

Άσκηση 100

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $(1, 2)$.

i) Να βρείτε τα α , β .

ii) Για $\alpha = -1$, $\beta = 3$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $g(x) = 2x + e^{x-2}$, $x \in \mathbb{R}$

iii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο καμπής εφάπτεται της C_g .

iv) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = 1$, $x = 2$.

v) Σημείο $M(x, y)$, $x > 0$ κινείται στη C_g με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του 2 cm/sec . Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OMN , όπου N η προβολή του M στον άξονα $x'x$ και O η αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή που η (ε) εφάπτεται της C_g .

Λύση

i) Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x \quad \text{και} \quad f''(x) = 6\alpha x + 2\beta$$

Το σημείο $(1, 2)$ είναι σημείο καμπής της C_f , επομένως ισχύει

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f''(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

ii) Για $\alpha = -1$ και $\beta = 3$ είναι $f(x) = -x^3 + 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x - 2)$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
f'		-	0	+	0	-	
f	$+\infty$		0		4		$-\infty$
			TE		TM		

$$f''(x) = -6x + 6 = -6(x - 1)$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$	
f''		+	0	-
f				
			ΣΚ	
			(1, 2)	

iii) Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο καμπής $(1, 2)$ είναι

$$(\varepsilon) : y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 2 = 3(x - 1) \Leftrightarrow y = 3x - 1$$

Για να εφάπτεται η (ε) στη C_g αρκεί να υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$g'(x_0) = 3 \Rightarrow 2 + e^{x_0-2} = 3 \Leftrightarrow e^{x_0-2} = 1 \Leftrightarrow x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$$

και

$$g(x_0) = 3x_0 - 1 \Rightarrow g(2) = 5 \Rightarrow 2 \cdot 2 + e^0 = 5 \Rightarrow 5 = 5$$

που ισχύει, άρα η $y = 3x - 1$ εφάπτεται και της C_g στο σημείο $(2, 5)$

iv) Για κάθε $x \in [1, 2]$ η g είναι κυρτή ($g''(x) = e^{x-2} > 0$) οπότε η C_g βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της (ε): $y = 3x - 1$ με εξαίρεση το σημείο επαφής, ενώ η f είναι κοίλη ($f''(x) \leq 0$) οπότε η C_f βρίσκεται κάτω από την (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής. Συνεπώς

$$g(x) \underset{\substack{\geq \\ \text{το } \gamma \text{τα} \\ x=2}}{\geq} 3x - 1 \underset{\substack{\geq \\ \text{το } \gamma \text{τα} \\ x=1}}{\geq} f(x)$$

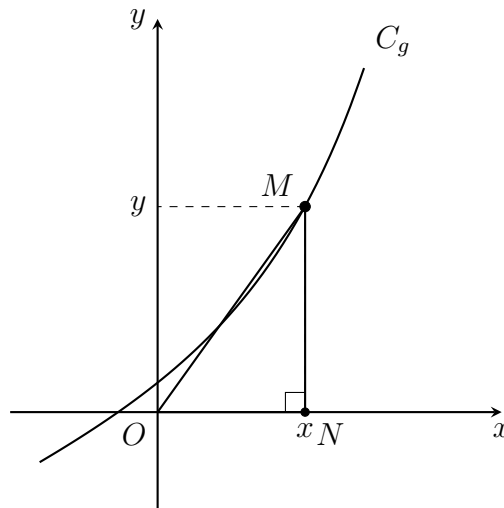
άρα $g(x) - f(x) > 0$ στο $[1, 2]$

Οπότε

$$E(\Omega) = \int_1^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_1^2 (g(x) - f(x)) dx = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x + e^{x-2}) dx =$$

$$\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + e^{x-2} \right]_1^2 = \left(\frac{16}{4} - 8 + 4 + e^0 \right) - \left(\frac{1}{4} - 1 + 1 + e^{-1} \right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{e}$$

v) Το σημείο $M(x, y)$ κινείται στη C_g άρα $y = g(x) \Rightarrow y(t) = g(x(t))$. Για $x > 0$ είναι $g(x) = 2x + e^{x-2} > 0$



Είναι

$$E = \frac{1}{2} x \cdot y \Rightarrow E(t) = \frac{1}{2} x(t) \cdot g(x(t))$$

άρα

$$E'(t) = \frac{1}{2} [x'(t) \cdot g(x(t)) + x(t) \cdot g'(x(t)) \cdot x'(t)]$$

$$E'(t) = \frac{1}{2} x'(t) [g(x(t)) + x(t) \cdot g'(x(t))]$$

Τη χρονική στιγμή t_0 που η (ε) εφάπτεται της C_g είναι $x(t_0) = 2$ άρα

$$E'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot [g(2) + 2 \cdot g'(2)] = 5 + 2 \cdot 3 = 11 \text{ cm}^2/\text{sec}$$