Άσκηση 104

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $(f'(x) - f(x))(x^2 + 1) = 2xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη 0 είναι κάθετη στην ευθεία $y = -x + 2026$

i) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Δίνεται $f(x) = (x^2 + 1)e^x$, $x \in \mathbb{R}$

ii) Να βρείτε τη συμμετρική συνάρτηση, έστω g, της f ως προς τον άξονα $y'y$.

Δίνεται $g(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$

iii) Να δείξετε ότι:

α′) $f(x) + g(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β′) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{ημ}^2 x + 1)(e^{\text{ημ}x} + e^{-\text{ημ}x})dx > \pi$.

γ′) οι εφαπτόμενες των C_f, C_g στα σημεία $A(\kappa, f(\kappa))$ και $B(-\kappa, g(-\kappa))$, $\kappa \neq -1$ αντίστοιχα, τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$.

iv) α′) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f, C_g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = x_0$, $x = -x_0$, όπου $x_0 > 0$.

β′) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $E(\Omega) = 1$.

Έστω F αρχική της f με $F(0) = 3$ και $F(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και G αρχική της g με $G(0) = -3$ και $G(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

v) Να αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή και η G είναι κοίλη.

vi) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ και $\lim_{x \to -\infty} G(x) = -\infty$.

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $\Phi(x) = F(x) + G(-x)$, $x \in \mathbb{R}$

vii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση Φ είναι σταθερή και να βρεθεί ο τύπος της.

viii) Να δείξετε ότι $\dfrac{F(e^x)}{F(e^{-x})} > \dfrac{G(-e^{-x})}{G(-e^x)}$ για κάθε $x > 0$

Λύση

i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\left(f'(x) - f(x)\right)\left(x^2+1\right) = 2xf(x) \Leftrightarrow f'(x)(x^2+1) - f(x)(x^2+1) = 2xf(x)$$

$$\Leftrightarrow f'(x)(x^2+1) - (x^2+1)'f(x) = f(x)(x^2+1)$$

Είναι $x^2+1>0$ άρα

$$\frac{f'(x)(x^2+1)-(x^2+1)'f(x)}{(x^2+1)^2} = \frac{f(x)}{x^2+1} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2+1}\right)' = \frac{f(x)}{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2+1} = c \cdot e^x \Leftrightarrow f(x) = c(x^2+1)e^x$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=0$ είναι κάθετη στην ευθεία $y=-x+2026$ άρα ισχύει $f'(0)\cdot(-1) = -1 \Rightarrow f'(0)=1$. Έχουμε

$$f'(x) = c\cdot 2x \cdot e^x + c(x^2+1)e^x = c(x^2+2x+1)e^x$$

Για $x=0$: $f'(0)=1 \Leftrightarrow c=1$. Άρα, $f(x) = (x^2+1)e^x,\ x\in\mathbb{R}$

ii) Η συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $y'y$ είναι

$$g(x) = f(-x) \Rightarrow g(x) = (x^2+1)e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$$

iii) α΄) Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$f(x)+g(x)\geq 2 \Leftrightarrow (x^2+1)e^x + (x^2+1)e^{-x} \geq 2 \Leftrightarrow (x^2+1)\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)\geq 2$$

- Ισχύει $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+1\geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το = μόνο για $x=0$
- $e^x + \dfrac{1}{e^x} \geq 2 \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x + 1 > 0 \Leftrightarrow (e^x-1)^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το = μόνο για $x=0$

  Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη προκύπτει

  $$(x^2+1)\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)\geq 1\cdot 2 = 2 \Rightarrow f(x)+g(x)\geq 2$$

  και το = ισχύει μόνο όταν $x=0$

β΄) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $(x^2+1)(e^x+e^{-x})\geq 2$, με την ισότητα μόνο για $x=0$. Θέτω όπου x το ημx οπότε $(\text{ημ}^2x+1)(e^{\text{ημ}x}+e^{-\text{ημ}x})\geq 2$ και το = όταν ημ$x=0 \overset{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}{\Leftrightarrow} x=0$

Επομένως

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{ημ}^2x+1)(e^{\text{ημ}x}+e^{-\text{ημ}x})\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,dx = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$

γ′) Η εφαπτομένη της C_f στο $A(\kappa, f(\kappa))$ είναι:

$$(\varepsilon_1): y - f(\kappa) = f'(\kappa)(x-\kappa) \Leftrightarrow y = f'(\kappa)x - \kappa f'(\kappa) + f(\kappa)$$

Η εφαπτομένη της C_g στο $B(-\kappa, g(-\kappa))$ είναι:

$$(\varepsilon_2): y - g(-\kappa) = g'(-\kappa)(x-(-\kappa)) \Leftrightarrow y = g'(-\kappa)x + \kappa g'(-\kappa) + g(-\kappa)$$

Έχουμε $g(x) = f(-x) \Rightarrow g'(x) = -f'(-x)$, οπότε

$g'(-\kappa) = -f'(\kappa)$ και $g(-\kappa) = f(\kappa)$ και η εξίσωση της (ε_2) γίνεται

$$(\epsilon_2): y = -f'(\kappa)x - \kappa f'(\kappa) + f(\kappa)$$

Λύνουμε το σύστημα των (ε_1) και (ε_2) εξισώνοντας τα y

$$f'(\kappa)x - \kappa f'(\kappa) + f(\kappa) = -f'(\kappa)x - \kappa f'(\kappa) + f(\kappa)$$

$$\Leftrightarrow f'(\kappa)x = -f'(\kappa)x \Leftrightarrow 2f'(\kappa)x = 0$$

Επειδή $f'(x) = (x+1)^2e^x$ τότε για κάθε $\kappa \neq -1$ είναι $f'(\kappa) \neq 0$, οπότε προκύπτει $x = 0$. Άρα οι εφαπτόμενες τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$

iv) α′) Είναι

$$f(x) > 0 \text{ και } g(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x^2+1)e^x = (x^2+1)e^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$$

Άρα

$$E(\Omega) = \int_{-x_0}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{x_0} g(x)\,dx$$

Στο πρώτο ολοκλήρωμα θέτουμε $x = -u$ οπότε $dx = -du$. Συνεπώς

$$\int_{-x_0}^{0} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{0} -f(-u)du = \int_0^{x_0} f(-u)\,du = \int_0^{x_0} g(u)\,du$$

άρα

$$E(\Omega) = 2\int_0^{x_0}(x^2+1)e^{-x}\,dx = -2(x_0^2+2x_0+3)e^{-x_0} + 6$$

αφού

$$\int_0^{x_0}(x^2+1)e^{-x}\,dx = \int_0^{x_0}(x^2+1)(-e^{-x})'\,dx =$$

$$\left[-(x^2+1)e^{-x}\right]_0^{x_0} - \int_0^{x_0} 2x(-e^{-x})\,dx =$$

$$-(x_0^2+1)e^{-x_0} + 1 + \int_0^{x_0} 2x(-e^{-x})'\,dx =$$

$$-(x_0^2+1)e^{-x_0} + 1 + \left[-2xe^{-x}\right]_0^{x_0} - \int_0^{x_0} 2(-e^{-x})\,dx =$$

$$-(x_0^2+1)e^{-x_0} + 1 - 2x_0e^{-x_0} + \left[-2e^{-x}\right]_0^{x_0} =$$

$$(-x_0^2 - 2x_0 - 3)e^{-x_0} + 3$$

β′) Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(x) = E(x) - 1$, για $x \in [0, 1]$

- Η H είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $H(0) = E(0) - 1 = -1 < 0$
- $H(1) = E(1) - 1 = 5 - 12e^{-1} = \dfrac{5e - 12}{e} > 0$

Επειδή $H(0) \cdot H(1) < 0$ από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $H(x_0) = 0 \Leftrightarrow E(\Omega) = 1$ Επειδή

$$H'(x) = 2(x^2 + 1)e^{-x} > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

η H είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η ρίζα x_0 είναι μοναδική

v) Επειδή οι F, G είναι αρχικές των f, g αντίστοιχα, ισχύει

$$F'(x) = f(x) \text{ και } G'(x) = g(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$F''(x) = f'(x) = (x + 1)^2 e^x \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το $=$ για $x = -1$ και επειδή F συνεχής είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

$G''(x) = g'(x) = -(x - 1)^2 e^{-x} \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το $=$ για $x = 1$ και επειδή G συνεχής είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$

vi) Η εφαπτομένη της C_F στο $x_0 = 0$ έχει εξίσωση

$$y = F'(0)(x - 0) + F(0) \Rightarrow y = x + 3$$

Η F είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ άρα η C_F βρίσκεται πάνω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της (με εξαίρεση το σημείο επαφής) άρα

$$F(x) \geq x + 3$$

και $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 3 = +\infty$ άρα $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

Η εφαπτομένη της C_G στο $x_0 = 0$ έχει εξίσωση

$$y = G'(0)(x - 0) + G(0) \Rightarrow y = x - 3$$

Η G είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$ άρα η C_G βρίσκεται πάνω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της (με εξαίρεση το σημείο επαφής) άρα

$$G(x) \leq x - 3$$

και $\lim\limits_{x \to -\infty} x - 3 = -\infty$ άρα $\lim\limits_{x \to -\infty} G(x) = -\infty$

vii) Η συνάρτηση Φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και

$$\Phi'(x) = (F(x) + G(-x))' = f(x) - g(-x) = f(x) - f(x) = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, η συνάρτηση Φ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $\Phi(x) = c$

Για $x = 0$ έχουμε $c = \Phi(0) = F(0) + G(0) = 3 + (-3) = 0$. Άρα $\Phi(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$

viii) Είναι $\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) + G(-x) = 0 \Leftrightarrow G(-x) = -F(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Επομένως $G(-e^{-x}) = -F(e^{-x})$ και $G(-e^{x}) = -F(e^{x})$

Οπότε
$$\frac{F(e^x)}{F(e^{-x})} > \frac{G(-e^{-x})}{G(-e^x)} \Leftrightarrow \frac{F(e^x)}{F(e^{-x})} > \frac{-F(e^{-x})}{-F(e^x)} \Leftrightarrow \frac{F(e^x)}{F(e^{-x})} > \frac{F(e^{-x})}{F(e^x)}$$
Είναι $F(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως

$$(F(e^x))^2 > (F(e^{-x}))^2 \overset{F(x)>0}{\Leftrightarrow} F(e^x) > F(e^{-x}) \overset{F \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow}$$

$$e^x > e^{-x} \Leftrightarrow x > -x \Leftrightarrow x > 0$$

που ισχύει, αφού $F'(x) = f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

άρα $\dfrac{F(e^x)}{F(e^{-x})} > \dfrac{G(-e^{-x})}{G(-e^x)}$ για κάθε $x > 0$