Άσκηση 109

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x)+\int\limits_1^e\left(\ln t+\dfrac{\alpha}{e-1}\right)dt\cdot x+2\le\dfrac{1}{x}$ για κάθε $x>0$
- $f(x)\ge 2x-2+\dfrac{1}{2x}$ για κάθε $x>0$
- $f(1)=-(\alpha+2)\ ,\ f'(1)=1$

i) Να δείξετε ότι $\alpha=-3$.

ii) Να βρείτε την ασύμπτωτη, έστω (ε), της C_f στο $+\infty$.

iii) Αν E το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f, την (ε) και τις ευθείες $x=1\ ,\ x=e^{-\alpha}$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{3}{2}\le E\le 3$.

iv) α΄) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4-\left(\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{f(t)}{t}\right)x^3+\left(\lim\limits_{t\to+\infty}(f(t)-2t)\right)x-5=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1,x_2 με $x_2\in(2,3)$.

β΄) Να δείξετε ότι $\int\limits_1^{x_2}\left(f'(x)-3x^2+6x-3\right)dx<-\dfrac{2}{3}$.

Λύση

i) Είναι

$$\int_1^e \left(\ln t + \frac{\alpha}{e-1}\right)dt = \left[t\ln t - t + \frac{\alpha}{e-1}t\right]_1^e = e\ln e - e + 1 + \frac{\alpha}{e-1}(e-1) = \alpha + 1$$

Οπότε για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$f(x) + (\alpha+1)x + 2 \le \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) + (\alpha+1)x + 2 - \frac{1}{x} \le 0$$

Θέτω $g(x) = f(x) + (\alpha+1)x + 2 - \dfrac{1}{x}$, $x \in (0,+\infty)$, άρα $g(x) \le g(1)$ για κάθε $x > 0$

Η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 1 \in (0,+\infty)$, η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, άρα από Θεώρημα Fermat είναι $g'(1) = 0$

Είναι

$$g'(x) = f'(x) + \alpha + 1 + \frac{1}{x^2}$$

οπότε

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) + \alpha + 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -3$$

ii) Για $\alpha = -3$ έχουμε για κάθε $x > 0$

$$2x - 2 + \frac{1}{2x} \le f(x) \le 2x - 2 + \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{2x} \le f(x) - (2x-2) \le \frac{1}{x}$$

με

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

άρα από Κριτήριο Παρεμβολής είναι

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (2x-2)] = 0$$

άρα η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x - 2$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

iii) Για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$f(x) \ge 2x - 2 + \frac{1}{2x} \Leftrightarrow f(x) - (2x-2) \ge \frac{1}{2x} > 0$$

Είναι

$$E = \int_{e^{-3}}^1 |f(x) - (2x-2)|dx = \int_{e^{-3}}^1 (f(x) - 2x + 2)dx$$

και

$$\frac{1}{2x} \le f(x) - (2x-2) \le \frac{1}{x}$$

οπότε

$$\int_{e^{-3}}^{1} \frac{1}{2x}dx \le E \le \int_{e^{-3}}^{1} \frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{2}\Big[\ln x\Big]_{e^{-3}}^{1} \le E \le \Big[\ln x\Big]_{e^{-3}}^{1} \Rightarrow \frac{3}{2} \le E \le 3$$

iv) α′) Η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x - 2$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, άρα

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t} = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{t\to+\infty} (f(t) - 2t) = -2$$

οπότε η εξίσωση γίνεται

$x^4 - 2x^3 - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^3 - 3x^2 + 3x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x^3 - 3x^2 + 3x - 5 = 0$

συνεπώς το $x_1 = -1$ είναι ρίζα της εξίσωσης

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5\ ,\ x \in \mathbb{R}$

- Η h είναι συνεχής στο $[2,3]$ ως πολυωνυμική
- $h(2) = 8 - 12 + 6 - 5 = -3 < 0$
- $h(3) = 27 - 27 + 9 - 5 = 4 > 0$

Επειδή $h(2) \cdot h(3) < 0$ από το Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_2 \in (2,3)$

Είναι $h'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 > 0$ για κάθε $x \neq 1$ και h συνεχής στο 1, άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η ρίζα $x_2 \in (2,3)$ είναι μοναδική

Οπότε η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1 = -1$ και $x_2 \in (2,3)$

β′) Είναι

$$\int_{1}^{x_2} \left(f'(x) - 3x^2 + 6x - 3\right) dx = \int_{1}^{x_2} \left(f'(x) - h'(x)\right) dx$$

$$= \Big[f(x) - h(x)\Big]_1^{x_2} = (f(x_2) - h(x_2)) - (f(1) - h(1)) = f(x_2) - 5$$

Είναι

$$f(x_2) \le 2x_2 - 2 + \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow f(x_2) - 5 < 2x_2 - 2 + \frac{1}{x_2} - 5 = 2x_2 - 7 + \frac{1}{x_2}$$

Θέτω $\phi(x) = 2x - 7 + \dfrac{1}{x}\ ,\ x \in [2,3]$. Η ϕ είναι παραγωγίσιμη με $\phi'(x) = 2 - \dfrac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in [2,3]$ άρα είναι γνησίως αύξουσα, οπότε

$$x_2 < 3 \Leftrightarrow \phi(x_2) < \phi(3) = 2 \cdot 3 - 7 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

Συνεπώς

$$\int_{1}^{x_2} \left(f'(x) - 3x^2 + 6x - 3\right) dx < -\frac{2}{3}$$