Άσκηση 101

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x^2 e^{\frac{1}{x}} & , \ x < 0 \\ 3x^2 + e^{\alpha-1} - \alpha & , \ x \geq 0 \end{cases}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$.

ii) α′) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων.

β′) Να δείξετε ότι η f' είναι συνεχής.

Επιπλέον, δίνεται F μία αρχική της f με $F(0) = 0$

iii) Να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iv) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της F.

v) Να υπολογίσετε τα όρια:

α′) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{F(x) + f(x)}{x} \eta\mu \dfrac{1}{x}$.

β′) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{F(x^2)}{x^3} + \eta\mu x \right)$.

vi) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_F και C_f.

Λύση

i) Η f είναι συνεχής στο 0 οπότε ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 3x^2 e^{\frac{1}{x}} = 0\cdot 0 = 0$ αφού $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{u\to -\infty} e^u = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = e^{\alpha-1} - \alpha$

Επομένως $e^{\alpha-1} - \alpha = 0 \Leftrightarrow e^{\alpha-1} = \alpha$

Είναι $e^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το = μόνο για $x = 0$ άρα $e^{\alpha-1} \geq \alpha$ και το = μόνο για $\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$

Για $\alpha = 1$ η συνάρτηση γίνεται $f(x) = \begin{cases} 3x^2 e^{\frac{1}{x}} & , \ x < 0 \\ 3x^2 & , \ x \geq 0 \end{cases}$

ii) α΄) Για να ορίζεται η εφαπτομένη στην αρχή των αξόνων πρέπει η f να είναι παραγωγίσιμη στο 0

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 3x = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{3x^2 e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} 3xe^{\frac{1}{x}} = 0$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 0$. Συνεπώς, ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο $(0,0)$ και έχει εξίσωση $y = 0$

β΄) Είναι $f'(x) = \begin{cases} (6x-3)e^{\frac{1}{x}} & , \ x < 0 \\ 6x & , \ x \geq 0 \end{cases}$

Για $x > 0$ η f' είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών και για $x < 0$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 6x = 0 = f'(0)$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}(6x-3) \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{u\to -\infty} e^u \left(\dfrac{6}{u} - 3\right) = -3\cdot 0 = 0$

άρα η f' είναι συνεχής στο 0, άρα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

iii) Επειδή η F είναι αρχική της f ισχύει $F'(x) = f(x)$ και $F''(x) = f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
F'		$+$	0	$+$	
F	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
F''		$-$	0	$+$	
F		$\frown$		$\smile$	
			ΣΚ $(0,0)$		

iv) Η F είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε το σύνολο τιμών της είναι το $F(A) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} F(x), \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)\right) = (-\infty, +\infty)$

- Θεωρούμε μια τυχαία εφαπτομένη της C_F σε σημείο $x_0 > 0$, η οποία έχει εξίσωση

$$y = F'(x_0)(x - x_0) + F(x_0) \Rightarrow y = f(x_0)(x - x_0) + F(x_0)$$

Η F είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$ άρα η C_F βρίσκεται πάνω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της (με εξαίρεση το σημείο επαφής) άρα

$$F(x) \geq f(x_0)(x - x_0) + F(x_0)$$

Επειδή $x_0 > 0$ είναι $f(x_0) > 0$. Συνεπώς

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x_0)(x - x_0) + F(x_0)] = f(x_0) \cdot (+\infty) = +\infty$$

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

- Θεωρούμε μια τυχαία εφαπτομένη της C_F σε σημείο $x_0 < 0$, η οποία έχει εξίσωση

$$y = F'(x_0)(x - x_0) + F(x_0) \Rightarrow y = f(x_0)(x - x_0) + F(x_0)$$

Η F είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ άρα η C_F βρίσκεται κάτω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της (με εξαίρεση το σημείο επαφής) άρα

$$F(x) \leq f(x_0)(x - x_0) + F(x_0)$$

Επειδή $x_0 < 0$ είναι $f(x_0) > 0$. Συνεπώς

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x_0)(x - x_0) + F(x_0)] = f(x_0) \cdot (-\infty) = -\infty$$

άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$

v) α′) Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x) + f(x)}{x} \text{ημ}\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{F(x) + f(x)}{x^2} \cdot x\,\text{ημ}\frac{1}{x}\right) = (+\infty) \cdot 1 = +\infty$$

διότι

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\,\text{ημ}\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\text{ημ}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{u=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{u\to 0^+}\frac{\text{ημ}u}{u}=1$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)+f(x)}{x^2}\overset{DLH}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+f'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+6x}{2x}=+\infty$

β΄) Είναι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{F(x^2)}{x^3}\overset{DLH}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x^2)\cdot 2x}{3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4\cdot 2x}{3x^2}=\lim_{x\to-\infty}2x^3=-\infty$$

και

$$-1\le \text{ημ}x\le 1\Leftrightarrow \frac{F(x^2)}{x^3}-1\le\frac{F(x^2)}{x^3}+\text{ημ}x\le\frac{F(x^2)}{x^3}+1$$

με $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{F(x^2)}{x^3}+1\right)=-\infty+1=-\infty$ άρα

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{F(x^2)}{x^3}+\text{ημ}x\right)=-\infty$$

vi) Η F είναι αρχική της f οπότε για $x\ge 0$ έχουμε $F'(x)=f(x)=3x^2$. Συνεπώς, $F(x)=x^3+c\overset{F(0)=0}{\Rightarrow}c=0$. Άρα $F(x)=x^3$ για κάθε $x\ge 0$

Η F είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα για κάθε $x<0\Rightarrow F(x)<F(0)\Rightarrow F(x)<0$

- Για $x<0$: Είναι $F(x)<0$ και $f(x)>0$ οπότε η εξίσωση $F(x)=f(x)$ είναι αδύνατη

- Για $x\ge 0$: $x^3=3x^2\Rightarrow x^2(x-3)=0\Rightarrow x=0$ ή $x=3$

Το εμβαδόν του χωρίου Ω είναι

$$\Omega=\int_0^3|f(x)-F(x)|\,dx=\int_0^3(3x^2-x^3)\,dx=\left[x^3-\frac{x^4}{4}\right]_0^3=27-\frac{81}{4}=\frac{27}{4}$$