

Η έννοια της συνάρτησης :

Ορισμός :

Συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B ονομάζεται μία διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται σε μοναδικό στοιχείο του B .

Πχ :

Η βαθμολογία 20 μαθητών στο μάθημα των μαθηματικών είναι συνάρτηση από το σύνολο A , που είναι το σύνολο των μαθητών στο σύνολο B , που είναι το σύνολο $\{1, 2, \dots, 20\}$

Όντως κάθε στοιχείο του συνόλου A , δηλαδή κάθε μαθητής αντιστοιχίζεται σε μοναδικό στοιχείο του συνόλου B αφού ο βαθμός που θα λάβει είναι μοναδικός.

1^{ος} μαθητής $\rightarrow 15$

2^{ος} μαθητής $\rightarrow 17$

3^{ος} μαθητής $\rightarrow 13$

...

20^{ος} μαθητής $\rightarrow 16$

Έστω μία συνάρτηση $f: A \rightarrow B$.

Τότε κάθε στοιχείο x του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα μοναδικό στοιχείο y του συνόλου B .

Δηλαδή : $x \xrightarrow{f} y$

Η μεταβλητή x λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή.

Η μεταβλητή $y = f(x)$ λέγεται εξαρτημένη (αφού εξαρτάται από το x) και λέγεται τιμή της συνάρτησης f στο x .

- Το σύνολο A λέγεται πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- Το σύνολο των τιμών $f(x)$ της συνάρτησης όπου το x ανήκει στο πεδίο ορισμού της f , λέγεται σύνολο τιμών της f , και συμβολίζεται με $f(A)$.
$$f(A) = \{y \in R / y = f(x), \dots \text{με} \dots x \in A\}$$

Παρατήρηση: μία συνάρτηση θεωρείται ορισμένη όταν είναι γνωστά:

-
- i) το πεδίο ορισμού
 - ii) ο τύπος $y = f(x)$ της συνάρτησης
-

Πχ :

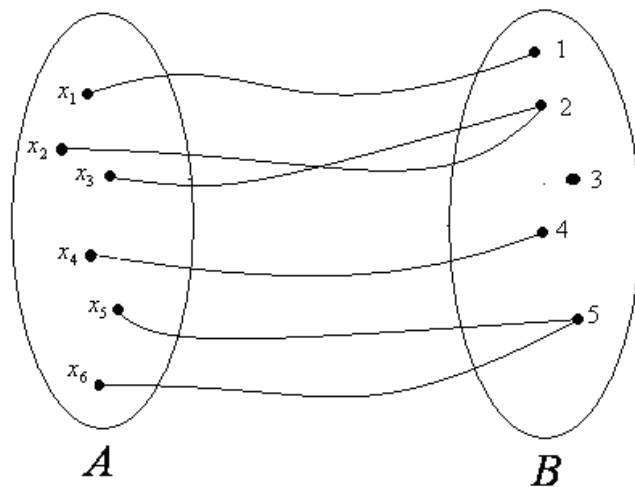
$$\text{Έστω } f(x) = \frac{1}{2x-1}$$

Το πεδίο ορισμού της είναι εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ορίζεται η παράσταση.

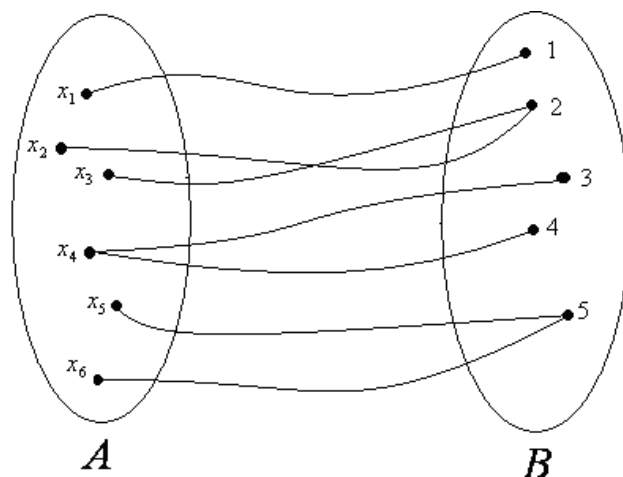
$$\text{Περιορισμοί : } 2x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα : } A = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

Ποια από τις παρακάτω αντιστοιχίσεις εκφράζει συνάρτηση;



Είναι συνάρτηση ;.....

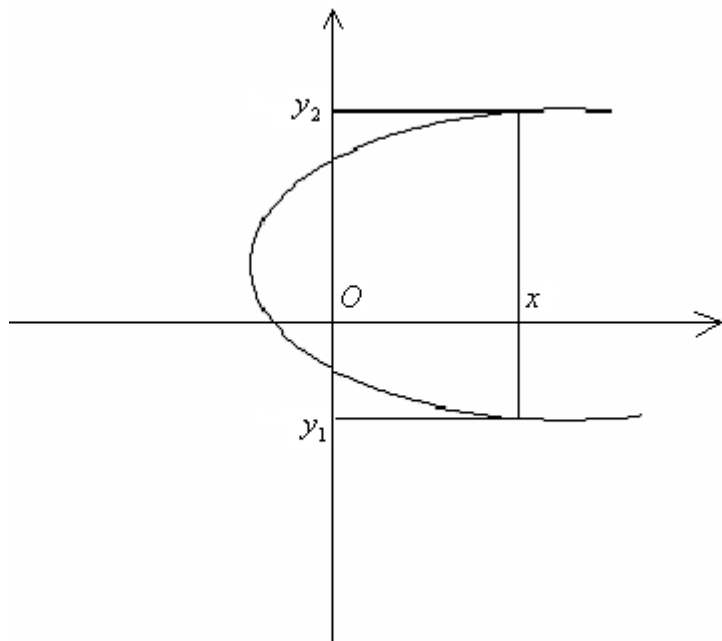


Είναι συνάρτηση ;.....

Σχόλιο:

Αφού σε κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται μοναδικό y κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε το πολύ ένα σημείο.

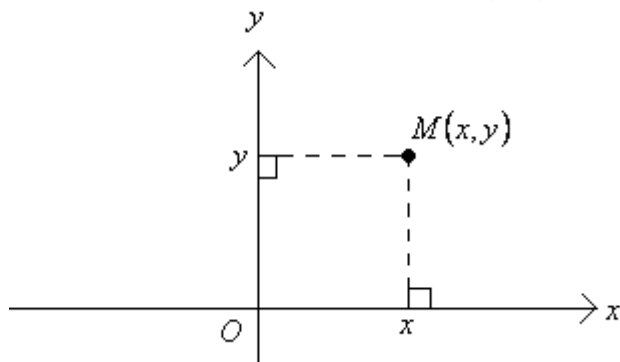
Δηλαδή μία απεικόνιση της παρακάτω μορφής δεν είναι συνάρτηση.



Σύστημα συντεταγμένων :

Θεωρούμε δύο άξονες x' και y' οι οποίοι τέμνονται κάθετως.

Σε **κάθε** σημείο του επιπέδου, το οποίο ονομάζεται «καρτεσιανό επίπεδο», αντιστοιχεί **μοναδικό** ζευγάρι τιμών (x, y) που είναι οι συντεταγμένες του.



x : η τετμημένη είναι η προβολή του σημείου M στον x' άξονα

y : η τεταγμένη είναι η προβολή του σημείου M στον y' άξονα

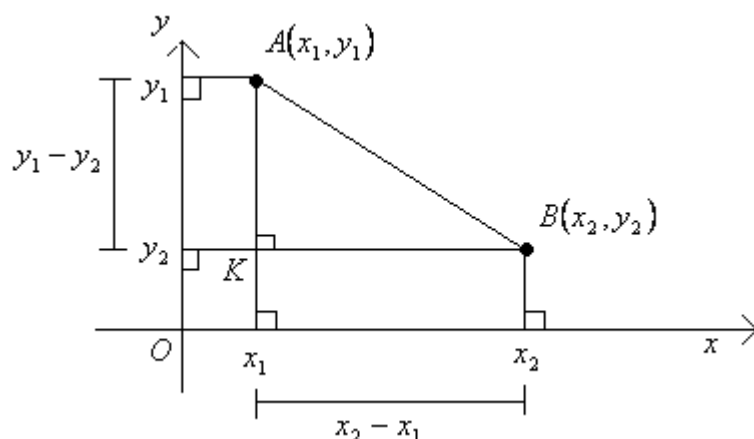
Απόσταση δύο σημείων :

Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου.

Η απόστασή τους, δηλαδή το μήκος του ευθ. τμήματος AB δίνεται από τον τύπο :

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Αποδείξη :



Το τρίγωνο AKB είναι ορθογώνιο άρα ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα.

$$(AB)^2 = (KB)^2 + (KA)^2$$

$$\left. \begin{array}{l} KB = x_2 - x_1 = |x_2 - x_1| \\ KA = y_1 - y_2 = |y_1 - y_2| \end{array} \right\} \text{ άρα : } (KB)^2 + (KA)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\text{Οπότε : } (AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \Leftrightarrow (AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Γραφική παράσταση συνάρτησης :

Έστω μία συνάρτηση $f: A \rightarrow R$, με πεδίο ορισμού το A .

Γραφική παράσταση της f , είναι το σύνολο των σημείων $(x, f(x))$ του καρτεσιανού επιπέδου. Συμβολίζεται με C_f

Ένα σημείο $M(x_0, y_0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , αν και μόνο αν, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν τον τύπο της.

ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ: εκείνα τα $y \in \mathbb{R}$, για τα οποία υπάρχει $x \in A$ ώστε $y = f(x)$.

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in A, y = f(x)\}$$

Γεωμετρικά:

Το πεδίο ορισμού είναι η προβολή της γραφικής παράστασης της f στον άξονα $x'x$.

Το σύνολο τιμών είναι η προβολή της γραφικής παράστασης της f στον άξονα $y'y$.

Πχ : Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 1$.

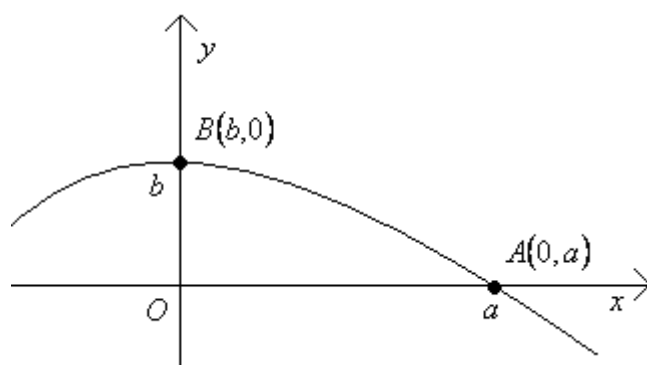
Να εξεταστεί αν τα σημεία $A(1,2)$ και $B(2,6)$ ανήκουν στην C_f

Απάντηση :

Για το σημείο $A(1,2)$: $2 = 1^3 + 1 \Leftrightarrow 2 = 2$ ισχύει άρα το A ανήκει στη C_f

Για το σημείο $B(2,6)$: $6 = 2^3 + 1 \Leftrightarrow 6 = 10$ δεν ισχύει άρα το B δεν ανήκει στη C_f

Σημεία τομής της γραφικής παράστασης συνάρτησης με τους άξονες :



Σημεία τομής της C_f με τον $x'x$ άξονα : Θέτω $y=0$ και λύνω ως προς x

Σημεία τομής της C_f με τον $y'y$ άξονα : Θέτω $x=0$ και λύνω ως προς y

Πχ : σημεία τομής της $f(x) = x^2 - 3x - 4$

Σημεία τομής της C_f με τον $x'x$ άξονα :

Θέτω $y=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x=4$ ή $x=-1$

άρα η C_f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $(4,0)$ και $(-1,0)$

Σημεία τομής της C_f με τον $y'y$ άξονα :

Θέτω $x=0 \Leftrightarrow f(x)=0^2 - 3 \cdot 0 - 4 \Leftrightarrow f(x)=-4$

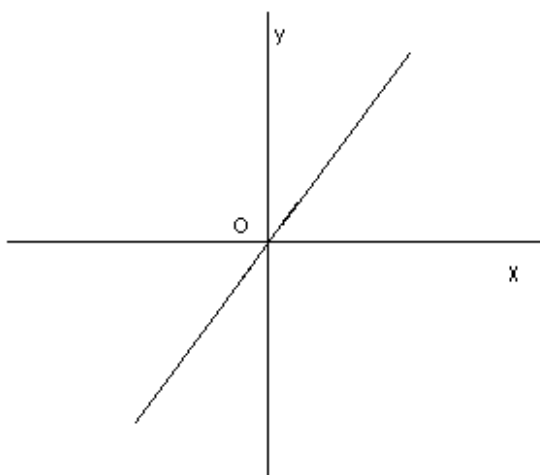
άρα η C_f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0,-4)$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

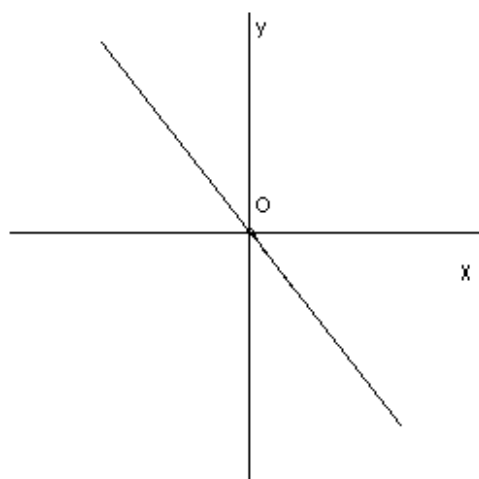
ΕΥΘΕΙΑ

1. ΕΥΘΕΙΑ ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΑΞΟΝΩΝ

$$f(x) = ax$$



$$y = ax, \quad a > 0$$



$$y = ax, \quad a < 0$$

Αφού το $O(0,0)$ επαληθεύει την εξίσωση $y = ax$ θα ανήκει στη γραφική της παράσταση.

Άρα πρόκειται για ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Το a είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας.

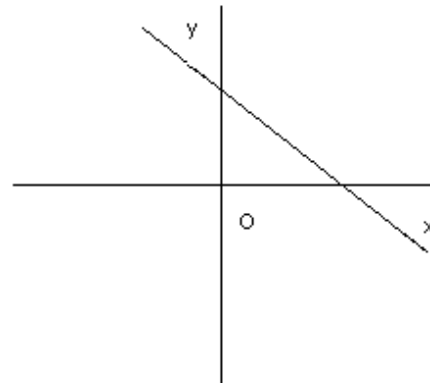
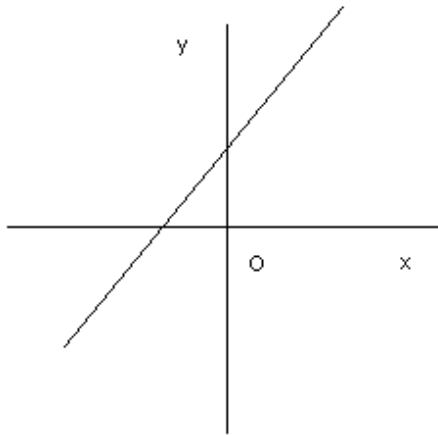
$a = \varepsilon\phi\omega$ όπου ω : η γωνία που σχηματίζει ο άξονας $x'x$ με την ευθεία (ε)

$a > 0 \Rightarrow \varepsilon\phi\omega > 0 \Rightarrow$ η ευθεία ανήκει στο $1^\circ - 3^\circ$ τεταρτημόριο.

$a < 0 \Rightarrow \varepsilon\phi\omega < 0 \Rightarrow$ η ευθεία ανήκει στο $2^\circ - 4^\circ$ τεταρτημόριο.

2. ΕΥΘΕΙΑ (ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ)

$$f(x) = ax + \beta$$



$$y = ax + \beta, \quad a > 0$$

$$y = ax + \beta, \quad a < 0$$

Η $f(x) = ax + \beta$ είναι κατακόρυφη μετατόπιση της $f(x) = ax$ κατά β μονάδες
Για αυτό τέμνει τον y άξονα στο σημείο $(0, \beta)$

Το a είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας.

Εκφράζει την κλίση της.

Ισχύει: $a = \varepsilon \phi \omega$ όπου ω : η γωνία που σχηματίζει ο x άξονας με την ευθεία (ε).

$$\text{Έστω } (\varepsilon_1): y = a_1 x + \beta_1$$

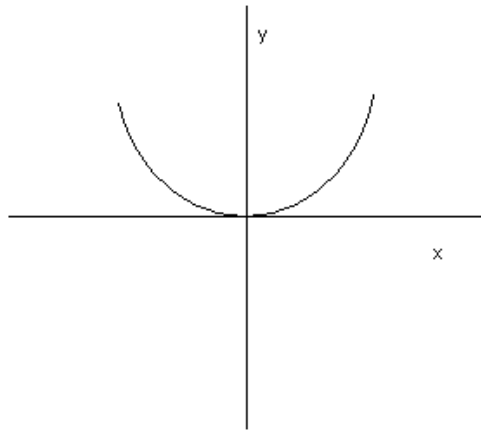
$$(\varepsilon_2): y = a_2 x + \beta_2$$

$$\blacklozenge a_1 = a_2 \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$$

$$\blacklozenge a_1 a_2 = -1 \Rightarrow \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$$

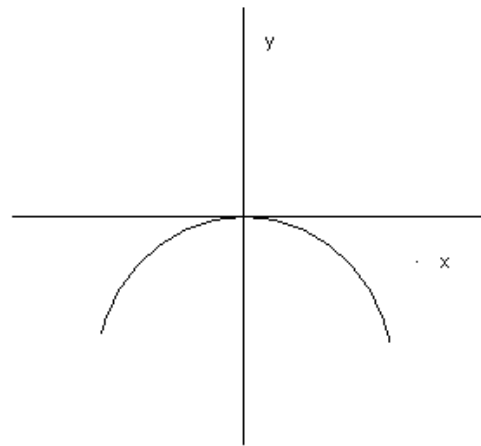
ΠΑΡΑΒΟΛΗ

* $y = ax^2$, $a \neq 0$: παραβολή με κορυφή την αρχή των αξόνων.



$$y = ax^2, \quad a > 0$$

$O(0,0)$: ελάχιστο



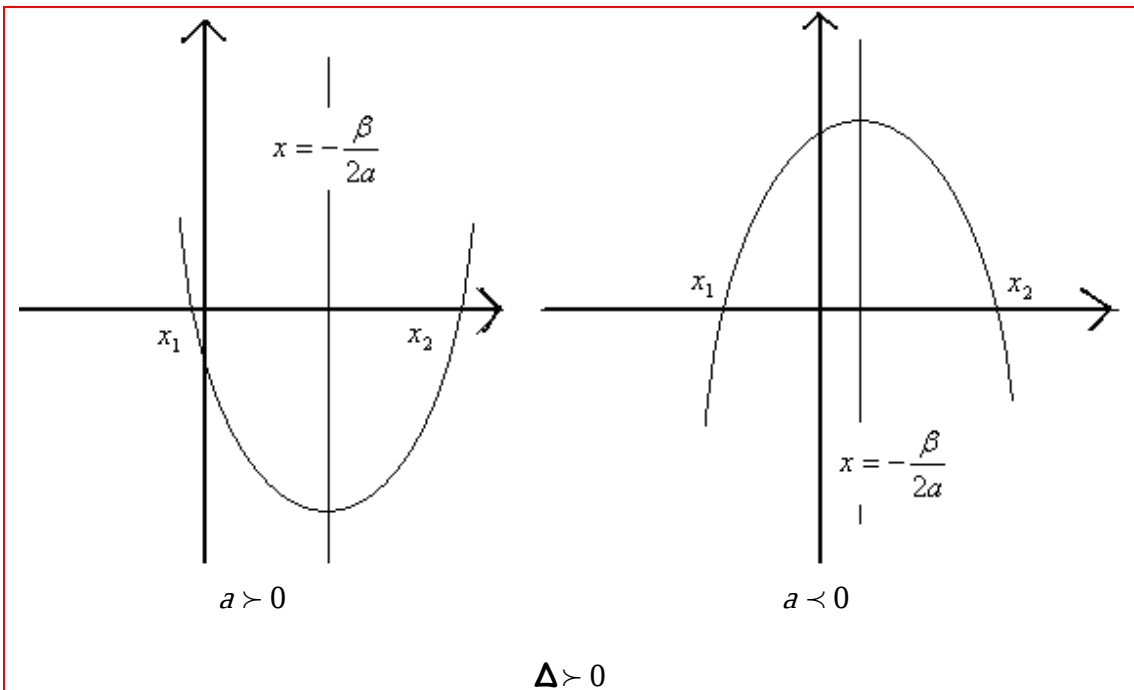
$$y = ax^2, \quad a < 0$$

$O(0,0)$: μέγιστο

Άρτιες (συμμετρικές ως προς τον άξονα y' y)

$O(0,0)$: κορυφή της παραβολής

★ $y = ax^2 + \beta x + \gamma, \quad a \neq 0$



Δύο πραγματικές ρίζες $x_1 \neq x_2$ με: $x_1 = -\frac{\beta}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = -\frac{\beta}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

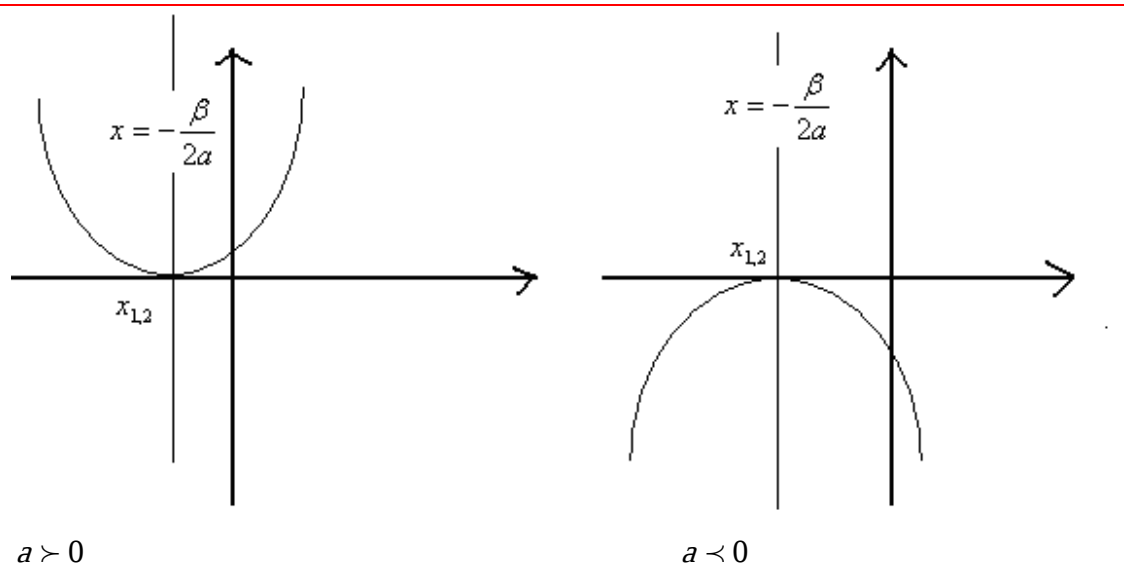
Οι ρίζες x_1, x_2 είναι τα σημεία τομής της f με τον άξονα x'

Η ευθεία $x = -\frac{\beta}{2a}$ είναι άξονας συμμετρίας της f

Για $x = -\frac{\beta}{2a}$ η f παρουσιάζει ακρότατο το $\left(-\frac{\beta}{2a}, f\left(-\frac{\beta}{2a}\right)\right)$

(ελάχιστο για $a > 0$, μέγιστο για $a < 0$)

Εκτός των ριζών ομόσημη του a , εντός των ριζών ετερόσημη του a



$$\Delta = 0$$

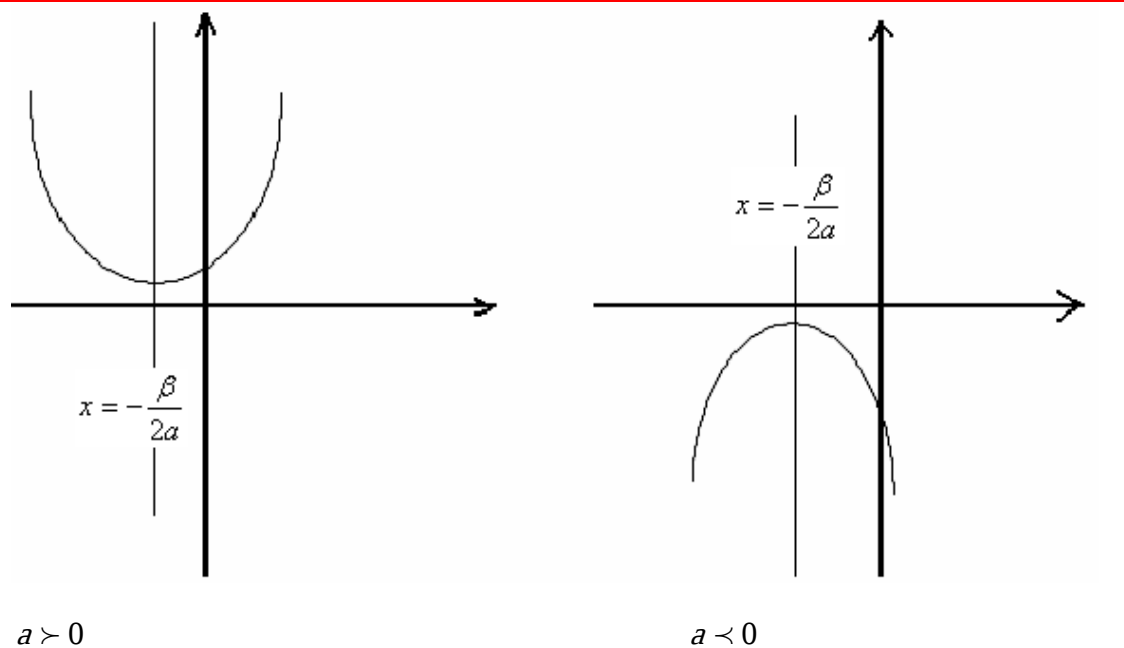
Μία πραγματική ρίζα (διπλή) την $x_{1,2} = -\frac{\beta}{2a}$

Άρα τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $-\frac{\beta}{2a}$

Η ευθεία $x = -\frac{\beta}{2a}$ είναι άξονας συμμετρίας της f

Για $x = -\frac{\beta}{2a}$ η f παρουσιάζει ακρότατο το $\left(-\frac{\beta}{2a}, f\left(-\frac{\beta}{2a}\right)\right) \equiv \left(-\frac{\beta}{2a}, 0\right)$

(ελάχιστο για $a > 0$, μέγιστο για $a < 0$)



$$\Delta < 0$$

Δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$

Άρα δεν τέμνει τον $x'x$

Διατηρεί το ίδιο πρόσημο σε όλο το π. ορισμού της

Η ευθεία $x = -\frac{\beta}{2a}$ είναι άξονας συμμετρίας της f

Για $x = -\frac{\beta}{2a}$ η f παρουσιάζει ακρότατο το $\left(-\frac{\beta}{2a}, f\left(-\frac{\beta}{2a}\right)\right)$

(ελάχιστο για $a > 0$, μέγιστο για $a < 0$)