Άσκηση 107

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

- $(f'(x))^2 + f(x)f''(x) = \dfrac{e^x}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$

i) α΄) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\Phi(x) = f(x) \cdot f'(x) - \dfrac{e^x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή.

β΄) Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{e^x - x}$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) α΄) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

β΄) Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $(-\infty, x_0]$ και κυρτή στο $[x_0, +\infty)$, όπου $x_0 < 0$.

iii) Να δείξετε ότι $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{f(x)f''(x)}{e^x - 1} dx = \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln \sqrt{2})$.

iv) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο ακριβώς τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\displaystyle\int_{\alpha-1}^{\alpha^4+3\alpha} (f(x) - f'(x))\, dx = 0$.

Λύση

i) α′) Η συνάρτηση Φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\Phi'(x) = \left(f(x)\cdot f'(x) - \frac{e^x}{2}\right)' = (f'(x))^2 + f(x)f''(x) - \frac{e^x}{2} = 0$$

Συνεπώς, η συνάρτηση $\Phi(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$

β′) Είναι Φ σταθερή άρα $\Phi(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)\cdot f'(x) = \dfrac{e^x}{2} + c$

Για $x = 0$

$$f(0)f'(0) = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x)f'(x) = \frac{e^x}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow 2f(x)f'(x) = e^x - 1 \Rightarrow (f^2(x))' = (e^x - x)'$$

άρα από συνέπειες ΘΜΤ $f^2(x) = e^x - x + c$

Για $x = 0$ έχουμε $f^2(0) = 1 + c \Rightarrow 1 = 1 + c \Rightarrow c = 0$

Άρα $f^2(x) = e^x - x$

Είναι $e^x \geq x + 1 > x \Rightarrow e^x - x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα

$|f(x)| = \sqrt{e^x - x} \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο

και επειδή $f(0) = 1 > 0$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε

$$f(x) = \sqrt{e^x - x}\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

ii) α′) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \frac{(e^x - x)'}{2\sqrt{e^x - x}} = \frac{e^x - 1}{2\sqrt{e^x - x}}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

OE

$f(0) = 1$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{e^x - x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)} = (+\infty)\cdot\sqrt{1-0} = +\infty$$

Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\mathbb{R}) = [1, +\infty)$

β΄) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x) = \frac{e^x \cdot 2\sqrt{e^x - x} - (e^x - 1)\cdot \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{e^x - x}}}{4(e^x - x)} = \frac{e^{2x} - 2xe^x + 2e^x - 1}{4(e^x - x)\sqrt{e^x - x}}$$

Ο παρονομαστής είναι θετικός, οπότε το πρόσημο της f'' καθορίζεται από το πρόσημο της συνάρτησης $g(x) = e^{2x} - 2xe^x + 2e^x - 1$

Είναι $g'(x) = 2e^{2x} - (2e^x + 2xe^x) + 2e^x = 2e^x(e^x - x) > 0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
g'	$+$
g	$-1 \nearrow +\infty$

Το $0 \in g((-\infty, +\infty))$ και g γνησίως αύξουσα, άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $g(x_0) = 0$

$x_0 < 0 \Leftrightarrow g(x_0) < g(0) \Leftrightarrow 0 < 2$ που ισχύει

$$x < x_0 \Rightarrow g(x) < g(x_0) \Rightarrow f''(x) < 0$$

$$x > x_0 \Rightarrow g(x) > g(x_0) \Rightarrow f''(x) > 0$$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$		$\smile$

ΣΚ

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, x_0]$ και κυρτή στο $[x_0, +\infty)$, με μοναδικό σημείο καμπής το $(x_0, f(x_0))$

iii) Είναι $f'(x) = \dfrac{e^x - 1}{2f(x)} \Rightarrow 2f(x)f'(x) = e^x - 1$, οπότε

$$\int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{f(x)f''(x)}{e^x - 1}dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(x)}{f'(x)}dx = \left[\frac{1}{2}\ln|f'(x)|\right]_{\ln 2}^{\ln 4} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{f'(\ln 4)}{f'(\ln 2)}\right)$$

όπου

$$\frac{f'(\ln 4)}{f'(\ln 2)} = \frac{\dfrac{3}{2\sqrt{4-\ln 4}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{2-\ln 2}}} = \frac{3\sqrt{2-\ln 2}}{\sqrt{4-\ln 4}} = \frac{3\sqrt{2-\ln 2}}{\sqrt{2}\sqrt{2-\ln 2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Συνεπώς

$$I = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln\sqrt{2})$$

iv) Θεωρώ τη συνάρτηση $H(x) = f(x) - f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι

$$H(x) = \sqrt{e^x - x} - \frac{e^x - 1}{2\sqrt{e^x - x}} = \frac{2(e^x - x) - (e^x - 1)}{2\sqrt{e^x - x}} = \frac{e^x - 2x + 1}{2\sqrt{e^x - x}}$$

Θέτω

$$k(x) = e^x - 2x + 1\ ,\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow k'(x) = e^x - 2$$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
k'	$-$	0	$+$
k	$+\infty$ ↘		↗ $+\infty$

OE

$3 - \ln 4$

Η k παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = \ln 2$ το $k(\ln 2) = 3 - \ln 4 > 0$

άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $k(x) \geq k(ln2) > 0 \Rightarrow H(x) > 0$

Επειδή $H(x) > 0$ στο $\mathbb{R}$

- αν $\alpha - 1 < \alpha^4 + 3\alpha$ τότε $\displaystyle\int_{\alpha-1}^{\alpha^4+3\alpha} H(x)dx > 0$
- αν $\alpha - 1 > \alpha^4 + 3\alpha$ τότε $\displaystyle\int_{\alpha-1}^{\alpha^4+3\alpha} H(x)dx < 0$

Συνεπώς, για να ισχύει $\displaystyle\int_{\alpha-1}^{\alpha^4+3\alpha} H(x)dx = 0$ πρέπει αναγκαστικά τα άκρα ολοκλήρωσης να είναι ίσα, δηλαδή

$$\alpha^4 + 3\alpha = \alpha - 1 \Leftrightarrow \alpha^4 + 2\alpha + 1 = 0$$

$$(\alpha + 1)(\alpha^3 - \alpha^2 + \alpha + 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1 \text{ ή } \alpha^3 - \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

Θέτω $w(\alpha) = \alpha^3 - \alpha^2 + \alpha + 1,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Η w είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$w'(\alpha) = 3\alpha^2 - 2\alpha + 1$$

Είναι $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$ άρα $w'(\alpha) > 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

α	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
w'	$+$
w	$-\infty \nearrow +\infty$

Συνεπώς, η w είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $w(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty)$

Το $0 \in w((\mathbb{R})$ άρα η εξίσωση $w(\alpha) = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα α_0

Είναι $\alpha_0 > -1 \Leftrightarrow w(\alpha_0) > w(-1) \Leftrightarrow 0 > -2$ ισχύει, άρα $\alpha_0 \neq -1$

άρα η αρχική εξίσωση έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες, την $\alpha_1 = -1$ και την $\alpha_0 > -1$