Άσκηση 106

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - e - x(\ln x - 1)\ ,\ x > 0$.

i) Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq \dfrac{\rho^2+1}{\rho}$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$, όπου $\rho \in (0,1)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x - x\ln x = e - x\ ,\ x > 0$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (0,1)$.

iii) Επιπλέον, δίνονται οι συναρτήσεις $h(x) = e^x\ ,\ x \in \mathbb{R}$ και $\varphi(x) = \ln x\ ,\ x > 0$. Να δείξετε ότι $E(\Omega) = 1$, όπου Ω το χωρίο που περικλείεται από τις C_h, C_φ και τις ευθείες $x = x_0\ ,\ x = 1$.

Δίνεται ότι $\rho < x_0$

iv) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\rho, x_0)$ τέτοιο, ώστε $e^{\rho - x_0} = -\dfrac{f(\xi)}{f''(\xi)}$.

v) Έστω F αρχική της f με $4F(1) = 3$. Να δείξετε ότι:

α′) η F είναι κυρτή.

β′) $F(x_0) < \dfrac{3}{4x_0}$.

γ′) $F\left((0,+\infty)\right) = [F(x_0), +\infty)$.

vi) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{F(x) - F(x_0)}{\text{ημ}(x - x_0)} \cdot \text{ημ}\dfrac{2026}{x - x_0} \right)$.

Λύση

i) Έχουμε $f(x) = e^x - e - x(\ln x - 1)$ για $x > 0$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = e^x - \ln x + 1 - 1 = e^x - \ln x$$

$$f''(x) = e^x - \frac{1}{x}$$

Είναι $f^{(3)}(x) = e^x + \dfrac{1}{x^2} > 0$, άρα η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

$$f''((0,1)) \underset{\text{συν/ης}}{\overset{\text{γν. αυξ.}}{=}} (\lim_{x\to 0^+} f''(x), \lim_{x\to 1^+} f''(x)) = (-\infty, e - 1)$$

Το $0 \in f''((0,1))$ άρα η $f''(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον μία ρίζα $\rho \in (0,1)$ και f'' γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε είναι μοναδική

Είναι

$$f''(\rho) = 0 \Rightarrow e^\rho = \frac{1}{\rho} \Leftrightarrow \ln \rho = -\rho$$

- Για $0 < x < \rho \Leftrightarrow f''(x) < f''(\rho) = 0$
- Για $x > \rho \Leftrightarrow f''(x) > f''(\rho) = 0$

x	0		ρ		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f'	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			ΟΕ		

Η f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = \rho$. Συνεπώς για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$f'(x) \geq f'(\rho) = e^\rho - \ln \rho = \frac{1}{\rho} - (-\rho) = \frac{1}{\rho} + \rho = \frac{\rho^2 + 1}{\rho}$$

και το $=$ μόνο για $x = \rho$

ii) Είναι $f'(x) \geq \dfrac{\rho^2 + 1}{\rho} > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

$$e^x - x \ln x = e - x \Leftrightarrow e^x - e - x(\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$f((0,1)) \underset{\text{συν/ης}}{\overset{\text{γν. αυξ.}}{=}} (\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to 1^+} f(x)) = (-e, 1)$$

Το $0 \in f((0,1))$ άρα η $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον μία ρίζα $x_0 \in (0,1)$ και f'' γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε είναι μοναδική iii) Είναι για κάθε $x > 0$

$$e^x > x + 1 > x > x - 1 \geq \ln x \Rightarrow h(x) > \varphi(x)$$

άρα

$$E(\Omega) = \int_{x_0}^{1} (h(x) - \varphi(x))\, dx = \int_{x_0}^{1} (e^x - \ln x)\, dx =$$
$$\int_{x_0}^{1} f'(x)\, dx = \Big[f(x)\Big]_{x_0}^{1} = f(1) - f(x_0) = 1 - 0 = 1$$

iv) Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\rho, x_0)$ τέτοιο, ώστε

$$e^{\rho - x_0} = -\frac{f(\xi)}{f''(\xi)} \Leftrightarrow \frac{e^\rho}{e^{x_0}} = -\frac{f(\xi)}{f''(\xi)} \Leftrightarrow$$
$$e^\rho \cdot f''(\xi) = -e^{x_0} \cdot f(\xi) \Leftrightarrow e^\rho \cdot f''(\xi) + e^{x_0} \cdot f(\xi) = 0$$

Θέτω $w(x) = e^\rho \cdot f''(x) + e^{x_0} \cdot f(x)$, $x > 0$. Η w είναι συνεχής στο $[\rho, x_0]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

- είναι
$$w(\rho) = e^\rho \cdot f''(\rho) + e^{x_0} \cdot f(\rho) = e^{x_0} \cdot f(\rho) < 0$$
αφού $\rho < x_0 \overset{\text{γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f(\rho) < f(x_0) = 0$
- και
$$w(x_0) = e^\rho \cdot f''(x_0) + e^{x_0} \cdot f(x_0) = e^\rho \cdot f''(x_0) > 0$$
αφού $\rho < x_0 \overset{\text{γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} 0 = f''(\rho) < f''(x_0)$

Επειδή $w(\rho) \cdot w(x_0) < 0$ από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\rho, x_0)$ τέτοιο, ώστε

$$w(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^\rho \cdot f''(\xi) + e^{x_0} \cdot f(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{\rho - x_0} = -\frac{f(\xi)}{f''(\xi)}$$

Η συνάρτηση w είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$w'(x) = e^\rho \cdot \underbrace{f^{(3)}(x)}_{>0} + e^{x_0} \cdot \underbrace{f'(x)}_{>0} > 0$$

άρα η w είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε η ρίζα $\xi \in (\rho, x_0)$ είναι μοναδική

v) α′) Είναι $F'(x) = f(x)$ και $F''(x) = f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα η F είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$

β′) Είναι $F'(x) = f(x)$, άρα

x	0		x_0		$+\infty$
F'		$-$	0	$+$	
F		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			OE		

$$x_0 < 1 \Leftrightarrow F(x_0) < F(1) \Rightarrow F(x_0) < \frac{3}{4}$$

είναι

$$0 < x_0 < 1 \Rightarrow \frac{1}{x_0} > 1 \Rightarrow \frac{3}{4x_0} > \frac{3}{4}$$

άρα

$$F(x_0) < \frac{3}{4} < \frac{3}{4x_0} \Rightarrow F(x_0) < \frac{3}{4x_0}$$

γ΄) Η F είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ άρα η C_F βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της στο $x=1$ με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή $F(x) \geq x - \frac{1}{4}$ και το = μόνο για $x=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{4}\right) = +\infty$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

και επειδή η F είναι συνεχής, τότε $F((0,+\infty)) = [F(x_0),+\infty)$

vi) Έχουμε

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{F(x)-F(x_0)}{\eta\mu(x-x_0)}\cdot\eta\mu\frac{2026}{x-x_0}\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{\eta\mu(x-x_0)}{x-x_0}}\cdot\eta\mu\frac{2026}{x-x_0}\right) = 0$$

από Κριτήριο Παρεμβολής διότι

- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = F'(x_0) = f(x_0) = 0$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\eta\mu(x-x_0)}{x-x_0} \overset{u=x-x_0}{=} \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u} = 1$

άρα

$$\lim_{x\to x_0}\underbrace{\frac{F(x)-F(x_0)}{\eta\mu(x-x_0)}}_{K} = 0\cdot 1 = 0$$

και

$$\left|K\cdot\eta\mu\frac{2026}{x-x_0}\right| \leq |K| \Rightarrow$$

$$-|K| \leq \frac{F(x)-F(x_0)}{\eta\mu(x-x_0)} \cdot \eta\mu\frac{2026}{x-x_0} \leq |K|$$

$$\mu\varepsilon \lim_{x\to x_0} -|K| = \lim_{x\to x_0} |K| = 0$$