Άσκηση 10

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = -x^2 + 4\alpha x + \beta \ , \ x \in \mathbb{R} \ , \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{e\gamma}{e-2}x^2 - 4x + \delta \ , \ x \in \mathbb{R} \ , \ \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

- Η f έχει στο 2 κρίσιμο σημείο και διέρχεται από το σημείο $M(1,3)$
- $\gamma = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$
- Η C_g τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 6

i) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1 - \dfrac{2}{e}$, $\delta = 6$.

ii) Σε σημείο $\xi \in (1,3)$ η κατακόρυφη απόσταση των C_f και C_g παίρνει μέγιστη τιμή. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$ είναι παράλληλες.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f και C_g.

iv) Να αποδείξετε ότι η AB χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Λύση

i) Έχουμε $f(x) = -x^2 + 4\alpha x + \beta \Rightarrow f'(x) = -2x + 4\alpha$

και $g(x) = \dfrac{e\gamma}{e-2}x^2 - 4x + \delta \Rightarrow g'(x) = 2\dfrac{e\gamma}{e-2}x - 4$

Η f έχει κρίσιμο σημείο στο $x = 2$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα

$$f'(2) = 0 \Rightarrow -4 + 4\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$M(1,3) \in C_f \Rightarrow f(1) = -1 + 4 + \beta = 3 \Rightarrow \beta = 0$$

$$\gamma = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e - \int_1^e \left(-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}dx$$
$$= \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e = \left[-\frac{\ln x + 1}{x}\right]_1^e = 1 - \frac{2}{e}$$
$$g(0) = 6 \Rightarrow \delta = 6$$

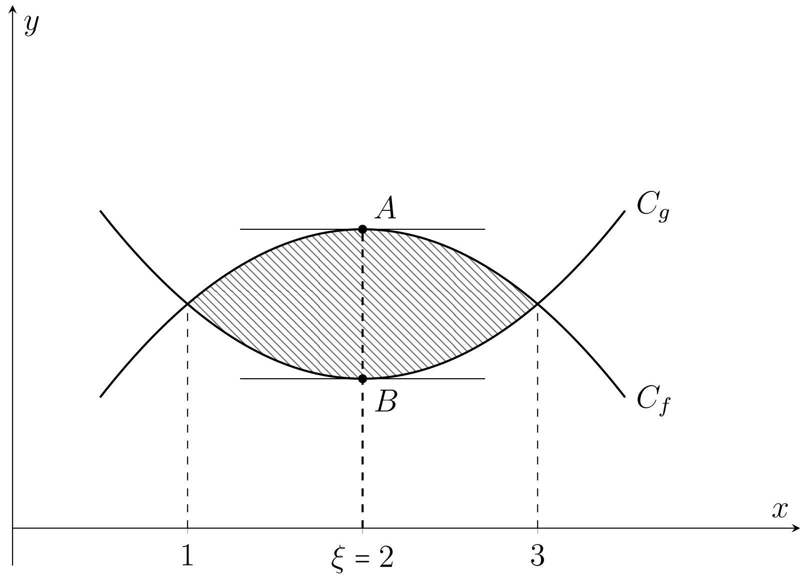
άρα $f(x) = -x^2 + 4x \qquad g(x) = x^2 - 4x + 6$

ii) Η κατακόρυφη απόσταση των $C_f,\ C_g$ είναι $d(x) = |f(x) - g(x)|$ και για $x \in [1,3]$ γίνεται $d(x) = f(x) - g(x) = -2x^2 + 8x - 6\ ,\ x \in [1,3]$

Η d παρουσιάζει μέγιστο στο $\xi \in (1,3)$ που είναι εσωτερικό σημείο και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, άρα από θεώρημα του Fermat έχουμε

$d'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) - g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = g'(\xi)$

επομένως οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες.



iii)

$$-x^2 + 4x = x^2 - 4x + 6 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1\ ,\ x = 3$$

$$E(\Omega) = \int_1^3 [f(x) - g(x)]dx = \int_1^3 (-2x^2 + 8x - 6)dx$$

$$\left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2-6x\right]_1^3=\frac{8}{3}$$

iv) <u>α΄ τρόπος</u>

$$d'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)-g'(\xi)=0\Rightarrow(-2\xi+4)-(2\xi-4)=0\Rightarrow-4\xi+8=0\Rightarrow\xi=2$$

Το τμήμα AB είναι κατακόρυφο και έχει εξίσωση $x=\xi$.

Το εμβαδόν του χωρίου Ω_1 από $x=1$ έως $x=2$ είναι

$$E_1=\int_1^2(f(x)-g(x))dx=\int_1^2(-2x^2+8x-6)dx=\left[-\frac{2x^3}{3}+4x^2-6x\right]_1^2$$

$$=\left(-\frac{16}{3}+4\right)-\left(-\frac{2}{3}-2\right)=-\frac{16}{3}+4+\frac{2}{3}+2=\frac{4}{3}$$

άρα $E_1=\frac{1}{2}E(\Omega)$, άρα η AB χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

<u>β΄ τρόπος</u>

Η συνάρτηση $d(x)=f(x)-g(x)=-2x^2+8x-6$ είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $x=2$ αφού

$$d(2+h)=-2(2+h)^2+8(2+h)-6=-2(4+4h+h^2)+16+8h-6=-2h^2+2$$

$$d(2-h)=-2(2-h)^2+8(2-h)-6=-2(4-4h+h^2)+16-8h-6=-2h^2+2$$

Τα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,3]$ είναι συμμετρικά ως προς το 2, άρα η AB χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.