Άσκηση 110

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(\ln x) = 1 - \dfrac{x}{x+1} + x$ για κάθε $x > 0$
- $f(0) = 1 - \ln 2$

i) Να βρείτε την συνάρτηση f.

Δίνεται $f(x) = x - \ln(e^x + 1) + e^x \ , \ x \in \mathbb{R}$

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $h(x) = f(x) - e^x \ , \ x \in \mathbb{R}$

iii) Να δείξετε ότι η h αντιστρέφεται.

iv) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \ln \dfrac{e^{f(x)+x^2} + 1}{e^{x^2} + 1}$ έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία ανήκει στο $(-1, 0)$.

v) Να δείξετε ότι $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \left(e^{\frac{1}{f(x)}} \cdot \ln \frac{x}{x_0} \right) = -\infty$.

Λύση

i) Είναι $f'(\ln x) = 1 - \dfrac{x}{x+1} + x$ για κάθε $x > 0$

Θέτω $\ln x = u$, $u \in \mathbb{R}$ οπότε $x = e^u$, άρα για κάθε $u \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f'(u) = 1 - \frac{e^u}{e^u + 1} + e^u$$
$$f'(u) = (u - \ln(e^u + 1) + e^u)'$$

Συνεπώς, από συνέπειες του ΘΜΤ προκύπτει

$$f(u) = u - \ln(e^u + 1) + e^u + c$$

Για $u = 0$

$$f(0) = \ln 2 + e^0 + c \Rightarrow 1 - \ln 2 = -\ln 2 + 1 + c \Rightarrow c = 0$$

άρα $f(x) = x - \ln(e^x + 1) + e^x$, $x \in \mathbb{R}$

ii) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} + e^x = \frac{1}{e^x + 1} + e^x$$

είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x) = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} + e^x = e^x\left(1 - \frac{1}{(e^x + 1)^2}\right) = \frac{e^{2x}(e^x + 2)}{(e^x + 1)^2}$$

είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι

$$f(A) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty)$$

διότι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} [x - \ln(e^x + 1) + e^x] = (-\infty) - \ln(0 + 1) + 0 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} [\ln(e^x) - \ln(e^x + 1) + e^x] = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right) + e^x\right] = +\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x + 1} \overset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x} = 1$

iii) Είναι

$$h(x) = f(x) - e^x = x - \ln(e^x + 1)\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$h'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1}$$

Επειδή $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι $1 - 1$ και συνεπώς αντιστρέφεται iv) Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f(x) = \ln\frac{e^{f(x)+x^2}+1}{e^{x^2}+1} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \ln(e^{f(x)+x^2}+1) - \ln(e^{x^2}+1) \Leftrightarrow$$

$$f(x) - \ln(e^{f(x)+x^2}+1) = -\ln(e^{x^2}+1) \Leftrightarrow$$

$$f(x) + x^2 - \ln(e^{f(x)+x^2}+1) = x^2 - \ln(e^{x^2}+1) \Leftrightarrow$$

$$h(f(x)+x^2) = h(x^2) \overset{h\text{ 1-1}}{\Leftrightarrow}$$

$$f(x) + x^2 = x^2 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Η f είναι συνεχής στο $[-1,0]$

- $f(-1) = -1 - \ln(e^{-1}+1) + e^{-1} = -1 - \ln(1+e) + \ln e + \dfrac{1}{e} = \dfrac{1}{e} - \ln(1+e) < 0$
- $f(0) = 1 - \ln 2 > 0$

Είναι $f(-1)f(0) < 0$ άρα από Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (-1,0)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως η ρίζα είναι μοναδική.

v) Είναι

$$\lim_{x\to x_0^+}\left(e^{\frac{1}{f(x)}} \cdot \ln\frac{x}{x_0}\right) = \lim_{x\to x_0^+}\left(f(x)\cdot e^{\frac{1}{f(x)}} \cdot \frac{\ln\frac{x}{x_0}}{f(x)}\right)$$

- Για $x > x_0$ ισχύει $f(x) > f(x_0) = 0$

  Θέτω $u = \dfrac{1}{f(x)}$ με $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} u = +\infty$, οπότε

$$\lim_{x\to x_0^+}\left(f(x)\cdot e^{\frac{1}{f(x)}}\right) = \lim_{u\to+\infty}\frac{e^u}{u} \overset{DLH}{=} \lim_{u\to+\infty} e^u = +\infty$$

- και

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{\ln\frac{x}{x_0}}{f(x)} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to x_0^+}\frac{\frac{1}{x}}{f'(x)} = \frac{1}{x_0\cdot f'(x_0)} < 0$$

άρα

$$\lim_{x\to x_0^+}\left(e^{\frac{1}{f(x)}} \cdot \ln\frac{x}{x_0}\right) = (+\infty)\cdot\frac{1}{x_0\cdot f'(x_0)} = -\infty$$