Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x + x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα, που βρίσκεται στο $(0, 1)$.

iii) Να δείξετε ότι $e^{x_0} < e^{2-x_0} - 1 < e^2$.

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \ln(x - 2) + e^3 x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

iv) Να βρείτε το α ώστε οι C_f, C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο και στη συνέχεια να δείξετε ότι η $y = (e^3 + 1)(x - 2)$ είναι η εξίσωση της κοινής τους εφαπτομένης.

Λύση

i) Έχουμε

$$f'(x) = e^x + 1 > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως είναι $1-1$ και αντιστρέφεται.

Επιπλέον,

$$D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty).$$

ii)

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [0,1] \\ f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = e - 1 > 0 \end{array}\right\} \overset{\Theta B}{\Rightarrow} \text{υπάρχει } x_0 \in (0,1) \text{ ώστε } f(x_0) = 0.$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, το x_0 είναι μοναδικό.

iii) <u>α′ τρόπος</u>

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = 2 - x_0.$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [x_0, 2] \\ f \text{ παραγωγίσιμη στο } (x_0, 2) \end{array}\right\} \overset{\Theta MT}{\Rightarrow} \text{υπάρχει } \xi \in (x_0, 2) \text{ ώστε } f'(\xi) = \frac{f(2) - f(x_0)}{2 - x_0}.$$

Επειδή $f(2) = e^2$ και $f(x_0) = 0$, έχουμε

$$f'(\xi) = \frac{e^2}{2 - x_0}.$$

Επιπλέον

$$f'(x) = e^x + 1, \qquad f''(x) = e^x > 0$$

άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Από $x_0 < \xi < 2$ προκύπτει

$$f'(x_0) < f'(\xi) < f'(2)$$

δηλαδή

$$e^{x_0} + 1 < \frac{e^2}{2 - x_0} < e^2 + 1.$$

Επειδή $2 - x_0 = e^{x_0}$,

$$e^{x_0} + 1 < \frac{e^2}{e^{x_0}} < e^2 + 1$$

οπότε

$$e^{x_0} + 1 < e^{2-x_0} < e^2 + 1$$

και τελικά

$$e^{x_0} < e^{2-x_0} - 1 < e^2.$$

<u>β΄ τρόπος</u>

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = 2 - x_0.$$

Ισχύει $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το $=$ μόνο για $x = 0$.

Επειδή

$$0 < x_0 < 1 \Rightarrow 1 < 2 - x_0 < 2$$

έχουμε

$$e^{2-x_0} > (2 - x_0) + 1$$

οπότε

$$2 - x_0 < e^{2-x_0} - 1 \Rightarrow e^{x_0} < e^{2-x_0} - 1.$$

Επίσης

$$2 - x_0 < 2 \Rightarrow e^{2-x_0} < e^2 \Rightarrow e^{2-x_0} - 1 < e^2 - 1 < e^2.$$

Άρα

$$e^{x_0} < e^{2-x_0} - 1 < e^2.$$

iv)

$$g(x) = \ln(x-2) + e^3 x + \alpha \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x-2} + e^3, \quad x > 2.$$

Για να έχουν οι C_f, C_g κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο με τετμημένη $x_1 \in (2, +\infty)$, πρέπει να ισχύει το σύστημα

$$\begin{cases} f'(x_1) = g'(x_1) \\ f(x_1) = g(x_1) \end{cases}$$

Από $f'(x) = e^x + 1$ παίρνουμε

$$e^{x_1} + 1 = \frac{1}{x_1 - 2} + e^3$$

ή

$$e^{x_1} - \frac{1}{x_1 - 2} = e^3 - 1.$$

Θέτουμε

$$h(x) = e^x - \frac{1}{x-2}, \quad x > 2.$$

Έχουμε

$$h'(x) = e^x + \frac{1}{(x-2)^2} > 0$$

άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$ και η ρίζα της είναι μοναδική.

Επειδή

$$h(3) = e^3 - 1,$$

παίρνουμε $x_1 = 3$.

Τότε

$$f(3) = g(3) \Rightarrow e^3 + 3 - 2 = \ln 1 + 3e^3 + \alpha$$

δηλαδή

$$e^3 + 1 = 3e^3 + \alpha \Rightarrow \alpha = 1 - 2e^3.$$

Η εφαπτομένη στο σημείο $M(3, f(3))$ είναι

$$y - f(3) = f'(3)(x-3)$$

οπότε

$$y - (e^3 + 1) = (e^3 + 1)(x - 3) \Rightarrow y = (e^3 + 1)(x - 2).$$