το σώμα επιταχύνεται με a_1 : $v_1=v_0+a_1t_1 \rightarrow a_1=\frac{v_1-v_0}{t_1} \rightarrow \mathbf{a_1=2\text{m/s}^2}$

B. Από το 2^ο νόμο έχουμε: $F_1-F_1'=ma_1 \rightarrow m=\frac{F_1-F_1'}{a_1} \rightarrow \mathbf{m=20\text{kg}}$

Γ. Μετά τα 5s το σώμα επιβραδύνεται με a_2 . Από το δεύτερο νόμο για την επιβράδυνση

$$F_1'+F_2=ma_2 \rightarrow F_2=ma_2-F_1'=100\text{N}-20\text{N} \rightarrow \mathbf{F_2=80\text{N}}.$$

Δ. Αφού επιβραδύνεται και σταματάει: $v_{\text{τελ}}=v_1-a_2\Delta t_2 \rightarrow 0=v_1-a_2\Delta t_2 \rightarrow \Delta t_2=\frac{v_1}{a_2} \rightarrow \Delta t_2=4\text{s}$. Άρα σταματάει τη χρονική στιγμή $t_{\text{stop}}=t_1+\Delta t_2 \rightarrow \mathbf{t_{\text{stop}}=9\text{s}}$

Ε. Το διάστημα που διανύει στο χρονικό διάστημα $\Delta t_1=t_1=5\text{s}$ είναι:

$$\Delta x_1=v_0\Delta t_1+\frac{1}{2}a_1\Delta t_1^2 \rightarrow \Delta x_1=75\text{m}$$

Και στο χρονικό διάστημα Δt_2 : $\Delta x_2=v_1\Delta t_2-\frac{1}{2}a_2\Delta t_2^2 \rightarrow \Delta x_2=40\text{m}$

$$\Delta x=\Delta x_1+\Delta x_2 \rightarrow \mathbf{\Delta x=115\text{m}}$$

Γ.2.2 Σώμα μάζας $m=20\text{kg}$ ξεκινάει από την ηρεμία τη χρονική στιγμή $t_0=0$ και δέχεται για 4s συνισταμένη δύναμη $F_1=40\text{N}$ και για τα επόμενα άλλα 4s, ομόρροπη συνισταμένη δύναμη $F_2=20\text{N}$. Τέλος για άλλα 4s η συνισταμένη δύναμη είναι $F_3=0$.

A. Να υπολογιστεί η ταχύτητα στο τέλος των 12s.

B. Να βρεθεί η συνολική μετατόπιση για τα 12s της κίνησης.

Γ. Να γίνει το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου από 0 έως 12s.

Δ. Να υπολογιστεί το μέτρο μιας νέας οριζόντιας συνισταμένης δύναμης που πρέπει να ασκηθεί στο σώμα ώστε αυτό να σταματήσει στα 16s συνολικού χρόνου κίνησης

Ε. Πόσα μέτρα θα διανύσει ακόμα μέχρι να σταματήσει;

Απάντηση

Από (0–4s): $a_1 = \frac{F_1}{m} \rightarrow a_1 = 2\text{m/s}^2$. Άρα $v_1 = a_1 \cdot \Delta t_1 \rightarrow v_1 = 8\text{m/s}$ και $\Delta x_1 = \frac{a_1 \Delta t_1^2}{2} \rightarrow \Delta x_1 = 16\text{m}$

Από (4s–8s): $a_2 = \frac{F_2}{m} \rightarrow a_2 = 1\text{m/s}^2$. Άρα $v_2 = v_1 + a_2 \Delta t_2 \rightarrow v_2 = 12\text{m/s}$ και $\Delta x_2 = v_1 \Delta t_2 + \frac{a_2 \Delta t_2^2}{2} \rightarrow \Delta x_2 = 40\text{m}$

Από (8–12s) $a_3 = 0$ $v_3 = v_2 = 12\text{m/s}$ και $\Delta x_3 = v_3 \Delta t_3 \rightarrow \Delta x_3 = 48\text{m}$

A. Η τελική ταχύτητα είναι $v_3 = 12\text{m/s}$

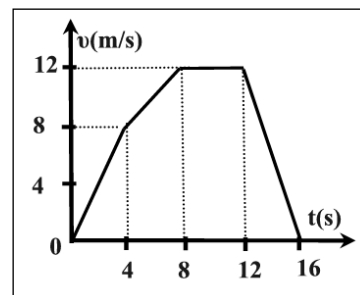
B. Η συνολική μετατόπιση είναι $\Delta x_{\text{ολ}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 16\text{m} + 40\text{m} + 48\text{m} \rightarrow \Delta x_{\text{ολ}} = 104\text{m}$

Γ. Το διάγραμμα ($v-t$) φαίνεται στο σχήμα

Δ. Τη χρονική στιγμή $t_3 = 12\text{s}$ το σώμα έχει ταχύτητα $v_3 = 12\text{m/s}$ και αρχίζει να επιβραδύνεται έτσι ώστε σε χρόνο $\Delta t_4 = 4\text{s}$ να σταματήσει

$$v_{\text{τελ}} = v_3 - |a_4| \Delta t_4 \rightarrow |a_4| = \frac{v_3}{\Delta t_4} \rightarrow |a_4| = 3\text{m/s}^2$$

$$F_4 = m a_4 = 20\text{kg} \cdot 3\text{m/s}^2 \rightarrow F_4 = 60\text{N}$$



Ε. Η μετατόπιση μέχρι να σταματήσει είναι: $\Delta x_{\text{sop}} = \Delta x_4 = \frac{v_3^2}{2|a_4|} \rightarrow \Delta x_4 = 24\text{m}$

Γ.2.3 Σημειακό αντικείμενο μάζας $m=2\text{kg}$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ δέχεται κατακόρυφη δύναμη $F=40\text{N}$ και επιταχύνεται κατακόρυφα προς τα πάνω.

Να υπολογίσετε

A. την επιτάχυνση του σώματος, a .

B. το ύψος h_1 που θα έχει φτάσει μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t_1=10\text{s}$.

Τη χρονική στιγμή $t_1=10\text{s}$ η δύναμη F μηδενίζεται ακαριαία.

Γ. Σε ποιος ύψος από το επίπεδο η ταχύτητα του σώματος θα μηδενιστεί;

Δ. Με πόση ταχύτητα θα φτάσει και πάλι στο αρχικό επίπεδο;

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$

Απάντηση

A. Η επιτάχυνση: $\Sigma F=ma \rightarrow F-mg=ma \rightarrow a=\frac{F-mg}{m} \rightarrow a=10\text{m/s}^2$

B. Η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη με $a=10\text{m/s}^2$, χωρίς αρχική ταχύτητα:

$$\text{Άρα } h_1 = \frac{a\Delta t_1^2}{2} \rightarrow h_1=500\text{m}$$

Γ. Τη χρονική στιγμή $t_1=10\text{s}$, η ταχύτητα είναι $v_1=a\cdot\Delta t_1 \rightarrow v_1=100\text{m/s}$. Αφού η δύναμη μηδενίζεται κινείται πλέον με την επίδραση μόνο τους βάρους του και κάνει κατακόρυφη βολή προς τα πάνω. Δηλαδή κίνηση ομαλά επιβραδυνόμενη με g και αρχική ταχύτητα $v_1=100\text{m/s}$.

Θα σταματήσει μετά από μετατόπιση: $\Delta y_{\text{stop}} = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{100^2\text{m}^2/\text{s}^2}{20} \rightarrow \Delta y_{\text{stop}}=500\text{m}$.

Άρα θα ανέβει τελικά σε ύψος $h_2=500\text{m}+500\text{m} \rightarrow h_2=1000\text{m}$

Δ. Πέφτοντας από ύψος $h=1000\text{m}$ σε ελεύθερη πτώση με επιτάχυνση g , ο χρόνος καθόδου $t_{\text{καθ}}$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$h=\frac{gt^2}{2} \rightarrow t=\sqrt{\frac{2h}{g}} \rightarrow t_{\text{καθ}}=10\sqrt{2}\text{s}$$

Η ταχύτητα επιστροφής θα είναι: $v_{\text{επ}}=gt_{\text{καθ}} \rightarrow v_{\text{επ}}=100\sqrt{2}\text{m/s}$

► **Γ.2.4** Δύο κιβώτια Α και Β με μάζες $m_A=8\text{kg}$ και $m_B=4\text{kg}$ βρίσκονται τη χρονική στιγμή $t_0=0$ σε λείο οριζόντιο επίπεδο σε απόσταση $d=10\text{m}$ μεταξύ τους και το Α είναι ακίνητο ενώ το Β ήδη κινείται με ταχύτητα $v_0=8\text{m/s}$ απομακρυνόμενο από το Α. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ τα κιβώτια Α και Β δέχονται σταθερές ομόρροπες δυνάμεις με μέτρα $F_A=20\text{N}$ και $F_B=6\text{N}$ αντιστοίχως. Σε κάποια χρονική στιγμή t_1 τα δύο κιβώτια βρέθηκαν σε μέγιστη απόσταση, L μεταξύ τους. Να υπολογιστούν:

Α. Η χρονική στιγμή t που η μεταξύ τους απόσταση γίνεται μέγιστη και η τιμή της μέγιστης απόστασης, L .

Β. Οι ταχύτητες v_1, v_2 που θα έχουν όταν βρεθούν στη μέγιστη απόσταση μεταξύ τους. Κάποια άλλη χρονική στιγμή t' τα δύο σώματα συναντιούνται. Να υπολογιστούν

Γ. Η χρονική στιγμή t' που θα συναντηθούν

Δ. Οι ταχύτητες, V_1, V_2 τη στιγμή της συνάντησης

Απάντηση

Τα σώματα κινούνται με επιταχύνσεις: $a_1 = \frac{F_1}{m_A} \rightarrow a_1 = 2,5\text{m/s}^2$ και $a_2 = \frac{F_B}{m_B} \rightarrow a_2 = 1,5\text{m/s}^2$

Α. Έστω κάποια στιγμή, t , ότι βρίσκονται στη μέγιστη δυνατή τους απόσταση L , ενώ τα Α και Β έχουν διανύσει αποστάσεις το μιν

$$x_1 = \frac{1}{2}a_1t^2$$

$$x_2 = v_0t + \frac{1}{2}a_2t^2.$$

Από το σχήμα βλέπουμε ότι:

$$x_2 + d = x_1 + L \rightarrow v_0t + \frac{1}{2}a_2t^2 + d = \frac{1}{2}a_1t^2 + L \rightarrow 8t - 0,5t^2 + 10 - L = 0 \rightarrow 0,5t^2 - 8t - 10 + L = 0.$$

Η δευτεροβάθμια ως προς το χρόνο, t , έχει διακρίνουσα θετική άρα

$$\Delta \geq 0 \rightarrow 64 - 4 \cdot 0,5 \cdot (L - 10) \geq 0 \rightarrow L \leq 42 \rightarrow L_{\max} = 42\text{m}$$

Αν $L=42\text{m}$ τότε η $\Delta=0$ και η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα άρα: $t = -(-8)/2 \cdot 0,5 \rightarrow t = 8\text{s}$.

Β. Τότε οι ταχύτητες είναι $v_1 = a_1t = 20\text{m/s}$ και $v_2 = v_0 + a_2t = 20\text{m/s}$.

Παρατηρούμε ότι όταν βρίσκονται στη μέγιστη δυνατή απόσταση έχουν κοινή ταχύτητα.

Γ. Στο σημείο συνάντησης Σ θα έχουν διανύσει σε χρόνο t' αποστάσεις

$$d_1 = \frac{1}{2}a_1t'^2$$

$$d_2 = v_0t' + \frac{1}{2}a_2t'^2$$

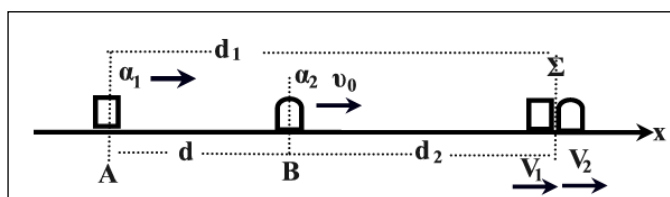
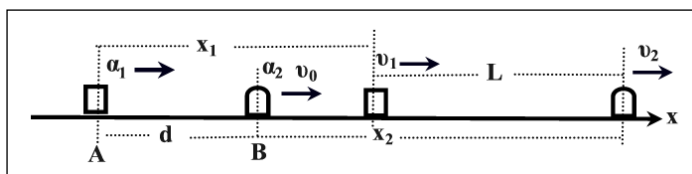
Από το σχήμα φαίνεται ότι

$$d_1 - d_2 = d \rightarrow \frac{1}{2}a_1t'^2 - v_0t' - \frac{1}{2}a_2t'^2 = d \rightarrow 0,5t'^2 - 8t' - 10 = 0$$

με διακρίνουσα $\Delta = 64 + 20 = 84$, και $\sqrt{84} = 9,2$

$$t' = \frac{8 \pm \sqrt{84}}{1} \rightarrow t' = 17,2\text{s}$$

Οι ταχύτητες: $V_1 = a_1t' = 43\text{m/s}$ και $V_2 = v_0 + a_2t' = 33,8\text{m/s}$



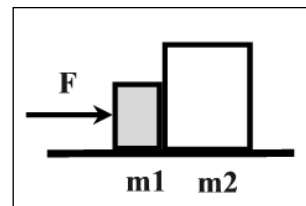
Γ.2.5 Οριζόντια δύναμη μέτρου $F=40\text{N}$ ασκείται σε κιβώτιο μάζας $m_1=2\text{kg}$ που βρίσκεται σε επαφή με άλλο κιβώτιο μάζας $m_2=4\text{kg}$. Οι συντελεστές τριβές ολίσθησης μεταξύ των δύο σωμάτων και της οριζόντιας επιφάνειας είναι $\mu_1=0,5$ και $\mu_2=0,3$ αντιστοίχως.

Να υπολογιστούν:

A. η επιτάχυνση του συστήματος.

B. το μέτρο της δύναμης που ασκεί το ένα κιβώτιο στο άλλο

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$



Απάντηση

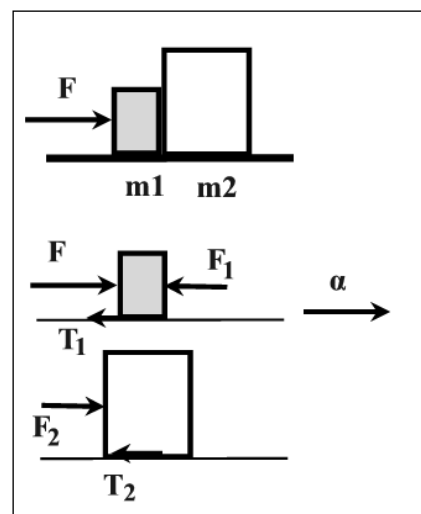
Το σύστημα των δύο σωμάτων επιταχύνεται προς τα δεξιά με κοινή επιτάχυνση a αφού τα σώματα βρίσκονται σε επαφή.

Με τη μέθοδο του ανεξάρτητου σώματος είναι πιο εύκολο να δούμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο κάθε σώμα και να γράψουμε τους νόμους Newton για κάθε σώμα χωριστά

Σώμα (1): Στον άξονα y δέχεται τις δυνάμεις N_1 και $w_1=m_1g$. Άρα:

$$N_1 - m_1g = 0 \rightarrow N_1 = m_1g = 20\text{N}$$

Η τριβή είναι: $T_1 = \mu_1 N_1 \rightarrow T_1 = 0,5 \cdot 20\text{N} \rightarrow T_1 = 10\text{N}$



Στον x δέχεται την F , τριβή T_1 και τη δύναμη επαφής F_1 από το σώμα (2)

$$\Sigma F_1 = m_1 \cdot a \rightarrow F - F_1 - T_1 = m_1 a \quad (1)$$

Σώμα (2): Στον άξονα y δέχεται τις δυνάμεις N_2 και $w_2=m_2g$. Άρα:

$$N_2 - m_2g = 0 \rightarrow N_2 = m_2g = 40\text{N}$$

Η τριβή είναι: $T_2 = \mu_2 N_2 \rightarrow T_2 = 0,3 \cdot 40\text{N} \rightarrow T_2 = 12\text{N}$

Στον x δέχεται την τριβή T_2 και τη δύναμη επαφής F_2 από το σώμα (1) που είναι η αντίδραση της F_1 και είναι φυσικά κατά μέτρο ίσες $F_1 = F_2$.

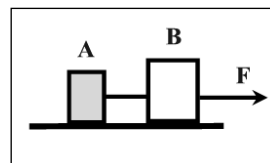
$$\Sigma F_2 = m_2 \cdot a \rightarrow F_2 - T_2 = m_2 a \quad (2)$$

Από την πρόσθεση των σχέσεων (1)+(2) $\rightarrow$

$$F - F_1 - T_1 + F_2 - T_2 = m_1 a + m_2 a \rightarrow F - T_1 - T_2 = (m_1 + m_2) a \rightarrow a = \frac{F - T_1 - T_2}{m_1 + m_2} \rightarrow a = 3\text{m/s}^2$$

$$F_2 - T_2 = m_2 a \rightarrow F_2 = T_2 + m_2 \cdot a \rightarrow F_2 = 12\text{N} + 12\text{N} \rightarrow F_2 = F_1 = 24\text{N}$$

Γ.2.6 Τα δύο κιβώτια Α και Β φέρουν υλικά με συνολικές μάζες $m_1=2\text{kg}$ και $m_2=4\text{kg}$ και είναι συνδεδεμένα με νήμα. Ασκούμε στο κιβώτιο, Β οριζόντια δύναμη μέτρου $F=60\text{N}$ και θέτουμε το σύστημα σε επιταχυνόμενη κίνηση πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το μήκος του τεντωμένου νήματος είναι $L=1\text{m}$



Α. Πόση είναι η επιτάχυνση a ;

Β. Πόση είναι η δύναμη που ασκεί το νήμα στο κάθε κιβώτιο;

Γ. Αν το σχοινί κοπεί τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα του συστήματος είναι 10m/s , πόση απόσταση, d , θα απέχουν τα δύο κιβώτια μετά από $\Delta t=1\text{s}$ αφότου κόπηκε το νήμα;

Απάντηση

Α. Το σώμα Β δέχεται τη δύναμη F και τη δύναμη T του νήματος και επιταχύνεται με επιτάχυνση a . Το σώμα Α δέχεται μόνο τη δύναμη T του νήματος και επιταχύνεται με την ίδια επιτάχυνση a αφού το νήμα είναι πάντα τεντωμένο. Από τι 2^ο νόμο για κάθε σώμα έχουμε

$$\text{Σώμα Β:} \quad F - T = m_2 \cdot a \quad (1)$$

$$\text{Σώμα Α:} \quad T = m_1 a \quad (2)$$

$$\text{Από (1)+(2)} \rightarrow F = (m_1 + m_2) \cdot a \rightarrow a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{60\text{N}}{6\text{kg}} \rightarrow$$

$$a = 10\text{m/s}^2$$

$$\text{Β. Από (2)} \rightarrow T = m_1 \cdot a = 2\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 \rightarrow T = 20\text{N}$$

Γ. Το νήμα κόβεται τη στιγμή που τα σώματα έχουν $v=10\text{m/s}$. Το Α χωρίς να δέχεται καμιά πλέον οριζόντια δύναμη κινείται ευθύγραμμα και ομαλά και σε χρόνο $\Delta t=1\text{s}$ μετατοπίζεται κατά

$$\Delta x_A = v \Delta t = 10\text{m}$$

Το Β δέχεται τη δύναμη F και κάνει ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση:

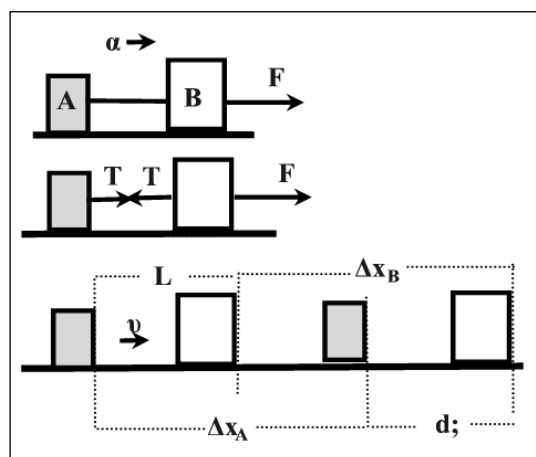
$$a_B = \frac{\Sigma F_B}{m_2} = \frac{60\text{N}}{4\text{kg}} \rightarrow a_B = 15\text{m/s}^2$$

$$\text{Και μετατοπίζεται κατά:} \quad \Delta x_B = v \Delta t + \frac{a_B \Delta t^2}{2} = 10\text{m/s} \cdot 1\text{s} + \frac{15\text{m/s}^2 \cdot 1\text{s}^2}{2} \rightarrow \Delta x_B = 17,5\text{m}$$

Από το σχήμα έχουμε:

$$\Delta x_A + d = \Delta x_B + L \rightarrow d = \Delta x_B + L - \Delta x_A = 17,5\text{m} + 1\text{m} - 10\text{m} \rightarrow$$

$$d = 8,5\text{m}$$



Γ.2.7 Δύο σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1=10\text{kg}$ και $m_2=5\text{kg}$ συνδέονται με νήμα και το σύστημα επιταχύνεται κατακόρυφα προς τα πάνω στο κενό με σταθερή δύναμη $F=300\text{N}$.

A. Να υπολογιστεί η επιτάχυνση του συστήματος, a .

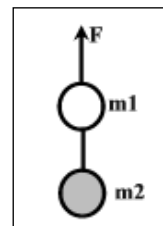
B. Να υπολογιστεί η δύναμη T του νήματος.

Κάποια στιγμή που η ταχύτητα του συστήματος είναι 2m/s , κόβεται το νήμα που συνδέει τις δύο σφαίρες, ενώ η F συνεχίζει να ασκείται στο Σ_1 .

Γ. Σε ποιο μέγιστο ύψος πάνω από το σημείο που κόπηκε το νήμα φτάνει το Σ_2 ;

Δ. Πόση απόσταση έχει διανύσει το m_1 από τη στιγμή που κόπηκε το νήμα και μέχρι το m_2 να βρεθεί στο μέγιστο ύψος του;

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

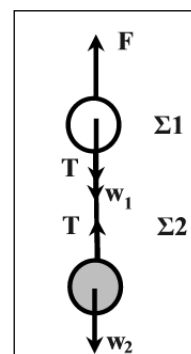


Απάντηση

A. Το σύστημα επιταχύνεται με κοινή επιτάχυνση a . Γράφουμε το 2^ο νόμο για κάθε σώμα χωριστά

$$\Sigma F_1 = m_1 a \rightarrow F - T - m_1 g = m_1 a \quad (1)$$

$$\Sigma F_2 = m_2 a \rightarrow T - m_2 g = m_2 a \quad (2)$$



Αν προσθέσω κατά μέλη παίρνω το 2^ο νόμο για το σύστημα και υπολογίζω την a .

$$(1)+(2) \rightarrow F - m_1 g - m_2 g = (m_1 + m_2) a \rightarrow a = \frac{F - m_1 g - m_2 g}{(m_1 + m_2)} \rightarrow a = 10\text{m/s}^2$$

B. Από τη (2) $\rightarrow T - m_2 g = m_2 a \rightarrow T = m_2 g + m_2 a \rightarrow T = 100\text{N}$

Γ. Μόλις κοπεί το νήμα το σώμα Σ_2 που έχει εκείνη τη στιγμή ταχύτητα $v_0=2\text{m/s}$, δέχεται μόνο το βάρος του και αρχίζει μια κατακόρυφη βολή προς τα πάνω. Η κίνηση είναι ομαλά επιβραδυνόμενη με επιβράδυνση μέτρου g . Στη θέση μέγιστου ύψους η ταχύτητα μηδενίζεται, δηλαδή

$$v_{\text{τελ}} = v_0 - g \Delta t_2 \rightarrow \Delta t_2 = \frac{v_0}{g} \rightarrow \Delta t_2 = 0,2\text{s}$$

Μέσα σε αυτό το $0,2\text{s}$ το Σ_2 ανυψώνεται κατακόρυφα κατά

$$\Delta y_2 = v_0 \Delta t_2 - \frac{g \Delta t_2^2}{2} \text{ ή κατά } \Delta y_2 = \frac{v_0^2}{2g} \rightarrow \Delta y_2 = 0,2\text{m}$$

Δ. Όταν κοπεί το νήμα το Σ_1 επιταχύνεται με την επίδραση των F και w_1 με επιτάχυνση a_1

$$\Sigma F_1' = m_1 a_1 \rightarrow F_1 - m_1 g = m_1 a_1 \rightarrow 300\text{N} - 200\text{N} = 10\text{kg} \cdot a_1 \rightarrow a_1 = 20\text{m/s}^2$$

Σε χρόνο $\Delta t_2 = 0,2\text{s}$ και με αρχική ταχύτητα $v_0 = 2\text{m/s}$ προλαβαίνει και μετατοπίζεται προς τα πάνω κατά

$$\Delta y_1 = v_0 \Delta t_2 - \frac{g \Delta t_2^2}{2} \rightarrow \Delta y_1 = 0,2\text{m}$$

Γ.2.8 Αφήνουμε μικρές σφαίρες να πέφτουν ελεύθερα προς το έδαφος, από το ύψος μιας ταρατσας ουρανοξύστη, (σημείο Ο) με ρυθμό μια σφαίρα κάθε ένα δευτερόλεπτο. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$ και οι τριβές με τον αέρα θεωρούνται αμελητέες.

Α. Κατά πόσο θα έχει πέσει από την αφετηρία (Ο) η πρώτη σφαίρα τη χρονική στιγμή που αφήνουμε την τρίτη;

Β. Πόση ταχύτητα θα έχει η πρώτη σφαίρα όταν αφήνουμε την τέταρτη;

Γ. Πόσο θα απέχει η πρώτη σφαίρα από την τέταρτη, όταν αφήνουμε την πέμπτη;

Απάντηση

Α. Η 1^η σφαίρα αφήνεται τη χρονική στιγμή $t_0=0$ και η τρίτη τη χρονική στιγμή $t_3=2\text{s}$. Το χρονικό διάστημα είναι $\Delta t_{0-3}=t_3-t_0=2\text{s}-0 \rightarrow \Delta t_{0-3}=2\text{s}$

$$y_1 = \frac{g\Delta t_{0-3}^2}{2} = \frac{10\text{m/s}^2 \cdot 4\text{s}^2}{2} \rightarrow y_1 = 20\text{m}$$

Β. Αφήνουμε την τέταρτη σφαίρα τη χρονική στιγμή $t_4=3\text{s}$. Άρα η πρώτη κινείται για χρονικό διάστημα $\Delta t_{0-4}=t_4-t_0=3\text{s}$. Και θα έχει ταχύτητα

$$v_2 = g\Delta t_{0-4} = 10\text{m/s}^2 \cdot 3\text{s} \rightarrow v_2 = 30\text{m/s}$$

Γ. Η πέμπτη σφαίρα αφήνεται τη χρονική στιγμή $t_5=4\text{s}$

Η πρώτη σφαίρα θα έχει διανύσει απόσταση: $y_1' = \frac{gt_5^2}{2} \rightarrow y_1' = 80\text{m}$

Η 4^η σφαίρα έχει αφεθεί τη χρονική στιγμή $t_4=3\text{s}$ οπότε στα $t_5=4\text{s}$ ήδη κινείται για $\Delta t=t_5-t_4=1\text{s}$. Άρα θα έχει πέσει κατά

$$y_4 = \frac{g\Delta t_{4-5}^2}{2} \rightarrow y_4 = 5\text{m}$$

Συνεπώς η μεταξύ τους απόσταση είναι $\Delta y = y_1' - y_4 = 80\text{m} - 5\text{m} \rightarrow \Delta y = 75\text{m}$

Γ.2.9 Από ένα σημείο Ο του εδάφους βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω μια πέτρα Π με αρχική ταχύτητα v_0 . Την ίδια χρονική στιγμή από ύψος $h=2,5\text{m}$ και στην ίδια κατακόρυφο αφήνουμε να πέσει ένα κέρμα. Τα δύο σώματα συναντιούνται στο μισό του ύψους h . Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$ και οι αντιστάσεις του αέρα θεωρούνται αμελητέες.

A. Να βρεθεί η αρχική ταχύτητα, v_0 .

B. Να βρεθούν οι ταχύτητες των δύο σωμάτων τη στιγμή της συνάντησης.

Αν το κέρμα ξεκινήσει από το Α τη χρονική στιγμή $t_0=0$ και η πέτρα εκτοξευθεί από το Ο με $v_0=5\text{m/s}$ κατά $t=0,2\text{s}$ αργότερα, να υπολογιστούν

Γ. η χρονική στιγμή που θα συναντηθούν

Δ. η απόσταση του νέου σημείου συνάντησης από το Ο.

Απάντηση

A. Η πέτρα κάνει κατακόρυφη βολή προς τα πάνω.

$$v_1 = v_0 - gt \quad (1) \quad \text{και} \quad y_1 = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \quad (2)$$

Το κέρμα κάνει ελεύθερη πτώση: $v_2 = gt \quad (3) \quad \text{και} \quad y_2 = \frac{gt^2}{2} \quad (4)$

Αφού η συνάντηση γίνεται στο μέσο της απόστασης $OA=h$ από την (4) θα υπολογίσουμε το χρόνο που κινούνται μέχρι να συναντηθούν:

$$y_2 = \frac{h}{2} \rightarrow \frac{h}{2} = \frac{gt^2}{2} \rightarrow t = \sqrt{\frac{h}{g}} = \sqrt{0,25\text{s}} \rightarrow t = 0,5\text{s}$$

$$\text{Από (2)(4)} \rightarrow y_1 + y_2 = h \rightarrow h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} + \frac{gt^2}{2} \rightarrow h = v_0 t \rightarrow v_0 = \frac{h}{t} \rightarrow v_0 = 5\text{m/s}$$

B. Οι ταχύτητες

$$(1) \rightarrow v_1 = 5\text{m/s} - 10\text{m/s}^2 \cdot 0,5\text{s} \rightarrow v_1 = 0$$

$$(3) \rightarrow v_2 = 10\text{m/s}^2 \cdot 0,5\text{s} \rightarrow v_2 = 5\text{m/s}$$

Γ. Τότε για το κέρμα ισχύουν και πάλι $v_2 = gt \quad (3) \quad \text{και} \quad y_2 = \frac{gt^2}{2} \quad (4)$

Αλλά η πέτρα που ξεκινάει μετά από $t=0,2\text{s}$ κινείται μέχρι τη συνάντηση για χρόνο $(t-\tau)$. Άρα

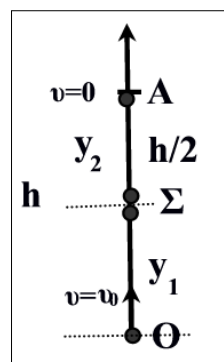
$$v_1 = v_0 - g(t-\tau) \quad (5) \quad \text{και} \quad y_1 = v_0(t-\tau) - \frac{g(t-\tau)^2}{2} \quad (6)$$

Στο σημείο συνάντησης Σ θα ισχύει και πάλι

$$y_1 + y_2 = h \rightarrow v_0(t-\tau) - \frac{g(t-\tau)^2}{2} + \frac{gt^2}{2} = h \rightarrow v_0(t-\tau) - \frac{g}{2}(t^2 - 2t\tau + \tau^2) + \frac{gt^2}{2} = h \rightarrow$$

$$v_0 t - v_0 \tau + g t \tau - \frac{g \tau^2}{2} = h \rightarrow 5t - 5 \cdot 0,2 + 2t - 5 \cdot 0,04 = 2,5 \rightarrow 7t = 3,7 \rightarrow t = 0,53\text{s}$$

Δ. Από (4): $y_2 = \frac{gt^2}{2} \rightarrow y_2 = 5(0,53)^2 = 1,4045\text{m}$. Άρα $y_1 = h - y_2 \rightarrow y_1 = 1,0955\text{m}$



Γ.2.10 Ένα βότσαλο βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω, στο κενό, από σημείο Ο (y=0) με αρχική ταχύτητα $v_0=10\text{m/s}$, τη χρονική στιγμή $t_0=0$. Να υπολογιστούν:

Α. ο χρόνος ανόδου στο μέγιστο ύψος,

Β. το μέγιστο ύψος.

Γ. ο συνολικός χρόνος κίνησης μέχρι να επιστρέψει στο σημείο βολής.

Δ. η ταχύτητα όταν επιστρέφει στο σημείο βολής, Ο.

Ε. οι χρονικές στιγμές και οι ταχύτητες, όταν θα βρίσκεται σε ύψος $h=1,8\text{m}$, πάνω από το Ο.

Στ. η θέση του βότσαλου τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα έχει μέτρο 20m/s .

Ζ. Να γίνουν τα διαγράμματα (v–t) και (y–t) από $t=0$ έως $t=3\text{s}$

Απάντηση

Η κίνηση του βότσαλου είναι ομαλά επιβραδυνόμενη με $g=10\text{m/s}^2$. Ισχύουν:

$$v=v_0-gt \quad (1) \quad \text{και} \quad y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

Α. Τη χρονική στιγμή t_1 που φτάνει στο μέγιστο ύψος, σταματάει στιγμιαία, άρα $v_1=0$

$$\text{Από (1)} \rightarrow 0=v_0-gt_1 \rightarrow t_1=\frac{v_0}{g} \rightarrow \mathbf{t_1=1s}$$

Β. Από τη (2) και για $t_1=v_0/g$ έχουμε: $y=v_0t_1-\frac{1}{2}gt_1^2=v_0\cdot\frac{v_0}{g}-\frac{g}{2}\cdot\frac{v_0^2}{g^2} \rightarrow y_{\max}=\frac{v_0^2}{2g} \rightarrow y_{\max}=5\text{m}$

Γ. Όταν επιστρέφει στο σημείο Ο με $y=0$ από τη (2) έχουμε:

$$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \rightarrow 0=v_0t-\frac{gt^2}{2} \rightarrow t(v_0-\frac{gt}{2})=0 \rightarrow t_0=0 \quad \text{και} \quad t_2=\frac{2v_0}{g} \rightarrow \mathbf{t_2=2s}$$

Δ. Στο Ο επιστρέφει τη χρονική στιγμή t_2 . Η ταχύτητα είναι $v_2=v_0-gt_2 \rightarrow \mathbf{v_2=-10m/s}$

Ε. Από (2) $\rightarrow h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \rightarrow 5t^2-10t+1,8=0$

Η διακρίνουσα της δευτεροβαθμίου εξίσωσης είναι $\Delta=100-36=64$ και $\sqrt{64}=8$

Άρα οι ρίζες είναι: $t_{3,4}=\frac{10\pm 8}{10} \rightarrow \mathbf{t_3=0,2s}$ και $\mathbf{t_4=1,8s}$

Φυσικά περνάει δύο φορές από το σημείο με $y=h=1,8\text{m}$. Μια στην άνοδο και μια στην κάθοδο.

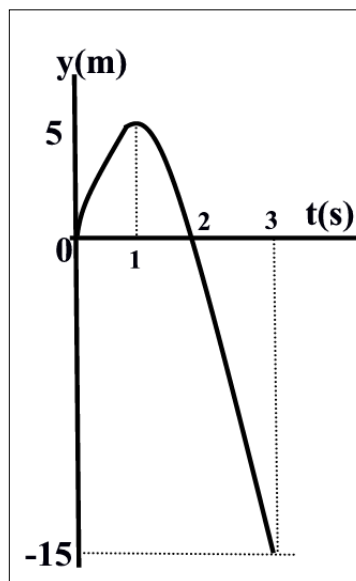
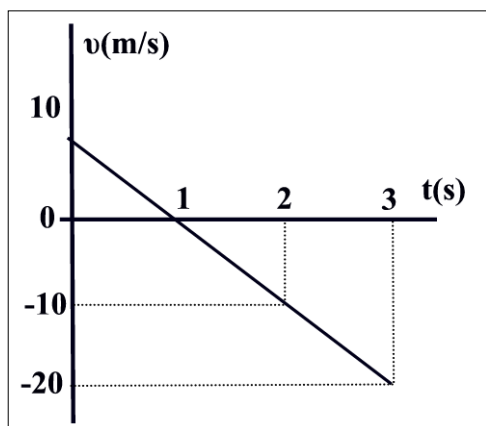
Για $t_3=0,2\text{s}$ $v_3=v_0-gt_3 \rightarrow \mathbf{v_3=8m/s}$ και για $t_4=1,8\text{s}$ $v_4=v_0-gt_4 \rightarrow \mathbf{v_4=-8m/s}$

Η $v_3 > 0$ αντιστοιχεί στην άνοδο και η $v_4 < 0$ αντιστοιχεί στην κάθοδο.

Στ. Αφού βάλλεται με 10m/s και επιστρέφει με μέτρο 10m/s στο Ο, η ταχύτητα θα έχει μέτρο 20m/s όταν θα έχει περάσει το σημείο Ο με κατεύθυνση προς τα κάτω, άρα η αλγεβρική τιμή της θα είναι $v_5=-20\text{m/s}$

$v=v_0-gt_5 \rightarrow t_5=\frac{v_0-v}{g}=\frac{30\text{m/s}}{10\text{m/s}^2} \rightarrow t_5=3\text{s}$.Αρα $y=v_0t_5-\frac{1}{2}gt_5^2 \rightarrow y=-15\text{m}$. Το μείον δείχνει ότι το βότσαλο βρίσκεται στα αρνητικά του άξονα κίνησης δηλαδή κάτω από το σημείο βολής.

Ζ. Οι γραφικές παραστάσεις από 0 έως 3s



Γ.2.11 Από ένα σημείο Ο του εδάφους εκτοξεύουμε κατακόρυφα προς τα πάνω ένα μήλο με αρχική ταχύτητα v_0 . Την ίδια στιγμή από ένα σημείο Α της κατακόρυφης που περνάει από το σημείο Ο αφήνουμε να πέσει ένα βλήμα Η απόσταση ΟΑ είναι $h=90\text{m}$. Ποιο πρέπει να είναι το μέτρο της ταχύτητας v_0 , ώστε το βλήμα να συναντήσει το μήλο, στο μέσο της απόστασης ΟΑ. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$ και οι αντιστάσεις του αέρα θεωρούνται αμελητέες.

Απάντηση

Για το μήλο ισχύει $y_1 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

Για το βλήμα ισχύει $y_2 = \frac{1}{2} g t^2$

Στο σημείο συνάντησης Σ θα ισχύει

$$y_1 + y_2 = h \rightarrow v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + \frac{1}{2} g t^2 = h \rightarrow v_0 t = h \quad (1)$$

Επειδή η συνάντηση γίνεται στο μέσον της απόστασης ΟΑ δηλαδή στο $A\Sigma=45\text{m}$ ισχύει

$$y_2 = \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow (A\Sigma) = \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2(A\Sigma)}{g}} \rightarrow t = \sqrt{9\text{s}^2} \rightarrow t = 3\text{s} \quad (2)$$

$$\text{Από (1)(2)} \rightarrow v_0 = h/t \rightarrow v_0 = 30\text{m/s}$$

Τη χρονική στιγμή $t=3\text{s}$ η ταχύτητα του μήλου είναι $v = v_0 - g t \rightarrow v = 0$ πράγμα που σημαίνει ότι η συνάντηση γίνεται στο μέγιστο ύψος του μήλου.

Δ' ΘΕΜΑΤΑ

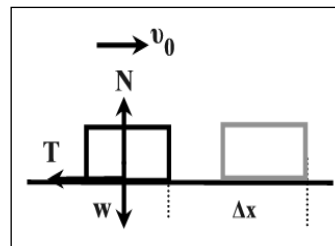
Δυναμική σε 2
διαστάσεις-τριβή

Α.2.1 Τούβλο μάζας m εκτοξεύεται κατά μήκος οριζοντίου επιπέδου με αρχική ταχύτητα $v_0=20\text{m/s}$ και λόγω τριβών σταματάει μετά από διάστημα $\Delta x=40\text{m}$. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$. Να βρεθούν:

A. Το μέτρο της επιβράδυνσης, a .

B. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης.

Γ. Η μετατόπιση του σώματος στο



τελευταίο δευτερόλεπτο της κίνησής του.

Δ. Αν το ίδιο τούβλο ξεκινήσει χωρίς αρχική ταχύτητα να κινηθεί στο ίδιο επίπεδο, πόση οριζόντια δύναμη πρέπει να του ασκηθεί για να διανύσει τα 4m σε 2s ; Δίνεται $m=0,2\text{kg}$

Απάντηση

A. Η κίνηση είναι ομαλά επιβραδυνόμενη. Η μέγιστη μετατόπιση δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta x = \frac{v_0^2}{2|a|} \rightarrow |a| = \frac{v_0^2}{2\Delta x} = \frac{20^2 \text{m}^2/\text{s}^2}{2 \cdot 40\text{m}} \rightarrow |a| = 5\text{m/s}^2 \text{ Άρα } a = -5\text{m/s}^2$$

B. $\Sigma F_y = 0 \rightarrow N - mg = 0 \rightarrow N = mg$

$$\Sigma F = ma \rightarrow -T = ma \rightarrow -\mu N = ma \rightarrow -\mu mg = ma \rightarrow -\mu g = a \rightarrow -\mu \cdot 10\text{m/s}^2 = -5\text{m/s}^2 \rightarrow \mu = 0,5$$

Γ. Για να σταματήσει χρειάζεται χρόνο $t = t_{\text{stop}}$, όπου:

$$v = v_0 - |a|t \rightarrow 0 = v_0 - |a|t \rightarrow t = v_0/|a| \rightarrow t_{\text{stop}} = 4\text{s}.$$

Άρα το τελευταίο δευτερόλεπτο διαρκεί από $t_1=3\text{s}$ έως $t_2=4\text{s}$

$$\text{Στα } t_1=3\text{s} \text{ έχει διανύσει συνολική απόσταση: } x_1 = v_0 t_1 - \frac{1}{2}|a|t_1^2 \rightarrow x_1 = 37,5\text{m}$$

$$\text{Στα } t_2=4\text{s} \text{ έχει διανύσει συνολική απόσταση } x_2 = v_0 t_2 - \frac{1}{2}|a|t_2^2 \rightarrow x_2 = 40\text{m}$$

$$\text{Άρα από } t_1 \text{ έως } t_2 \text{ έχει διανύσει απόσταση } \Delta x = x_2 - x_1 = 2,5\text{m}$$

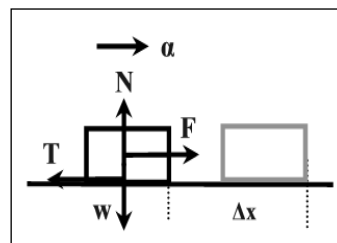
Δ. Αν είναι $\Delta x=4\text{m}$ και $\Delta t=2\text{s}$ τότε η επιτάχυνση a' υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta x = \frac{a' t^2}{2} \rightarrow a' = \frac{2\Delta x}{t^2} \rightarrow a' = 2\text{m/s}^2$$

$$\text{Η τριβή είναι } T = \mu N = \mu mg = 0,5 \cdot 0,2\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 \rightarrow T = 1\text{N}$$

$$\Sigma F = ma' \rightarrow F - T = ma' \rightarrow F = ma' + T = 0,2\text{kg} \cdot 2\text{m/s}^2 + 1\text{N} \rightarrow$$

$$\mathbf{F = 1,4N}$$



Α.2.2 Το σώμα του σχήματος ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και έχει μάζα $m=6\text{kg}$. Δίνεται η δύναμη $F_1=40\text{N}$ και γνωρίζουμε για τη γωνία ότι $\eta\mu\theta=0,8$ και $\sigma\upsilon\nu\theta=0,6$.

A. Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης F_2 .

B. Να υπολογιστεί η κάθετη δύναμη στήριξης N του εδάφους.

Μειώνουμε τη δύναμη F_2 σε $F_2'=12\text{N}$ οπότε το σώμα μπαίνει σε κίνηση.

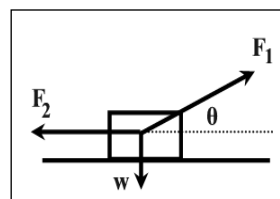
Να υπολογιστούν

Γ. η επιτάχυνση και

Δ. το διάστημα που διένυσε μέχρι η ταχύτητά του να γίνει $v_1=20\text{m/s}$.

Ε. οι τιμές της δύναμης F_1 ώστε το σώμα να χάνει την επαφή του με το πάτωμα.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$



Απάντηση

A. Αναλύουμε τη δύναμη F_1 σε οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα, $F_{1x}=F_1\sigma\upsilon\nu\theta=24\text{N}$ και $F_{1y}=F_1\eta\mu\theta=32\text{N}$

Αφού το σώμα ισορροπεί ισχύουν:

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow F_{1x}-F_2=0 \rightarrow F_2=F_1\sigma\upsilon\nu\theta \rightarrow \mathbf{F_2=24N}$$

B. Από την ισορροπία στον άξονα y :

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow F_{1y}+N-w=0 \rightarrow N=mg-F_1\eta\mu\theta \rightarrow N=60\text{N}-32\text{N} \rightarrow \mathbf{N=28N}$$

Γ. Αφού το σώμα τώρα επιταχύνεται ισχύει ο 2^{ος} νόμος:

$$\Sigma F_x=ma \rightarrow F_{1x}-F_2'=ma \rightarrow F_1\sigma\upsilon\nu\theta-F_2'=ma \rightarrow 24\text{N}-12\text{N}=6a \rightarrow \mathbf{a=2\text{m/s}^2}$$

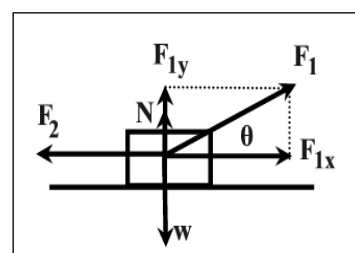
Δ. Από τις εξισώσεις κίνησης: $v_1=at \rightarrow t=\frac{v_1}{a} \rightarrow t=10\text{s}$

$$s=\frac{at^2}{2} \rightarrow s=\frac{2\text{m/s}^2 \cdot 10^2\text{s}^2}{2} \rightarrow \mathbf{s=100\text{m}}$$

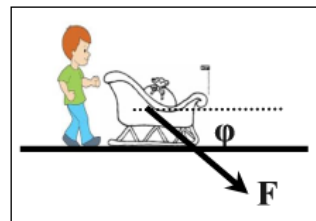
Ε. Για να χαθεί η επαφή με το πάτωμα πρέπει το σώμα να ανασηκωθεί και για να γίνει αυτό πρέπει να μηδενιστεί η δύναμη στήριξης, N . Για να βρούμε την ελάχιστη τιμή της F_1 θέτουμε στην εξίσωση $\Sigma F_y=0$, ως $N=0$.

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow F_{1y}+N-w=0 \rightarrow N=mg-F_1\eta\mu\theta \rightarrow 0=60\text{N}-0,8F_{1\epsilon\lambda}=0 \rightarrow \mathbf{F_{1,\epsilon\lambda}=75\text{N}}$$

Προφανώς οι τιμές της F_1 για να χάνεται η επαφή είναι $\mathbf{F_1 \geq 75\text{N}}$.



Α.2.3 Έλκθηρο μάζας $m=10\text{kg}$ ηρεμεί πάνω σε οριζόντια επιφάνεια πάγου με την οποία παρουσιάζει τριβές με συντελεστή τριβής $\mu=0,2$. Ένα παιδί του ασκεί, δύναμη μέτρου $F=100\text{N}$, που σχηματίζει γωνία ϕ με το οριζόντιο επίπεδο για χρονικό διάστημα $\Delta t=10\text{s}$. Αμέσως μετά τα 10s , το αφήνει ελεύθερο και το έλκθηρο κινείται χωρίς την επίδραση της δύναμης F . Να υπολογιστούν



A. Η τριβή με την επιφάνεια του πάγου μέχρι τα 10s .

B. Η ταχύτητα του ελκθήρου στα 10s .

Γ. Η συνολική μετατόπιση του ελκθήρου μέχρι να σταματήσει.

Δίνονται $\eta\mu\phi=0,8$, $\sigma\upsilon\nu\phi=0,6$ και $g=10\text{m/s}^2$.

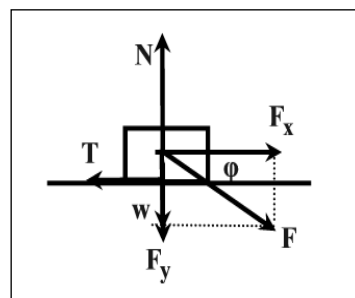
Απάντηση

A. Σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις και αναλύουμε την πλάγια F σε άξονες x και y . Υπολογίζουμε τις συνιστώσες:

$$F_x = F \sigma\upsilon\nu\theta = 60\text{N} \text{ και } F_y = F \cdot \eta\mu\theta = 80\text{N}$$

Από την ισορροπία στον άξονα y :

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N_1 - mg - F_y = 0 \rightarrow N_1 = 100\text{N} + 80\text{N} \rightarrow N_1 = 180\text{N}$$



Άρα η τριβή είναι $T_1 = \mu N_1 = 0,2 \cdot 180\text{N} \rightarrow \mathbf{T=36\text{N}}$

B. Για την επιτάχυνση a_1 .

$$\Sigma F_x = ma_1 \rightarrow F_x - T_1 = ma_1 \rightarrow 60\text{N} - 36\text{N} = 10a_1 \rightarrow a_1 = 2,4\text{m/s}^2$$

$$v_1 = a_1 \Delta t \rightarrow v_1 = 2,4\text{m/s}^2 \cdot 10\text{s} \rightarrow \mathbf{v_1=24\text{m/s}}$$

$$s_1 = \frac{a_1 t^2}{2} \rightarrow s = \frac{2,4\text{m/s}^2 \cdot 10^2\text{s}^2}{2} \rightarrow \mathbf{s_1=120\text{m}}$$

Γ. Όταν μηδενίζεται η δύναμη F , τότε το έλκθηρο κινείται μόνο με την επίδραση της τριβής που τώρα είναι διαφορετική:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N_2 - mg = 0 \rightarrow N_2 = mg = 100\text{N}$$

$$T_2 = \mu N_2 = \mu mg \rightarrow T_2 = 0,2 \cdot 100\text{N} \rightarrow T_2 = 20\text{N}$$

Το έλκθηρο επιβραδύνεται διότι:

$$\Sigma F_x = ma_2 \rightarrow -T_2 = ma_2 \rightarrow a_2 = -2\text{m/s}^2$$

Τη χρονική στιγμή $t_1=10\text{s}$ που αρχίζει η επιβράδυνση το σώμα έχει ταχύτητα $v_1=24\text{m/s}$ και μέχρι να σταματήσει διανύει διάστημα s_2

$$s_2 = \frac{v_1^2}{2|a_2|} = \frac{24^2\text{m}^2/\text{s}^2}{2 \cdot 2\text{m/s}^2} \rightarrow \mathbf{s_2=144\text{m}}$$

Άρα το συνολικό διάστημα που διένυσε το έλκθηρο πάνω στον πάγο μέχρι να σταματήσει λόγω τριβών είναι:

$$s = s_1 + s_2 = 120\text{m} + 144\text{m} \rightarrow \mathbf{s=264\text{m}}$$

Σημ. Η πλάγια προς τα κάτω δύναμη αυξάνει την τριβή και δυσκολεύει τη μετατόπιση.

Α.2.4 Τα δύο σώματα Σ_1 , Σ_2 με μάζες $m_1=m_2=4\text{kg}$ συνδέονται με νήμα μέσω αβαρούς τροχαλίας η οποία δεν στρέφεται. Μεταξύ οριζοντίου επιπέδου και σώματος Σ_2 ο συντελεστής τριβής είναι $\mu=0,2$. Το σώμα Σ_2 δέχεται σταθερή δύναμη F_2 και επιταχύνεται από την ηρεμία ($t_0=0$) με φορά προς τα αριστερά, έτσι ώστε να διανύσει απόσταση 2m σε 2s .

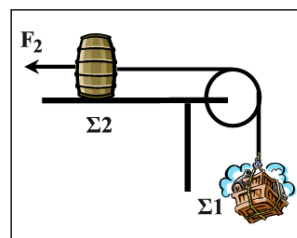
Να υπολογιστούν:

A. Η επιτάχυνση του σώματος Σ_1 .

B. Το μέτρο της εξωτερικής δύναμης F_2 .

Γ. Η τάση του νήματος, F .

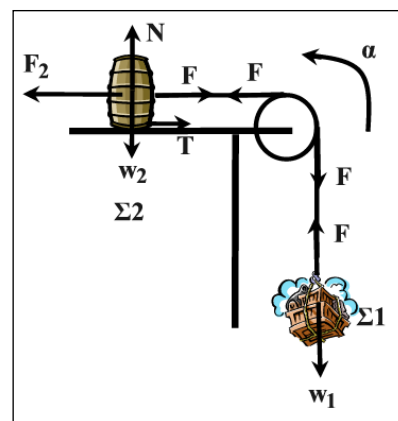
Δ. Όπως το σύστημα κινείται τη χρονική στιγμή $t=2\text{s}$ κόβεται το νήμα. Πόσα ακόμα μέτρα διανύει κατακόρυφα το Σ_1 μέχρι να σταματήσει στιγμιαία;



Απάντηση

A. Το νήμα είναι τεντωμένο άρα το σύστημα κινείται με κοινή επιτάχυνση a . Η τάση του νήματος, F είναι ίδια σε όλο το μήκος του νήματος, αφού η τροχαλία δεν στρέφεται. Η επιτάχυνση του συστήματος υπολογίζεται από τη μετατόπιση του σώματος Σ_2 που είναι ίδια με αυτή του Σ_1 και το χρόνο t .

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 \rightarrow a = \frac{2\Delta x}{t^2} \rightarrow \mathbf{a=1\text{m/s}^2}$$



B. Για να υπολογίσουμε τις δυνάμεις εφαρμόζουμε τους νόμους Newton

$$\text{Για το } \Sigma 1: \quad \Sigma F_1 = m_1 a \rightarrow F - m_1 g = m_1 a \quad (1)$$

$$\text{Για το } \Sigma 2: \quad \Sigma F = m_2 \cdot a \rightarrow F_2 - F - T = m_2 \cdot a \quad (2)$$

$$\Sigma F_{2y} = 0 \rightarrow N - w_2 = 0 \rightarrow N = m_2 g = 40\text{N}$$

$$\text{Άρα η τριβή είναι: } T = \mu N \rightarrow T = \mu \cdot m_2 g \rightarrow T = 0,2 \cdot 40\text{N} \rightarrow \mathbf{T=8\text{N}} \quad (3)$$

$$\text{Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2)} \rightarrow F - m_1 g = m_1 a \quad (1)$$

$$\underline{F_2 - F - T = m_2 \cdot a} + (2)$$

$$F - m_1 g + F_2 - F - T = (m_1 + m_2) a \rightarrow F_2 = m_1 g + T + (m_1 + m_2) a \rightarrow F_2 = 40\text{N} + 8\text{N} + 8\text{N} \rightarrow \mathbf{F_2=56\text{N}}$$

Γ. Για την τάση του νήματος F πάμε στη σχέση (1) $\rightarrow$

$$F = m_1 g + m_1 a \rightarrow F = 40\text{N} + 4\text{N} \rightarrow \mathbf{F=44\text{N}}$$

Δ. Τη χρονική στιγμή $t=2\text{s}$ το Σ_1 έχει ταχύτητα $v_1 = at = 2\text{m/s}$. Αν κοπεί το νήμα το σώμα κάνει κατακόρυφη βολή προς τα πάνω μόνο με την επίδραση του βάρους του και με επιβράδυνση μέτρου $g=10\text{m/s}^2$. Το μέγιστο ύψος πάνω από το σημείο που άρχισε η βολή είναι

$$\Delta y_{\text{stop}} = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{2^2 \text{m}^2/\text{s}^2}{20\text{m/s}^2} = \Delta y_{\text{stop}} = \mathbf{0,2\text{m}}$$

Α.2.5 Δύο σώματα Σ_1, Σ_2 με μάζες $m_1=3\text{kg}$ και $m_2=2\text{kg}$ συνδέονται με νήμα μέσω αβαρούς και λείας τροχαλίας η οποία δεν στρέφεται. Αρχικά ($t_0=0$) βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Αν το σύστημα αφεθεί ελεύθερο να υπολογιστούν :

A. Το μέτρο της επιτάχυνσης των σωμάτων.

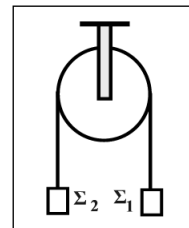
B. Η δύναμη που ασκεί το νήμα σε κάθε σώμα.

Γ. Οι ταχύτητες των σωμάτων μετά από 2s

Δ. Η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των σωμάτων μετά από 2s.

Ε. Αν η τροχαλία έχει βάρος $w=20\text{N}$ πόση δύναμη ασκεί ο άξονας στήριξης στο κέντρο της τροχαλίας;

Οι τριβές να θεωρηθούν αμελητέες και το $g=10\text{m/s}^2$.



Απάντηση

A. Το σύστημα περιστρέφεται δεξιόστροφα αφού το $w_1 > w_2$. Η επιτάχυνση των σωμάτων έχει το ίδιο μέτρο αφού το νήμα είναι συνεχώς τεντωμένο και η τάση του νήματος είναι σε όλο το μήκος F αφού η τροχαλία δε στρέφεται.

Το Σ_1 κατεβαίνει με a : $m_1g - F = m_1a$ (1)

Το Σ_2 ανεβαίνει με a : $F - m_2g = m_2a$ (2)

$$\text{Από (1)+(2)} \rightarrow m_1g - F + F - m_2g = (m_1 + m_2)a \rightarrow a = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \rightarrow a = 2\text{m/s}^2$$

B. Από (2) $\rightarrow F = m_2g + m_2a \rightarrow F = 24\text{N}$

Γ. $v = at = 2\text{m/s}^2 \cdot 2\text{s} \rightarrow v = 4\text{m/s}$

Δ. Το Σ_1 κατεβαίνει κατά: $y = \frac{at^2}{2} \rightarrow y = 4\text{m}$

Το Σ_2 ανεβαίνει κατά: $y = \frac{at^2}{2} \rightarrow y = 4\text{m}$ (χωρίς να φτάνει στην τροχαλία)

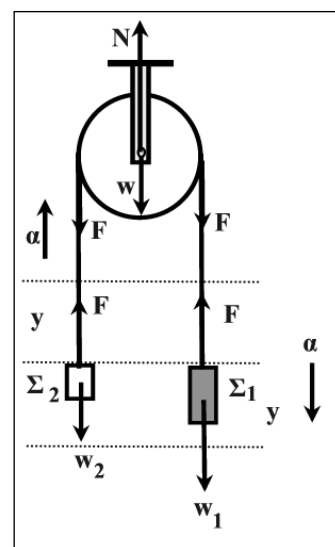
Συνεπώς στα $t=2\text{s}$ η κατακόρυφη απόσταση των δύο σωμάτων θα είναι $d = 2y = 8\text{m}$.

Ε. Η τροχαλία ισορροπεί ενώ δέχεται προς τα κάτω, το βάρος της $w=20\text{N}$ και τις δύο τάσεις των νημάτων η κάθε μια από $F=24\text{N}$ και προς τα πάνω τη ζητούμενη δύναμη στήριξης από τον άξονα, N .

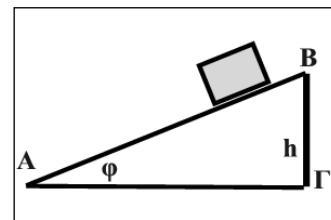
$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N - (F + F + w) = 0 \rightarrow N = 2F + w \rightarrow N = 2 \cdot 24\text{N} + 20\text{N} \rightarrow$$

$$N = 68\text{N}$$

Σημ. Η τροχαλία θα περιστραφεί προς τη φορά που θέλει το βαρύτερο σώμα. Αν τα σώματα έχουν την ίδια μάζα δεν θα περιστραφεί.



Α.2.6 Σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ αφήνεται να ολισθήσει, χωρίς αρχική ταχύτητα, από την κορυφή Β κεκλιμένου επιπέδου μήκους $AB=s=100\text{m}$. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και κεκλιμένου επιπέδου είναι $\mu = 0,5$.



Α. Να υπολογιστεί η επιτάχυνση του σώματος.

Β. Να υπολογιστεί η ταχύτητα με την οποία φτάνει στο σημείο Α.

Γ. Να υπολογιστεί το μέτρο και η φορά μιας δύναμης F που πρέπει να ασκείται στο σώμα παράλληλα προς το κεκλιμένο ώστε να επιταχύνεται προς τα κάτω με $a_1=5\text{m/s}^2$.

Δ. Να υπολογιστεί το μέτρο και η φορά μιας δύναμης F που πρέπει να ασκείται στο σώμα παράλληλα προς το κεκλιμένο ώστε να κατεβαίνει με σταθερή ταχύτητα

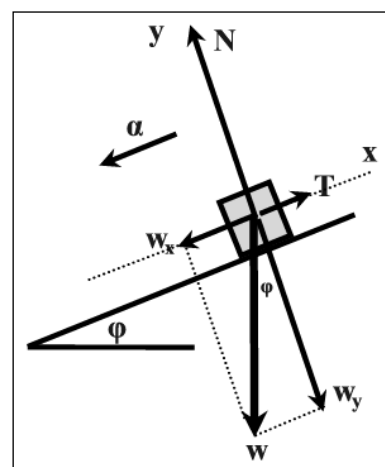
Δίνονται $\eta\mu\phi=0,6$, $\sigma\upsilon\nu\phi=0,8$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση

Α. Όταν δουλεύουμε σε ένα σώμα που κινείται ή ισορροπεί σε κεκλιμένο επίπεδο επιλέγουμε σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων ως άξονα x τον παράλληλο προς το κεκλιμένο και ως y τον κάθετο σε αυτόν. Αναλύουμε το w σε συνιστώσες

$$w_x = w\eta\mu\phi = mg\eta\mu\phi \text{ και } w_y = w\sigma\upsilon\nu\phi = mg\sigma\upsilon\nu\phi$$

Το σώμα ολισθαίνει επιταχυνόμενο προς τα κάτω και δέχεται εκτός από το βάρος w , τη δύναμη στήριξης N και την τριβή ολίσθησης T . Από τη συνθήκη ισορροπίας στον άξονα y :



$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N - w_y = 0 \rightarrow N = mg\sigma\upsilon\nu\phi \quad (1)$$

$$\text{Η τριβή ολίσθησης είναι: } T = \mu \cdot N = \mu \cdot mg\sigma\upsilon\nu\phi \rightarrow T = 8\text{N} \quad (2)$$

Από το 2^ο νόμο στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = ma \rightarrow w_x - T = ma \rightarrow mg\eta\mu\phi - T = ma \rightarrow mg\eta\mu\phi - \mu mg\sigma\upsilon\nu\phi = ma \rightarrow a = g\eta\mu\phi - \mu g\sigma\upsilon\nu\phi \rightarrow a = 10 \cdot 0,6 \text{m/s}^2 - 0,5 \cdot 10 \cdot 0,8 \text{m/s}^2 \rightarrow a = 2 \text{m/s}^2$$

$$\text{Β. } \Delta x = (BA) = s = \frac{at^2}{2} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}} \rightarrow t = 10\text{s}$$

$$\text{Άρα } v = at \rightarrow v = 2 \text{m/s}^2 \cdot 10\text{s} \rightarrow v = 20 \text{m/s}$$

Γ. Για να κατεβαίνει με επιτάχυνση $a_1 = 5\text{m/s}^2 > 2\text{m/s}^2$ θα πρέπει η δύναμη F να έχει φορά προς τα κάτω. Συνεπώς:

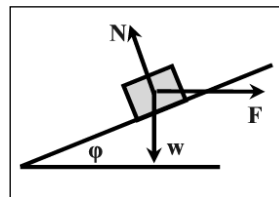
$$\Sigma F_x = ma \rightarrow F + w_x - T = ma_1 \rightarrow F + mg\eta\mu\phi - T = ma_1 \rightarrow F = ma_1 + T - mg\eta\mu\phi \rightarrow F = 10\text{N} + 8\text{N} - 12\text{N} \rightarrow$$

$$F = 6\text{N}$$

Δ. Για να κατεβαίνει με σταθερή ταχύτητα, πρέπει $a_2 = 0$ και η δύναμη F_2 να έχει φορά προς τα πάνω.

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow w_x - T - F_2 = 0 \rightarrow mg\eta\mu\phi - T - F_2 = 0 \rightarrow F_2 = mg\eta\mu\phi - T = 12\text{N} - 8\text{N} \rightarrow F_2 = 4\text{N}$$

Δ.2.7 Το φορτίο μάζας $m=10\text{kg}$ που φαίνεται στο σχήμα ολισθαίνει προς τα πάνω υπό την επίδραση της οριζόντιας δύναμης $F=100\text{N}$. Το χρονική στιγμή $t_0=0$ έχει $v_0=1,5\text{m/s}$. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ βάσης φορτίου και κεκλιμένου επιπέδου είναι $\mu = 0,1$, η γωνία κλίσης φ έχει $\eta\mu\varphi=0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi=0,8$ και το $g=10\text{m/s}^2$.



A. Να βρεθεί η επιτάχυνση του φορτίου.

B. Να βρεθεί η χρονική στιγμή που το φορτίο θα έχει διανύσει διάστημα $s=15\text{m}$.

Γ. Αν τη χρονική στιγμή $t=5\text{s}$ μηδενιστεί η δύναμη F ακαριαία, πόσα ακόμα μέτρα πέρα των 15m θα διανύσει το φορτίο μέχρι να σταματήσει;

Απάντηση

A. Αναλύουμε το w και τη δύναμη F σε συνιστώσες και πάλι στους άξονες x και y που φαίνονται στο σχήμα

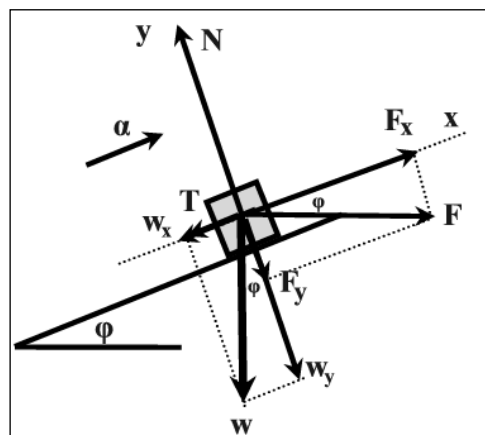
$$w_x = w\eta\mu\varphi = mg\eta\mu\varphi \text{ και } w_y = w\sigma\upsilon\nu\varphi = mg\sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$F_x = F\sigma\upsilon\nu\varphi \text{ και } F_y = F\eta\mu\varphi$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N - w_y - F_y = 0 \rightarrow N = mg\sigma\upsilon\nu\varphi + F\eta\mu\varphi \quad (1)$$

Η τριβή ολίσθησης είναι:

$$T = \mu \cdot N = \mu \cdot (mg\sigma\upsilon\nu\varphi + F\eta\mu\varphi) \rightarrow T = 14\text{N} \quad (2)$$



Από το 2^ο νόμο στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = ma \rightarrow F_x - w_x - T = ma \rightarrow F\sigma\upsilon\nu\varphi - mg\eta\mu\varphi - T = ma \rightarrow a = \frac{F\sigma\upsilon\nu\varphi - mg\eta\mu\varphi - T}{m} \rightarrow a = 0,6\text{m/s}^2$$

B. Από την εξίσωση κίνησης της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης με αρχική ταχύτητα $v_0=1,5\text{m/s}$ και $s=15\text{m}$

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} \rightarrow 15 = 1,5t - 0,3t^2 \rightarrow t^2 - 5t - 50 = 0 \quad (3)$$

Λύνουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση που έχει διακρίνουσα $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-50) = 225$

$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{-5 \pm 15}{2} \rightarrow t = 5\text{s}.$$

Γ. Στα $t=5\text{s}$ έχει ταχύτητα $v_1 = v_0 + at \rightarrow v_1 = 4,5\text{m/s}$

Λόγω του βάρους και της τριβής το σώμα θα αρχίσει να επιβραδύνεται αλλά η τριβή τώρα θα είναι διαφορετική γιατί αλλάζει και η κάθετη δύναμη, γίνεται $N_1 = mg\sigma\upsilon\nu\varphi$. Άρα $T_1 = \mu mg\sigma\upsilon\nu\varphi \rightarrow T_1 = 8\text{N}$

$$\Sigma F_x = ma_1 \rightarrow -w_x - T_1 = ma_1 \rightarrow -mg\eta\mu\varphi - T_1 = ma_1 \rightarrow a_1 = \frac{-mg\eta\mu\varphi - T_1}{m} \rightarrow a_1 = -6,8\text{m/s}^2$$

Άρα το σώμα επιβραδύνεται με επιβράδυνση μέτρου $|a_1| = 6,8\text{m/s}^2$. Μέχρι να σταματήσει θα διανύσει επιβραδυνόμενο ακόμα:

$$s_1 = \Delta x_{\text{stop}} = \frac{v_1^2}{2a_1} = \frac{4,5^2\text{m}^2/\text{s}^2}{2 \cdot 6,8\text{m/s}^2} \rightarrow s_1 = 1,49\text{m}$$

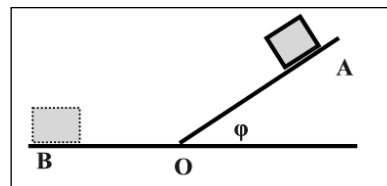
Α.2.8 Το πακέτο μάζας m αφήνεται με $v_0=0$ τη χρονική στιγμή $t_0=0$ από το σημείο Α ($x_A=0$) κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης φ και αφού διανύσει απόσταση $(AO)=\Delta x_1=9\text{m}$ εισέρχεται σε οριζόντιο επίπεδο και λόγω τριβών σταματάει στο σημείο Β. Το πακέτο παρουσιάζει τριβές τόσο με το κεκλιμένο όσο και με το οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή τριβής $\mu=0,5$. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$, $\eta\mu\varphi=0,6$ και $\sigma\eta\nu\varphi=0,8$.

Α. Να βρείτε την ταχύτητα v_1 με την οποία φτάνει στο σημείο Ο.

Β. Να βρείτε το συνολικό διάστημα που διανύει μέχρι να σταματήσει.

Γ. Να βρείτε το συνολικό χρόνο κίνησης.

Δ. Να κάνετε τα διαγράμματα $(v-t)$ και $(x-t)$, για όλη τη διάρκεια της κίνησης.



Απάντηση

Α. Για την επιταχυνόμενη κίνηση στο κεκλιμένο:

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow mg\sigma\eta\nu\varphi - N_1=0 \rightarrow N_1=mg\sigma\eta\nu\varphi$$

$$\text{Η τριβή: } T_1=\mu N_1=\mu \cdot mg\sigma\eta\nu\varphi$$

$$\Sigma F_x=ma_1 \rightarrow w_x - T_1 = ma_1 \rightarrow mg\eta\mu\varphi - \mu \cdot mg\sigma\eta\nu\varphi = ma_1 \rightarrow$$

$$a_1=g\eta\mu\varphi - \mu g\sigma\eta\nu\varphi \rightarrow a_1=2\text{m/s}^2$$

$$\text{Ο χρόνος καθόδου } \Delta x_1 = \frac{a_1 \Delta t_1^2}{2} \rightarrow \Delta t_1 = \sqrt{\frac{2x_1}{a_1}} \rightarrow \Delta t_1=3\text{s}$$

$$\text{Η ταχύτητα στο Ο: } v_1=a_1\Delta t_1 \rightarrow v_1=6\text{m/s}$$

Β. Για την επιβραδυνόμενη κίνηση στο οριζόντιο επίπεδο:

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow mg - N_2=0 \rightarrow N_2=mg$$

$$\text{Η τριβή: } T_2=\mu N_2=\mu \cdot mg$$

$$\Sigma F_x=ma_2 \rightarrow -T_2 = ma_2 \rightarrow -\mu \cdot mg = ma_2 \rightarrow a_2=-\mu g \rightarrow a_2=-5\text{m/s}^2$$

Για να σταματήσει χρειάζεται χρονικό διάστημα Δt_2 όπου

$$v_{\text{τελ}}=v_1 - |a_2|\Delta t_2 \rightarrow 0 = v_1 - |a_2|\Delta t_2 \rightarrow \Delta t_2 = \frac{v_1}{|a_2|} \rightarrow \Delta t_2 = \frac{6\text{m/s}}{5\text{m/s}^2} \rightarrow$$

$$\Delta t_2=1,2\text{s}$$

$$\text{Και θα διανύσει διάστημα } \Delta x_2 = \frac{v_1^2}{2|a_2|} \rightarrow \Delta x_2 = \frac{6^2\text{m}^2/\text{s}^2}{2 \cdot 5\text{m/s}^2} \rightarrow$$

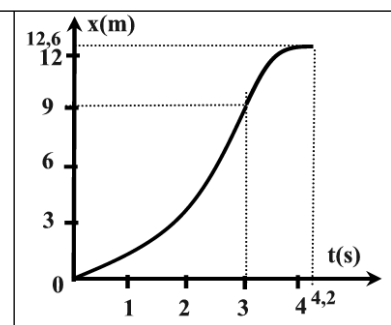
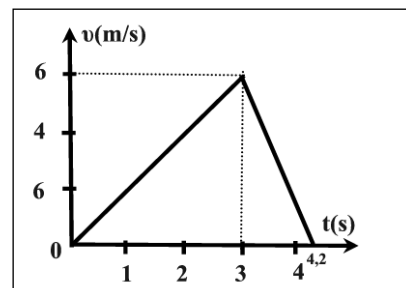
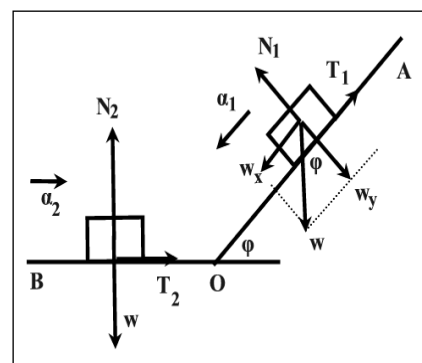
$$\Delta x_2=3,6\text{m}$$

$$\text{Άρα } \Delta x_{\text{ολ}}=\Delta x_1+\Delta x_2=9\text{m}+3,6\text{m} \rightarrow \Delta x_{\text{ολ}}=12,6\text{m}$$

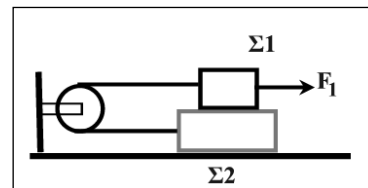
Γ. Ο συνολικός χρόνος κίνησης είναι:

$$\Delta t_{\text{ολ}}=\Delta t_1+\Delta t_2=3\text{s}+1,2\text{s} \rightarrow \Delta t_{\text{ολ}}=4,2\text{s}$$

Δ. Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στα σχήματα.



► **Δ.2.9** Το σύστημα των δύο σωμάτων Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1=2\text{kg}$ και $m_2=1\text{kg}$ επιταχύνεται υπό την επίδραση της δύναμης $F_1=40\text{N}$. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ των Σ_1 και Σ_2 είναι $\mu_1=0,1$ και μεταξύ του Σ_2 και του οριζοντίου επιπέδου $\mu_2=0,2$. Η τροχαλία δεν στρέφεται και είναι τελείως λεία. Να υπολογιστούν:



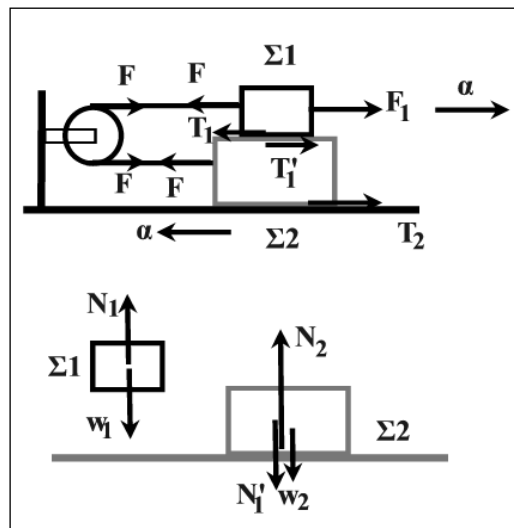
A. Η επιτάχυνση του συστήματος.

B. Η τάση του νήματος.

Απάντηση

A. Το Σ_1 δέχεται την κινούσα δύναμη $F_1=40\text{N}$ την τάση του νήματος F , την τριβή T_1 με το Σ_2 , το βάρος του $w_1=m_1g$ και την κάθετη δύναμη N_1 από το Σ_2 . Επιταχύνεται προς τα δεξιά με επιτάχυνση a .

Το Σ_2 δέχεται την τάση του νήματος F , την αντίδραση T_1' της τριβής T_1 από το Σ_1 ($T_1=T_1'$), την τριβή T_2 με το δάπεδο, το βάρος του $w_2=m_2g$, την κάθετη δύναμη στήριξης από το δάπεδο N_2 και την αντίδραση N_1' της N_1 . με $N_1'=N_1$. Επιταχύνεται προς τα αριστερά με την ίδια κατά μέτρο επιτάχυνση, a . Γιατί ίδια a ; Διότι το νήμα είναι τεντωμένο και ενιαίο και συνδεδεμένο με τα σώματα. Όλα τα σημεία του νήματος πρέπει να έχουν την ίδια κατά μέτρο επιτάχυνση αλλιώς θα είχε σπάσει. Επίσης η δύναμη του νήματος F είναι ίδια για όλα τα σημεία αφού η τροχαλία ισορροπεί (δεν στρέφεται).



Για το Σ_1 : $N_1 - w_1 = 0 \rightarrow N_1 = m_1g = 20\text{N}$

$T_1 = \mu_1 N_1 \rightarrow T_1 = 0,1 \cdot 20\text{N} \rightarrow T_1 = 2\text{N}$

$$\Sigma F_1 = m_1 a \rightarrow F_1 - F - T_1 = m_1 a \quad (1)$$

Για το Σ_2 : Η αντίδραση της τριβής T_1 : $T_1' = T_1 = 2\text{N}$

$N_2 - N_1' - w_2 = 0 \rightarrow N_2 = N_1 + m_2g \rightarrow N_2 = 20\text{N} + 10\text{N} \rightarrow N_2 = 30\text{N}$

Η τριβή με το πάτωμα: $T_2 = \mu_2 N_2 = 0,2 \cdot 30\text{N} \rightarrow T_2 = 6\text{N}$

$$\Sigma F_2 = m_2 a \rightarrow F - T_1' - T_2 = m_2 a \quad (2)$$

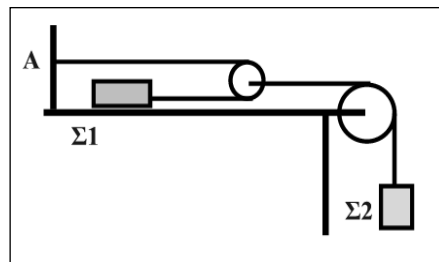
$$\begin{aligned} \text{Προσθέτω κατά μέλη τις (1)+(2)} &\rightarrow F_1 - F - T_1 = m_1 a \\ &+ F - T_1' - T_2 = m_2 a \end{aligned}$$

$$F_1 - F - T_1 + F - T_1' - T_2 = m_1 a + m_2 a \rightarrow F_1 - T_1 - T_1' - T_2 = (m_1 + m_2) a \rightarrow$$

$$\rightarrow 40\text{N} - 2\text{N} - 2\text{N} - 6\text{N} = (3\text{kg}) \cdot a \rightarrow 30\text{N} = (3\text{kg}) \cdot a \rightarrow a = 10\text{m/s}^2$$

B. Από την (1) $\rightarrow F_1 - F - T_1 = m_1 a \rightarrow F = F_1 - T_1 - m_1 a \rightarrow F = 40\text{N} - 2\text{N} - 20\text{N} \rightarrow F = 18\text{N}$

► **Δ.2.10** Το σώμα Σ_1 μάζας $m_1=5\text{kg}$ ολισθαίνει πάνω στο οριζόντιο επίπεδο με το οποίο ο συντελεστής τριβής είναι $\mu=0,1$. Το σώμα αυτό συνδέεται μέσω αβαρών νημάτων και αβαρών τροχαλιών με το σώμα Σ_2 μάζας $m_2=10\text{kg}$. Αν το σύστημα αφεθεί ελεύθερο να κινηθεί μετράμε πειραματικά με αισθητήρες ότι το σώμα Σ_2 πέφτει κατά $\Delta y=3\text{m}$ σε χρόνο $t=1\text{s}$. Να υπολογιστούν:



A. η τάση F_2 του νήματος που συνδέεται με το σώμα Σ_2 .

B. η δύναμη που δέχεται το σημείο A του τοίχου από το νήμα.

Γ. η επιτάχυνση του σώματος Σ_1 .

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$. Οι δύο τροχαλίες θεωρούνται αβαρείς (μηδενικές μάζες), με τελείως λείες εγχοπές και δεν στρέφονται.

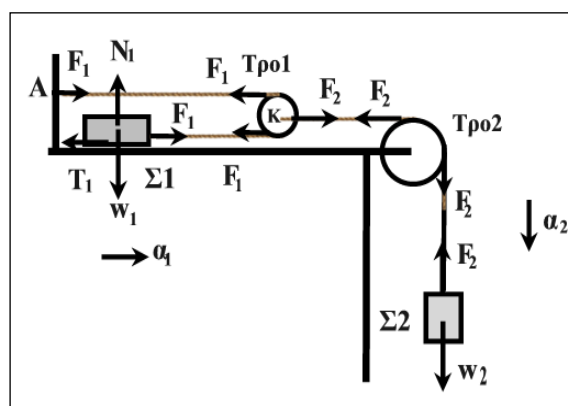
Απάντηση

A. Το σώμα Σ_2 πέφτει με επιτάχυνση a_2 υπό την επίδραση του $w_2=m_2g$ και της τάσης του νήματος F_2 . Από τη μέτρηση:

$$\Delta y = \frac{a_2 t^2}{2} \rightarrow a_2 = \frac{2\Delta y}{t^2} \rightarrow a_2 = 6\text{m/s}^2$$

$$\text{Άρα: } w_2 - F = m_2 a_2 \rightarrow F = m_2 g - m_2 a_2 \rightarrow F_2 = 40\text{N}$$

B. Αφού η τροχαλία «τρο2» δεν στρέφεται η τάση του νήματος F_2 μεταφέρεται η ίδια σε όλα τα σημεία του νήματος αυτού μέχρι το σημείο K που συνδέεται με το κέντρο της τροχαλίας «τρο1».



Το δεύτερο νήμα συνδέει το σώμα Σ_1 με το σημείο A του τοίχου μέσω της τροχαλίας «τρο1». Κατά μήκος και αυτού του νήματος η τάση θα είναι η ίδια ίση με F_1 . Επειδή η «τρο1» είναι αβαρής ($m_{\text{τρο}}=0$) αν και επιταχύνεται προς τα δεξιά θα ισχύει

$$\Sigma F_{K, \text{τρο}} = 0 \rightarrow F_2 - F_1 - F_1 = 0 \rightarrow F_2 = 2F_1 \rightarrow F_1 = \frac{F_2}{2} \rightarrow F_1 = 20\text{N}$$

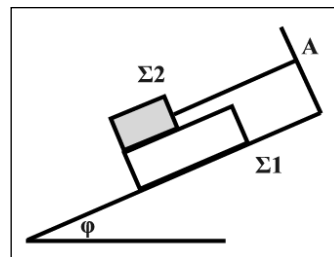
Συνεπώς και το σημείο του τοίχου A δέχεται τη δύναμη του νήματος δηλαδή δύναμη ίση με την $F_1=20\text{N}$.

Γ. Για το σώμα Σ_1 : $N_1 - m_1 g = 0 \rightarrow N_1 = m_1 g = 50\text{N}$

Η τριβή $T_1 = \mu N_1 \rightarrow T_1 = 0,1 \cdot 50\text{N} \rightarrow T_1 = 5\text{N}$

$$\Sigma F_1 = m_1 a_1 \rightarrow F_1 - T_1 = m_1 \cdot a_1 \rightarrow 20\text{N} - 5\text{N} = 5\text{kg} \cdot a_2 \rightarrow a_1 = 3\text{m/s}^2$$

► **Α.2.11** Τα δύο πρισματικά σώματα σχήματος ορθογωνίου, Σ_1, Σ_2 , έχουν μάζες m_1, m_2 και είναι τοποθετημένα πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα. Το Σ_2 συγκρατείται από το ακλόνητο σημείο Α με τη βοήθεια τεντωμένου νήματος. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο και το σώμα Σ_1 αρχίζει να ολισθαίνει προς τα κάτω με σταθερή και μικρή ταχύτητα. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης έχει την ίδια τιμή $\mu = \sqrt{3}/6$ τόσο για τις επιφάνειες επαφής των $\Sigma_1 - \Sigma_2$ όσο και των Σ_1 - κεκλιμένου επιπέδου. Δίνονται, $\varphi=30^\circ$ και $g=10\text{m/s}^2$.



A. Να υπολογιστεί ο λόγος των μαζών, m_1/m_2 .

B. Αν δίνεται ότι $m_2=2\text{kg}$ να υπολογιστεί η τάση του νήματος που κρατάει το σώμα Σ_2 , για όσο διάστημα τα δύο σώματα είναι σε επαφή.

Απάντηση

A. Πολλές δυνάμεις και στα δύο σώματα.

Ας δούμε πρώτα το Σ_1 που ολισθαίνει ανάμεσα στο κεκλιμένο και το Σ_2 που μένουν ακίνητα. Στον άξονα x (του κεκλιμένου) δέχεται τις δυνάμεις: Τη συνιστώσα του βάρους $w_{1x}=m_1g\sin\varphi$, την τριβή T_1 με το κεκλιμένο και την τριβή T_2' από το Σ_2 .

Το Σ_2 με τη σειρά στον άξονα x δέχεται τη συνιστώσα του βάρους του $w_{2x}=m_2g\sin\varphi$ την τριβή T_2 από το Σ_1 που θέλει να το συμπαρασύρει προς τα κάτω και την τάση του νήματος F .

Στον άξονα y : το Σ_2 δέχεται $N_2 - w_{2y} = 0 \rightarrow N_2 = m_2g\cos\varphi$ (1)

Το Σ_1 δέχεται τη δύναμη στήριξης από το επίπεδο N_1 , την w_{1y} και την $N_2' = N_2$ που είναι η αντίδραση της N_2 .

$N_1 - N_2' - w_{1y} = 0 \rightarrow N_1 = N_2 + m_1g\cos\varphi \rightarrow N_1 = m_1g\cos\varphi + m_2g\cos\varphi \rightarrow N_1 = (m_1 + m_2)g\cos\varphi$ (2)

Οι τριβές θα είναι:

$T_2 = \mu N_2 = \mu m_2g\cos\varphi = (\sqrt{3}/6)m_2g(\sqrt{3}/2) \rightarrow$

$$T_2 = \frac{m_2g}{4} \quad \text{και} \quad T_2' = T_2 = \frac{m_2g}{4}$$

$T_1 = \mu N_1 = \mu(m_1 + m_2)g\cos\varphi = (\sqrt{3}/6)(m_1 + m_2)g(\sqrt{3}/2) \rightarrow T_1 = \frac{(m_1 + m_2)g}{4}$

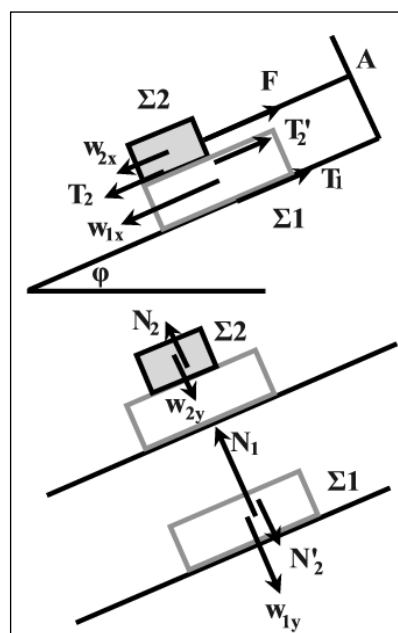
Το σώμα Σ_1 ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα άρα

$$\Sigma F_1 = 0 \rightarrow w_{1x} - T_1 - T_2' = 0 \rightarrow m_1g\sin\varphi - \frac{(m_1 + m_2)g}{4} - \frac{m_2g}{4} = 0 \rightarrow \frac{m_1g}{2} - \frac{(m_1 + m_2)g}{4} - \frac{m_2g}{4} = 0 \rightarrow$$

$$\frac{m_1}{2} - \frac{m_1 + m_2}{4} - \frac{m_2}{4} = 0 \rightarrow \frac{m_1}{4} - \frac{m_2}{2} = 0 \rightarrow m_1 = 2m_2 \rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 2$$

B. Αν $m_2=2\text{kg}$ τότε $m_1=4\text{kg}$. Γράφουμε συνθήκη ισορροπίας για το Σ_2 στον άξονα x .

$$\Sigma F_{2x} = 0 \rightarrow T_2 + w_{2y} - F = 0 \rightarrow F = T_2 + m_2g\sin\varphi \rightarrow F = \frac{m_2g}{4} + \frac{m_2g}{2} \rightarrow F = \frac{3m_2g}{4} \rightarrow F = 15\text{N}$$



Δ.2.12 Ο κύβος που φαίνεται στο σχήμα έχει μάζα $m=4\text{kg}$. Αρχικά ισορροπεί σε επαφή με τον κατακόρυφο τοίχο με τη βοήθεια οριζόντιας δύναμης F , χωρίς να ακουμπάει στο πάτωμα. Ο συντελεστής οριακής τριβής μεταξύ κύβου και τοίχου θεωρείται ίσος με τον συντελεστή τριβής ολίσθησης και είναι $\mu=\mu_0=0,4$.

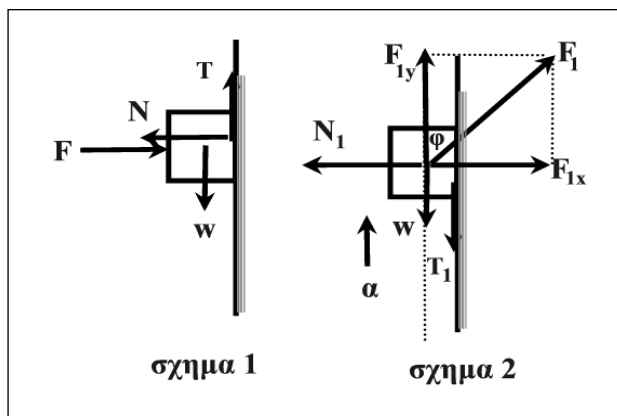
Α. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της δύναμης F ώστε ο κύβος να μένει ακίνητος;

Αλλάζουμε την κατεύθυνση της δύναμης F ώστε να σχηματίζει γωνία φ με τον κατακόρυφο τοίχο και δίνουμε στο μέτρο της τιμή F_1

Β. Πόση είναι η επιτάχυνση με την οποία ολισθαίνει ο κύβος πάνω στον τοίχο αν ξεκινάει από την ηρεμία και αποκτάει ταχύτητα 5m/s όταν διανύσει διάστημα $\Delta x=0,5\text{m}$;

Γ. Πόσο είναι το μέτρο της δύναμης F_1 ;

Δίνονται $g=10\text{m/s}^2$, $\eta\mu\varphi=0,8$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi=0,6$.



Απάντηση

Α. Ο κύβος δεν ολισθαίνει προς τα κάτω επειδή υπάρχει η στατική τριβή μεταξύ αυτού και του τοίχου. (σχήμα 1). Ισχύει ο 1^{ος} νόμος του Newton και στους δύο άξονες x και y .

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow F-N=0 \rightarrow F=N \quad (1)$$

$$T=\mu \cdot N \quad (2)$$

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow w-T=0 \rightarrow T=mg \quad (3)$$

Για να μην ολισθαίνει θα πρέπει η τριβή να μην ξεπερνά την οριακή τιμή της δηλαδή

$$T \leq T_{op} \rightarrow T \leq \mu_0 N \rightarrow mg \leq \mu_0 \cdot F \rightarrow F \geq \frac{mg}{\mu_0} \rightarrow F \geq 100\text{N}.$$

Άρα η ελάχιστη τιμή είναι $F_{\min}=100\text{N}$

Β. Από τις εξισώσεις κίνησης:

$$v=at \rightarrow t=\frac{v}{a} \quad \text{και}$$

$$x=\frac{at^2}{2} \rightarrow x=\frac{a \cdot v^2}{2a^2} \rightarrow x=\frac{v^2}{2a} \rightarrow a=\frac{v^2}{2x} \rightarrow a=25\text{m/s}^2$$

Γ. Ισορροπία στον άξονα x :

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow F_{1x}-N_1=0 \rightarrow N_1=F_1 \cdot \eta\mu\varphi \rightarrow N_1=0,8 \cdot F_1 \quad (4)$$

Η τριβή ολίσθησης:

$$T_1=\mu \cdot N_1 \rightarrow T_1=\mu \cdot 0,8F_1 \quad (5)$$

Η επιτάχυνση στον άξονα y :

$$\Sigma F_y=m \cdot a \rightarrow F_{1y}-w-T_1=m \cdot a \rightarrow F_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi - mg - \mu \cdot 0,8F_1=m \cdot a \rightarrow 0,6F_1-0,32F_1=mg+ma \rightarrow$$

$$0,28F_1=140\text{N} \rightarrow F_1=\frac{140\text{N}}{0,28} \rightarrow F_1=500\text{N}$$

