

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ τράπεζα 2025

1.

15037. Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x+3}$ και $g(x) = 3x-1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία των συναρτήσεων f, g .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

γ) i. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$.

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του i ερωτήματος.

2.

15066. Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα του.

ii. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του, τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του.

β) Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο αριθμό που να είναι ρίζα του.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

3.

15174. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^4 + x^3 + \alpha x - 4$ και $\delta(x) = x^2 - 3x + 2$.

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\delta(x)$, είναι το πολυώνυμο $\upsilon(x) = 24x - 24$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α .

β) Για $\alpha = 2$,

i. να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$.

ii. να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολωνυμικής συνάρτησης $P(x)$.

iii. να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες, η γραφική παράσταση της πολωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

4.

15250. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$ το οποίο διαιρούμενο με το $x^2 - 4$ δίνει υπόλοιπο $4x + 1$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - 4)$.

β) Να βρείτε τις τιμές των α και β .

γ) Έστω $\alpha = 4$ και $\beta = 5$. Αν το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$ είναι το $\pi(x) = x^3 - 1$, τότε:

i. να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$.

ii. να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 4x + 1$.

5.

15431.α) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 5$, με $x \in \mathbb{R}$.

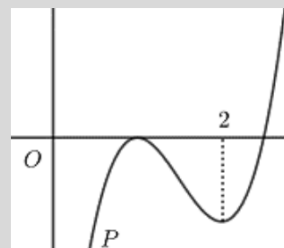
i. Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x-1)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $(x-2)$

είναι -1 , να δείξετε ότι:
$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases} \text{ και } \dots$$

ii. Να δείξετε ότι $\alpha = -9$ και $\beta = 12$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

γ) Αν η γραφική παράσταση της $P(x)$ είναι η διπλανή, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.



6.

15677. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των α, β , αν είναι γνωστό ότι το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x) = x^2 - 2x + 1$.

β) Για $\alpha = 4, \beta = -2$

i. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 + 5)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

ii. Αν $P(x) = (x^2 + 5)(x^2 - 2x - 6) + 14x + 28$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 14(x + 2)$.

7.

15960. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + kx - 1, k \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ για την οποία $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Για $k = 0$,

i. να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$.

ii. να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

8.

15790. Δίνονται οι συναρτήσεις

$f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ και $g(x) = -x^2 + 4$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-x) = f(x)$ και $g(-x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Στο διπλανό σχήμα δίνεται μέρος των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

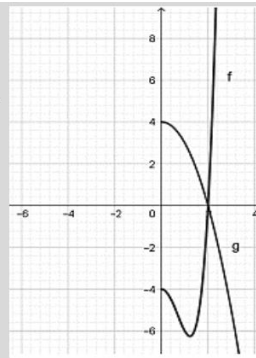
Αφού μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας, να συμπληρώσετε τις γραφικές παραστάσεις σε όλο το $\mathbb{R}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να λύσετε, αλγεβρικά ή γραφικά:

i. την εξίσωση $f(x) = g(x)$

ii. την ανίσωση $f(x) < g(x)$.



9.

17919. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής

παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x, x \in \mathbb{R}$ και η

ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A\left(1, -\frac{3}{4}\right)$ και $B(4, -3)$.

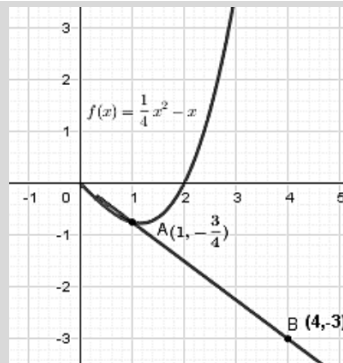
α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB .

β) i. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x < 0$.

γ) Αν η ευθεία AB έχει εξίσωση $y = -\frac{3}{4}x$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας με την

γραφική παράσταση της f .



10.

17925. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής

παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \alpha x^2, x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$

και το σημείο $A\left(-1, -\frac{3}{4}\right)$ αυτής.

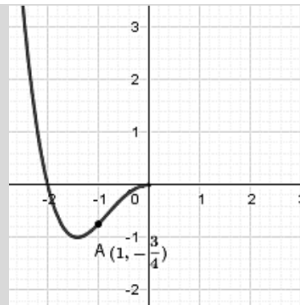
α) Να δείξετε ότι $\alpha = -1$.

β) Για $\alpha = -1$, i. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x > 0$.

γ) Αφού επιβεβαιώσετε ότι $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3}{4}$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο

θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας $y = -\frac{3}{4}x$ με την γραφική παράσταση της f .



11.

20859. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

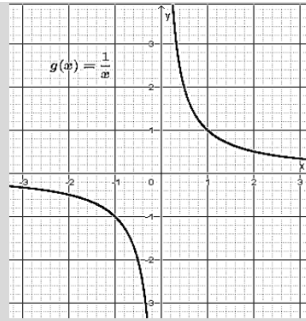
β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

γ) i. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

ii. Αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$g(x) = \frac{1}{x}$ είναι η παρακάτω, να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

δ) Να λύσετε την εξίσωση: $\left| \frac{1}{f(x)} \right| = 1$.



12.

22013. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

β) Να βρείτε δύο αριθμούς α, β τέτοιους ώστε: $x^4 + 1 = (x^2 + \alpha x + 1) \cdot (x^2 + \beta x + 1)$.

γ) Θεωρούμε την ακόλουθη πρόταση: «Κάθε πολυώνυμο που μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πολυωνύμων μικρότερου μη μηδενικού βαθμού, έχει πραγματικές ρίζες». Είναι η πρόταση αυτή Σωστή ή Λάθος; Αν η πρόταση είναι σωστή, να δώσετε απόδειξη. Αν η πρόταση είναι λάθος, να δώσετε αντιπαράδειγμα.

13.

15187. Για τη γωνία ω του διπλανού σχήματος ισχύει

$$5\eta\mu^3\omega - 8\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega + 6 = 0.$$

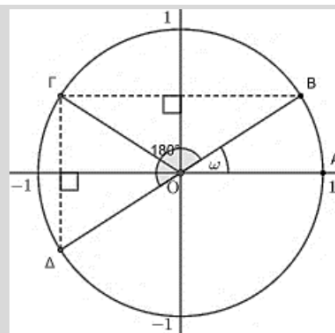
α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$.

β) Να βρείτε:

i. την τιμή του $\sigma\upsilon\nu\omega$,

ii. τις συντεταγμένες των σημείων B, Γ και Δ,

iii. το ημίτονο και το συνημίτονο των θετικών γωνιών AOB, AOG και AOD.



14.

18713. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - \alpha x^2 + 2x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν $P(1) = 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$ ισούται με 15,

α) Να δείξετε ότι $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$.

β) i. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $\pi(x) = x^2 + 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu^3 x + \sigma\upsilon\nu x = 1 - \frac{1}{2}\eta\mu^2 x$, $x \in (0, 2\pi)$.

15.

20647. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - \beta x + 3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό 2, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον ένας συντελεστής του δεν είναι ακέραιος.

Αν επιπλέον $P(1) = 0$, τότε:

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3$ και $\beta = \frac{21}{2}$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $P(\sigma\upsilon\nu x) = 0$.

16.

20731. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 6x^2 - 7$.

- α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $x-1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου
 β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(x)$ σε πολυώνυμα πρώτου ή δευτέρου βαθμού.
 γ) i. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
 ii. Αν οι αριθμοί -1 και 1 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$ να λύσετε την εξίσωση $(2\eta\mu x - 1)^4 + 6(2\eta\mu x - 1)^2 - 7 = 0$, για $x \in \mathbb{R}$.

17.

20752. Δύο συμμαθητές ο Αλέξανδρος και ο Φίλιππος που κάθονται στο ίδιο θρανίο σχεδιάζουν τον τριγωνομετρικό κύκλο σε μιλιμετρέ χαρτί και στη συνέχεια προσπαθώντας να υπολογίσουν τις συντεταγμένες ενός δοσμένου σημείου M αυτού του κύκλου διαφωνούν στην απάντησή τους. Ο Αλέξανδρος εκτιμά ότι οι συντεταγμένες του σημείου M είναι $M(0,8, 0,6)$ ενώ ο Φίλιππος εκτιμά ότι οι συντεταγμένες του είναι $M(1, 1)$.

- α) Ποιος από τους δύο έχει σίγουρα άδικο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 β) Αν υποθέσουμε ότι το σημείο του οποίου υπολογίστηκαν σωστά οι συντεταγμένες του είναι το $M(0,8, 0,6)$
 i. να αιτιολογήσετε ότι $\eta\mu\omega = 0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = 0,8$.
 ii. να υπολογίσετε την τιμή της παράσταση $A = \eta\mu(\pi - \omega) - 2\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} - \omega) + \epsilon\phi(-\omega) + \sigma\phi(\pi + \omega)$.
 γ) Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = 5\sigma\upsilon\nu\omega \cdot x^3 - 10\eta\mu\omega \cdot x^2 + 5x - 3$, $x \in \mathbb{R}$ όπου ω η γωνία που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

18.

20943. Δίνεται γωνία x με $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ και οι παραστάσεις:

$$A = \eta\mu^2(\pi - x) + \eta\mu^2(\pi + x) + \sigma\upsilon\nu^2(-x), \quad B = \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}.$$

- α) Να αποδείξετε ότι $A = \eta\mu^2 x + 1$.
 β) Να απλοποιήσετε την παράσταση B .
 γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x για την οποία οι παραστάσεις A και B να είναι ίσες.

19.

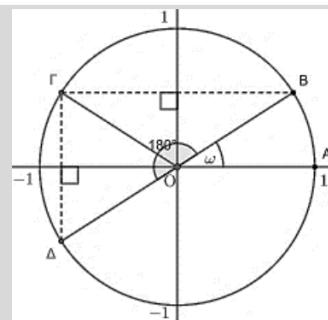
21240. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2$.

- α) Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου.
 β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.
 γ) Να λύσετε την ανίσωση $3\left(\frac{5}{x^2 + 1}\right)^3 + 4\left(\frac{5}{x^2 + 1}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{x^2 + 1}\right) - 2 > 0$.

20.

15187. Για τη γωνία ω του διπλανού σχήματος ισχύει $5\eta\mu^3\omega - 8\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega + 6 = 0$.

- α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$.
 β) Να βρείτε:
 i. την τιμή του $\sigma\upsilon\nu\omega$,
 ii. τις συντεταγμένες των σημείων B , Γ και Δ ,
 iii. το ημίτονο και το συνημίτονο των θετικών γωνιών $\angle AOB$, $\angle AOG$ και $\angle AOD$.



21.

18111. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{όταν } x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$ και

$$h(x) = x^3 - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- α) i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή.
 ii. Να συμπληρώσετε το παρακάτω σχήμα ώστε να παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h .
 iii. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε το παραπάνω σχήμα, να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h με τον άξονα $x'x$.
 β) Αν $x \geq 0$ να αποδείξετε ότι: η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από την ευθεία $\epsilon: y = x$ αν και μόνο αν η γραφική παράσταση της h βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

