Άσκηση 105

Έστω συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και κυρτή για την οποία ισχύει

$$x^2+2x+1\le f(x)\le e^{2x} \text{ για κάθε } x\ge 0.$$

Επίσης, δίνεται η συνάρτηση $g(x)=F(x)-x^2$, $x\ge 0$, όπου F αρχική της f με $F(0)=1$.

i) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M\,(0,f(0))$.

ii) α΄) Να αποδείξετε ότι $g(x)\ge x+1$ για κάθε $x\ge 0$.

β΄) Να δείξετε ότι $\displaystyle\int_0^1 F(x)\,dx>\frac{11}{6}$.

γ΄) Να αποδείξετε ότι $g(x^2+1)+x+f(0)\ge(x-1)g(x)+g(x+1)+2F(0)$ για κάθε $x\ge 1$.

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $\Phi(x)=x^3+x^2-(F(2)-7)\,x+1$, $x\in\mathbb{R}$

iii) Να αποδείξετε ότι η Φ έχει δύο τοπικά ακρότατα σε θέσεις x_1,x_2 με $x_1x_2<0$.

iv) Να δείξετε ότι η C_Φ έχει μοναδικό σημείο καμπής, έστω N, με τεταγμένη $y_N>\dfrac{29}{27}$.

Λύση

i) Είναι $x^2+2x+1 \le f(x) \le e^{2x}$ για κάθε $x \ge 0$, οπότε για $x=0$ προκύπτει

$$1 \le f(0) \le 1 \Rightarrow f(0)=1$$

Για $x>0$ έχουμε

$$x^2+2x+1 \le f(x) \le e^{2x} \Rightarrow x^2+2x \le f(x)-f(0) \le e^{2x}-1 \Rightarrow$$
$$x+2 \le \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \le \frac{e^{2x}-1}{x}$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=2$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{2x}-1}{x} \overset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}2e^{2x}=2$

οπότε από Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(0,f(0))$ είναι

$$(\varepsilon): y-f(0)=f'(0)(x-0) \Rightarrow y-1=2x \Rightarrow y=2x+1$$

ii) α') Η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη (ε) σε κάθε σημείο με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή $f(x) \ge 2x+1$ για κάθε $x \ge 0$ και το $=$ μόνο για $x=0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $g'(x)=F'(x)-2x=f(x)-2x$

και $g'(x)=f(x)-2x \ge 1$ για κάθε $x \ge 0$ και το $=$ για $x=0$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $g(x) \ge x+1$ για κάθε $x \ge 0$

Θέτω $h(x)=g(x)-x-1,\ x \ge 0$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $h'(x)=g'(x)-1>0$ για κάθε $x>0$ και η h είναι συνεχής, άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Για κάθε $x \ge 0 \Rightarrow h(x) \ge h(0) \Rightarrow g(x)-x-1 \ge 0 \Rightarrow g(x) \ge x+1$

β') Είναι

$$g(x) \ge x+1 \Rightarrow F(x)-x^2 \ge x+1 \Rightarrow F(x) \ge x^2+x+1 \quad \text{για κάθε } x \ge 0$$

και το $=$ μόνο για $x=0$. Επομένως

$$\int_0^1 F(x)\,dx > \int_0^1 (x^2+x+1)\,dx$$
$$\int_0^1 F(x)\,dx > \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1=\frac{11}{6}$$

γ΄) Θέλουμε να δείξουμε για κάθε $x \geq 1$

$$g(x^2+1)+x+f(0) \geq (x-1)g(x)+g(x+1)+2F(0)$$

$$g(x^2+1)+x+1 \geq (x-1)g(x)+g(x+1)+2$$

$$g(x^2+1)-g(x+1) \geq (x-1)g(x)-x+1$$

$$g(x^2+1)-g(x+1) \geq (x-1)(g(x)-1)$$

Για $x=1$ η ζητούμενη σχέση ισχύει ως ισότητα αφού $g(2)-g(2) \geq 0 \Rightarrow 0 \geq 0$

Για $x>1$ έχουμε $0<x<x+1<x^2+1$

- Από ΘΜΤ για την g στο $[x+1, x^2+1]$ υπάρχει $\xi_1 \in (x+1, x^2+1)$ τέτοιο ώστε
$$g'(\xi_1) = \frac{g(x^2+1)-g(x+1)}{(x^2+1)-(x+1)} = \frac{g(x^2+1)-g(x+1)}{x(x-1)}$$

- Από ΘΜΤ για την g στο $[0,x]$ υπάρχει $\xi_2 \in (0,x)$ τέτοιο ώστε
$$g'(\xi_2) = \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{g(x)-1}{x}$$

Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $g''(x) = f'(x)-2$. Επειδή η f είναι κυρτή η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για κάθε $x>0 \Rightarrow f'(x)>f'(0)=2 \Rightarrow g''(x)>0$ και g' συνεχής, άρα g' γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Είναι

$$\xi_2 < \xi_1 \Rightarrow g'(\xi_2) < g'(\xi_1)$$
$$\frac{g(x)-1}{x} < \frac{g(x^2+1)-g(x+1)}{x(x-1)} \overset{x>1}{\Rightarrow}$$
$$(x-1)(g(x)-1) < g(x^2+1)-g(x+1)$$

iii) Έχουμε $\Phi(x) = x^3+x^2-(F(2)-7)x+1$, $x \in \mathbb{R}$. Η Φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\Phi'(x) = 3x^2+2x-(F(2)-7)$$

Είναι

$$\Delta = 4+12(F(2)-7) > 0$$

αφού για κάθε $x>0$ ισχύει

$$g(x) > x+1 \Rightarrow F(x)-x^2 > x+1 \Rightarrow F(x) > x^2+x+1$$

άρα για $x=2$ προκύπτει $F(2)>7$

ή

$$f(x) \geq 2x+1 \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και το } = \text{ μόνο για } x = 0$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx > \int_0^2 (2x+1)\,dx \Rightarrow F(2) - F(0) > \left[x^2 + x\right]_0^2 \Rightarrow F(2) - 1 > 6 \Rightarrow F(2) > 7$$

άρα η $\Phi'(x) = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες $x_1 < x_2$ με

$$x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-(F(2)-7)}{3} < 0$$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Φ'		$+$	0	$-$	0	$+$	
Φ	$-\infty$	$\nearrow$	ΤΜ	$\searrow$	ΤΕ	$\nearrow$	$+\infty$

iv) Η Φ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $\Phi''(x) = 6x+2$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
Φ''		$-$	0	$+$	
Φ		$\frown$		$\smile$	
			ΣΚ		

το $N\left(-\dfrac{1}{3}, \Phi\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right)$ είναι το σημείο καμπής της C_Φ με

$$y_N = \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - (F(2)-7)\left(-\frac{1}{3}\right) + 1$$

$$y_N = -\frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{F(2)-7}{3} + 1 = \frac{29}{27} + \frac{F(2)-7}{3} > \frac{29}{27}$$