Άσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\dfrac{2g(2026)}{3(x^2+1)e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$, όπου g παραγωγίσιμη με $g'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x) + \dfrac{3}{2}}{x} = 0$.

i) Να αποδείξετε ότι $g(0) = -\dfrac{3}{2}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iv) α′) Να δείξετε ότι $f'(x) = f(x)\left(1 - \dfrac{2x}{x^2+1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

β′) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(\eta\mu x)}{f(\eta\mu x)} dx$.

v) Να αποδείξετε ότι $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) > 1$, όπου $\xi_1, \xi_2 \in (-1, 1)$.

Λύση

i) Θέτω $h(x) = \dfrac{g(x) + \frac{3}{2}}{x}$, τότε $g(x) = x \cdot h(x) - \dfrac{3}{2}$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\left(x \cdot h(x) - \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη, είναι και συνεχής στο 0, άρα $g(0) = \lim_{x\to 0} g(x) = -\dfrac{3}{2}$

ii) $g'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, οπότε $g(2026) = g(0) = -\dfrac{3}{2}$

$$f(x) = -\frac{2\cdot(-\frac{3}{2})}{3(x^2+1)e^{-x}} = \frac{3}{3(x^2+1)e^{-x}} = \frac{e^x}{x^2+1}$$

iii)

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - 2xe^x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

Είναι $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η $f'(x) = 0$ μόνο για $x = 1$. Άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to +\infty} f(x) \overset{DLH}{=} \lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{2x} = +\infty$ Άρα $f(A) = (0, +\infty)$

iv) α′)

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x}{x^2+1}\cdot\frac{x^2-2x+1}{x^2+1} = f(x)\left(1 - \frac{2x}{x^2+1}\right)$$

β′)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(\eta\mu x)}{f(\eta\mu x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \frac{2\eta\mu x}{\eta\mu^2 x + 1}\right)dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\eta\mu x}{2 - \sigma\upsilon\nu^2 x}dx$$

Έστω $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\eta\mu x}{2 - \sigma\upsilon\nu^2 x}dx$. Θέτω $u = \sigma\upsilon\nu x$, $du = -\eta\mu x dx$, άρα

$$J = \int_1^0 \frac{2(-du)}{2-u^2} = \int_0^1 \frac{2}{(\sqrt{2}-u)(\sqrt{2}+u)}du$$

$$\frac{2}{2-u^2} = \frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{2}-u} + \frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{2}+u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-u} + \frac{1}{\sqrt{2}+u}\right)$$

$$J = \frac{\sqrt{2}}{2}\Big[-\ln(\sqrt{2}-u) + \ln(\sqrt{2}+u)\Big]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$$

Άρα $I = \dfrac{\pi}{2} - \sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$.

v) ΘΜΤ για την f στα $[-1,0]$ και $[0,1]$, άρα

υπάρχει $\xi_1 \in (-1,0)$ ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)} = f(0)-f(-1)$ και

υπάρχει $\xi_2 \in (0,1)$ ώστε $f'(\xi_2) = \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} = f(1)-f(0)$

$$f'(\xi_1)+f'(\xi_2) = f(0)+f(-1)+f(1)-f(0) = f(-1)+f(1) = -\frac{1}{2e}+\frac{e}{2} = \frac{e^2-1}{2e}$$

$\dfrac{e^2-1}{2e} > 1 \Leftrightarrow e^2-2e-1>0 \Leftrightarrow (e-1)^2-2>0 \Leftrightarrow (e-1)^2>2$ που ισχύει