Άσκηση 108

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2(2\ln x-5) & , \ x>0 \\ \alpha & , x=0 \end{cases}$, όπου α πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $\displaystyle\int_1^e \frac{x+\alpha}{x}dx = e(\alpha+1)-1$.

i) Να δείξετε ότι $\alpha=0$.

ii) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$.

iii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $g(x)=f(x)+5x^2 \ , \ x\geq 0$

iv) Να δείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο.

v) Να δείξετε ότι $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(g\left(\sqrt{\text{ημ}x}\right)-f\left(\sqrt{\text{ημ}x}\right)\right)dx = 5$.

vi) Να δείξετε ότι $\displaystyle\int_e^{e+2} G(x)\,dx > 2G(e+1)$, όπου G αρχική της g.

Λύση

i) Έχουμε

$$\int_1^e \frac{x+\alpha}{x}\,dx = \int_1^e \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)dx = \Big[x+\alpha\ln x\Big]_1^e = e+\alpha-1+\alpha$$

Από την υπόθεση ισχύει

$$e+\alpha-1 = e(\alpha+1)-1 \Leftrightarrow \alpha = e\alpha \Leftrightarrow \alpha(e-1)=0 \overset{e\neq 1}{\Leftrightarrow} \alpha = 0$$

ii) Για $\alpha = 0$ είναι $f(x) = \begin{cases} x^2(2\ln x - 5) & ,\ x>0 \\ 0 & ,\ x=0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2(2\ln x-5)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left[x(2\ln x-5)\right] = \lim_{x\to 0^+}(2x\ln x-5x) = 0$$

διότι

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Συνεπώς, η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$

iii) Για $x>0$, η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = 2x(2\ln x-5) + x^2\cdot\frac{2}{x} = 4x\ln x - 8x = 4x(\ln x - 2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(\ln x-2) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$$

x	0		e^2		$+\infty$
f'	0	$-$	0	$+$	
f	0	↘		↗	$+\infty$
	TM		OE		
	$f(0)=0$		$f(e^2)=-e^4$		

Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ αφού είναι παραγωγίσιμη

Επειδή $f'(x)<0$ στο $(0,e^2)$ και η f είναι συνεχής, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,e^2]$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f''(x) = (4x\ln x - 8x)' = 4\ln x - 4 = 4(\ln x - 1)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x = e$ το $A(e, f(e)) = A(e, e^2(2\ln e - 5)) = A(e, -3e^2)$.

x	0		e		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\frown$		$\smile$	
			ΣΚ $(e, 3e^2)$		

iv) Είναι $g(x) = f(x) + 5x^2$, $x \geq 0$. Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ ως άθροισμα συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = f'(x) + 10x$, $x \geq 0$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow g(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, επομένως το $O(0,0)$ είναι κοινό σημείο των C_f, Cg και $f'(0) = g'(0) = 0$ άρα οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο τους η οποία είναι ο άξονας $x'x$ $(y = 0)$

v) Είναι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(g\left(\sqrt{\eta\mu x}\right) - f\left(\sqrt{\eta\mu x}\right)\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\left(\sqrt{\eta\mu x}\right)^2 dx =$$

$$5\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x \, dx = 5\Big[-\sigma\upsilon\nu x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 5$$

vi) Η G είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$G'(x) = g(x) \text{ και } G''(x) = g'(x) = 2x(2\ln x + 1)$$

$$G''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
G''		$-$	0	$+$	
G		$\frown$		$\smile$	
			ΣΚ		

Η G είναι κυρτή στο διάστημα $[e, e+2]$, άρα η γραφική παράσταση της G βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος αυτού, με εξαίρεση το σημείο επαφής

Η εφαπτομένη της G στο σημείο με τετμημένη $e+1$ έχει εξίσωση

$$y - G(e+1) = G'(e+1)(x-(e+1)) \Rightarrow y = g(e+1)(x-e-1) + G(e+1)$$

άρα για κάθε $x \in [e, e+2]$ ισχύει

$$G(x) \geq g(e+1)(x-e-1) + G(e+1)$$

και το = μόνο για $x = e+1$. Οπότε έχουμε

$$\int_e^{e+2} G(x)\,dx > \int_e^{e+2} [g(e+1)(x-e-1) + G(e+1)]\,dx$$

$$\int_e^{e+2} G(x)\,dx > g(e+1)\left[\frac{(x-e-1)^2}{2}\right]_e^{e+2} + G(e+1)\cdot(e+2-e)$$

$$\int_e^{e+2} G(x)\,dx > g(e+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + G(e+1)$$

$$\int_e^{e+2} G(x)\,dx > 2G(e+1)$$