Άσκηση 103

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = (-x^2 + x - 1)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = g(1) \quad (1)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

iii) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_1^{\rho} xg'(x)dx > 0$, όπου ρ ρίζα της εξίσωσης (1) με $\rho \neq 1$.

iv) Έστω $0 < \alpha < 1$, $2 < \beta < \rho$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1,2)$ ώστε $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx = (\beta - \alpha)g(\xi)$.

v) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{g\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{3}{e^2}}{x-1} + \dfrac{g(3) + \frac{1}{e}}{x-2} - \dfrac{\frac{1}{e} + g(0)}{x-\kappa} = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$ με $\kappa > 2$.

Λύση

i) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$g'(x) = (-2x+1)e^{-x} - (-x^2+x-1)e^{-x} = (x^2-3x+2)e^{-x}$$

Το πρόσημο της g' εξαρτάται από το πρόσημο του τριωνύμου x^2-3x+2

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{e}$	$\searrow$	$-\frac{3}{e^2}$	$\nearrow$	0
			ΤΜ		ΤΕ		

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[(-x^2+x-1)e^{-x}\right] = (-\infty)(+\infty) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^2+x-1}{e^x} \overset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x+1}{e^x} \overset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{e^x} = 0$

Η g είναι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=1$ το $g(1) = -\dfrac{1}{e}$ και τοπικό ελάχιστο στο $x=2$ το $g(2) = -\dfrac{3}{e^2}$

Το σύνολο τιμών είναι $g(\mathbb{R}) = (-\infty, 0)$

ii) Έχουμε $g(1) = -\dfrac{1}{e}$.

- Στο $\Delta_1 = (-\infty, 1]$ η g είναι γνησίως αύξουσα οπότε η $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα
- Στο $\Delta_2 = (1,2]$ η g είναι γνησίως φθίνουσα με $g(\Delta_2) = \left[-\dfrac{3}{e^2}, -\dfrac{1}{e}\right)$

  Το $-\dfrac{1}{e} \notin g(\Delta_2)$ άρα η $g(x) = g(1)$ είναι αδύνατη
- Στο $\Delta_3 = (2,+\infty)$ η g είναι γνησίως αύξουσα με $g(\Delta_3) = \left(-\dfrac{3}{e^2}, 0\right)$

  Επειδή $-\dfrac{1}{e} \in \left(-\dfrac{3}{e^2}, 0\right)$ (αφού $e < 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{e} < \dfrac{3}{e^2} \Leftrightarrow -\dfrac{3}{e^2} < -\dfrac{1}{e}$) η $g(x) = g(1)$ έχει μοναδική ρίζα $\rho \in (2,+\infty)$.

Συνεπώς, η εξίσωση $g(x) = g(1)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x=1$ και $x = \rho > 2$.

iii) Θέλουμε να δείξουμε ότι $\displaystyle\int_1^{\rho} xg'(x)dx > 0$, όπου ρ ρίζα της $g(x) = g(1)$ με $\rho \neq 1$ άρα ·έχουμε $\rho > 2$ και $g(\rho) = g(1)$

Είναι

$$\int_1^{\rho} xg'(x)dx = \Big[xg(x)\Big]_1^{\rho} - \int_1^{\rho} g(x)dx =$$

$$\rho g(\rho) - g(1) - \int_1^{\rho} g(x)dx = (\rho-1)g(1) - \int_1^{\rho} g(x)dx$$

Στο $[1,\rho]$ η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $g(1)$, άρα $g(x) \leq g(1)$ και το = μόνο για $x = \rho$ και $x = 1$, οπότε

$$\int_1^{\rho} g(x)dx < \int_1^{\rho} g(1)dx \Rightarrow -\int_1^{\rho} g(x)dx > -g(1)(\rho-1) \Rightarrow$$

$$g(1)(\rho-1) - \int_0^{1} g(x)dx > 0 \Rightarrow \int_1^{\rho} xg'(x)dx > 0$$

iv) Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $0<\alpha<1$ και $2<\beta<\rho$, άρα παρουσιάζει στο $[\alpha,\beta]$

- ολικό μέγιστο στο $x=1$ το $g(1)$
- ολικό ελάχιστο στο $x=2$ το $g(2)$

Επομένως, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ ισχύει $g(2) \leq g(x) \leq g(1)$ και το = για $x=2$ και $x=1$ αντίστοιχα

Άρα

$$\int_\alpha^{\beta} g(2)dx < \int_\alpha^{\beta} g(x)dx < \int_\alpha^{\beta} g(1)dx \Rightarrow$$

$$g(2)(\beta-\alpha) < \int_\alpha^{\beta} g(x)dx < g(1)(\beta-\alpha) \Rightarrow$$

$$g(2) < \underbrace{\frac{\int_\alpha^{\beta} g(x)dx}{\beta-\alpha}}_{A} < g(1)$$

Έχουμε

$$g((1,2)) \overset{\text{συν/ης}}{=} \left(\lim_{x\to 2^-} g(x), \lim_{x\to 1^+} g(x)\right) = (g(2), g(1))$$

και $A \in g((1,2))$ άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε

$$g(\xi) = A \Rightarrow g(\xi) = \frac{\int_\alpha^{\beta} g(x)dx}{\beta-\alpha} \Rightarrow \int_\alpha^{\beta} g(x)dx = (\beta-\alpha)g(\xi)$$

και g γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$ άρα το ξ είναι μοναδικό

v) Έχουμε

$$\frac{g\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{3}{e^2}}{x-1} + \frac{g(3) + \frac{1}{e}}{x-2} - \frac{\frac{1}{e} + g(0)}{x-\kappa} = 0 \Rightarrow$$

$$\left[g\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{3}{e^2}\right](x-2)(x-\kappa) + \left[g(3) + \frac{1}{e}\right](x-1)(x-\kappa) - \left[\frac{1}{e} + g(0)\right](x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\left[g\left(\frac{3}{2}\right)-g(2)\right](x-2)(x-\kappa)+[g(3)-g(1)](x-1)(x-\kappa)-[g(0)-g(1)](x-1)(x-2)=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\left[g\left(\frac{3}{2}\right)-g(2)\right](x-2)(x-\kappa)+[g(3)-g(1)](x-1)(x-\kappa)-[g(0)-g(1)](x-1)(x-2)$$

Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ και στο $[2,\kappa]$ ως πολυωνυμική

- $f(1)=\left[g\left(\frac{3}{2}\right)-g(2)\right](\kappa-1)>0$

  διότι $\frac{3}{2}\in(1,2) \overset{g \text{ γν. φθιν.}}{\Leftrightarrow} g\left(\frac{3}{2}\right)>g(2)$ και $\kappa>2\Rightarrow\kappa-1>0$
- $f(2)=[g(3)-g(1)](2-\kappa)<0$

  διότι $7<e^2\Leftrightarrow\frac{7}{e^3}<\frac{1}{e}\Leftrightarrow-\frac{7}{e^3}>-\frac{1}{e}\Leftrightarrow g(3)>g(1)$
- $f(\kappa)=[g(1)-g(0)](\kappa-1)(\kappa-2)>0$

  διότι $0<1 \overset{g \text{ γν. φθιν.}}{\Leftrightarrow} g(0)<g(1)\Rightarrow g(1)-g(0)>0$ και $\kappa>2\Rightarrow(\kappa-1)(\kappa-2)>0$

δηλαδή $f(1)f(2)<0$ και $f(2)f(\kappa)<0$

άρα από Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_1\in(1,2)$ και μία τουλάχιστον μία ρίζα $x_2\in(2,\kappa)$ και επειδή η f είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού οι ρίζες είναι μοναδικές.