Άσκηση 102

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{-x^2 + x + \kappa}{x - 2}$, $x \neq 2$, $\kappa \in (-\infty, 2)$. Η C_f έχει στη θέση $x_0 = 3$ τοπικό ακρότατο.

i) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ.

Για $\kappa = 1$

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iii) α΄) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

β΄) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

iv) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f, την $y = -x - 1$ και τις ευθείες $x = 3$, $x = 4$.

v) Σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της $y = f'(x)$, $x > 2$ και η τετμημένη του ελαττώνεται με ρυθμό $1\,cm/sec$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M τη χρονική στιγμή που η τεταγμένη του είναι ίση με 0.

Λύση

i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{2\}$ ως ρητή, με

$$f'(x) = \frac{(-2x+1)(x-2) - (-x^2+x+\kappa)}{(x-2)^2} = \frac{-x^2+4x-2-\kappa}{(x-2)^2}$$

Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 3$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της και f παραγωγίσιμη στο x_0, άρα από Θεώρημα Fermat ισχύει

$$f'(3) = 0 \Rightarrow -9+12-2-\kappa = 0 \Leftrightarrow 1-\kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1$$

ii) Για $\kappa = 1$ είναι $f(x) = \dfrac{-x^2+x+1}{x-2}$ και $f'(x) = \dfrac{-x^2+4x-3}{(x-2)^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+4x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$
			ΤΕ				ΤΜ		

Έχουμε

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \left((-x^2+x+1)\cdot\dfrac{1}{x-2}\right) = (-1)\cdot(-\infty) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \left((-x^2+x+1)\cdot\dfrac{1}{x-2}\right) = (-1)\cdot(+\infty) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$

$f(A) = (-\infty, -5] \cup [-1, +\infty)$

iii) α′) Είναι

$$f''(x) = \frac{(-2x+4)(x-2)^2 - (-x^2+4x-3)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{-2}{(x-2)^3}$$

x	$-\infty$ $\qquad$ 2 $\qquad$ $+\infty$	
f''	$+$	$-$
f		

β′) Επειδή $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ η ευθεία $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

Για το $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{-x^2+x+1}{x-2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+x+1}{x^2-2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2} = -1 = \lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2+x+1}{x-2} - (-1)x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2+x+1+x(x-2)}{x-2}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+x+1+x^2-2x}{x-2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{x-2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x} = -1 = \beta$$

άρα η ευθεία $y = -x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Με όμοιο τρόπο για το $-\infty$

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = -1 \quad \text{και} \quad \beta = \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-1)x] = -1$$

Συνεπώς η ευθεία $y = -x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$

iv) Είναι

$$E(\Omega) = \int_3^4 |f(x)-(-x-1)|\,dx = \int_3^4 \left|-\frac{1}{x-2}\right| dx = \int_3^4 \frac{1}{x-2}\,dx = \Big[\ln|x-2|\Big]_3^4 = \ln 2$$

v) Τη χρονική στιγμή t_0 είναι $y(t_0) = 0 \Rightarrow f'(x(t_0)) = 0 \overset{x>2}{\Rightarrow} x(t_0) = 3$

Άρα

$$y = f'(x) \Rightarrow y(t) = f'(x(t)) \Rightarrow$$

$$y'(t) = f''(x(t))\cdot x'(t) \Rightarrow$$

$$y'(t_0) = f''(x(t_0))\cdot x'(t_0) = f''(3)(-1) = (-2)\cdot(-1) = 2\ cm/sec$$